Contrôle de mathématiques

Jeudi 22 novembre 2012

Exercice 1

Continuité et dérivabilité **(3,5 points)**

1) f est continue en 1 si, et seulement si, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. On a :

$$f(1) = 1 - 1 - 4 = -4$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} x^2 - x - 4 = -4$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} \frac{x-5}{x} = -4$$

On a donc : $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. La fonction f est donc continue en 1.

2) f est dérivable en 1 si, et seulement si, son taux d'accroissement admet une limite finie en 1.

- Si $x \leqslant 1$ f est dérivable à gauche de 1 car f est un polynôme. On a $f'(x) = 2x - 1$ donc $f'_g(1) = 1$
- Si $x > 1$ il faut revenir à la définition. Calculons alors :

$$\frac{f((1+h) - f(1)}{h} = \frac{\dfrac{1+h-5}{1+h} + 4}{h} = \frac{1+h-5+4+4h}{h(1+h)} = \frac{5h}{h(h+1)} = \frac{5}{1+h}$$

On a : $\lim_{\substack{h\to 0\\h>0}} \frac{4}{1+h} = 5$ donc $f'_d(1) = 4$

Conclusion : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ la fonction f n'est donc pas dérivable en 1.

3) on a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 - x - 4 = -4$

$\mathscr{C}_f$ n'admet donc pas d'asymptote en $x = 0$

4) On a : $\frac{x-5}{x} = 1 - \frac{5}{x}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x} = 0 \quad \text{donc par somme} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

$\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$

EXERCICE 2

Étude d'une fonction **(3,5 points)**

1) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$. De plus :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Par compostion}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty\end{array}$$

Donc par produit, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2) La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ car une fonction fonction racine est dérivable sur un intervalle où elle est **strictement positive**. Sur cet intervalle, on a :

$$f'(x) = 2\sqrt{1-x} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$$

3) $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2-3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{2}{3}$

De plus $f'(x)$ est du signe de $2-3x$ car $\sqrt{1-x} > 0$ sur $]-\infty; 1[$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

EXERCICE 3

Calcul de limites **(4 points)**

Les deux premières limites sont des formes indéterminées, on change donc la forme avant de passer à la limite.

1) On a :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

or $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1-x}=1$ donc par somme et quotient $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$

2) On a, comme $x>0$:

$$\sqrt{x^2+1}-2x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - 2x = x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}\text{Par composition}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1\end{array}$$

Par somme, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-2=-1$

De $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ par produit on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-2x=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-2\right)=-\infty$$

3) Par composition. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-1=-\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{3x-1}=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{3x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}\text{Par composition}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\dfrac{2}{3x-1}\right)=1\end{array}$$

4) Par le théorème des gendarmes. On a les encadrements suivants avec $x>1$:

$$\begin{gathered}-1\leqslant\sin x\leqslant 1\\ 3x-1\leqslant 3x+\sin x\leqslant 3x+1\\ \frac{3x-1}{x-1}\leqslant\frac{3x+\sin x}{x-1}\leqslant\frac{3x+1}{x-1}\end{gathered}$$

or $\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x}=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x-1}=3$. On peut montrer de même que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\sin x}{x-1}=3$

EXERCICE 4

Continuité et suite **(3 points)**

1) f est une fonction rationnelle définie sur $[0;9]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle. On a alors : $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}>0\quad\forall x\in[0;9]$

La fonction f est donc croissante sur $[0;9]$

2) a) $P_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 9$

- **Initialisation :** $u_0=0$ et $u_1=6-5=1$.
  On a donc : $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 9$ donc P_0 est vraie

- **Hérédité :** On admet que : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 9$.
  Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 9$

  Comme f est une fonction craoissante sur $[0;9]$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n &\leqslant u_{n+1} \leqslant 9 \\ f(0) \leqslant f(u_n) &\leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(9) \\ 1 \leqslant u_{n+1} &\leqslant u_{n+2} \leqslant 5,5 \\ 0 \leqslant u_{n+1} &\leqslant u_{n+2} \leqslant 9 \end{aligned}$$

  P_n est donc héréditaire

Par initialisation et hérédité, P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

b) La suite (u_n) est donc croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 9 ($u_n \leqslant 9$), elle est donc convergente vers une limite ℓ. Comme la fonction f est continue sur $[0;9]$(car dérivable), d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$. On a donc :

$$6 - \frac{5}{\ell+1} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad 6(\ell+1) - 5 = \ell(\ell+1) \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - 5\ell - 1 = 0$$

On a $\Delta = 25 + 4 = 29$, on prend la racine positive : $\ell = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$

Exercice 5

Fonction auxiliaire **(6 points)**

1) a) On a : $P(x) = x^3\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ &\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Par produit} \\ &\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \end{aligned}$$

De même, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$

b) P est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $P'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

$\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$, P a un signe constant : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P'(x) > 0$

P est donc croissant sur $\mathbb{R}$.

c) P est continue (car dérivable) et monotone sur $\mathbb{R}$, de plus $0 \in P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $P(\alpha) = 0$

De plus $P(-1) = -4$ et $P(0) = 1$ donc $P(-1) \times P(0) < 0$, donc $\alpha \in [-1;0]$

d) Par dichotomie, on trouve : $-0{,}295\,60 < \alpha < -0{,}295\,59$

e) Comme P est croissante sur $\mathbb{R}$, on a les relations :

- $x < \alpha \quad P(x) < 0$
- $x > \alpha \quad P(x) > 0$

2) a) On a : $f'(x) = 1 - \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)^2 - 4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+2x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$

De plus $(x+1)P(x) = (x+1)(x^3 - x^2 + 3x + 1) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$ donc

$$f'(x) = \frac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$$

b) On a : $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ ou $x = \alpha$

On fait un tableau de signe pour déterminer le signe de la dérivée, puis on dresse le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$\simeq -2.13$	↗	$+\infty$