CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI - MONTPELLIER

EXERCICE 5.1

Soit la fonction définie sur $I=[-2;5]$ par :

$$f(x)=x^2-6x+1$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=2x-6$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-6>0 \Leftrightarrow 2x>6 \Leftrightarrow x>3$$

x	-2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

b. En déduire le tableau de variation de *f* (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	17	$\searrow$	-8	$\nearrow$	-4

$$f(-2)=(-2)^2-6\times(-2)+1=4+12+1=17$$

$$f(3)=3^2-6\times3+1=9-18+1=-8$$

$$f(5)=5^2-6\times5+1=25-30+1=-4$$

EXERCICE 5.2

Soit la fonction définie sur $I=[-5;8]$ par :

$$f(x)=-2x^2+x-5$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=-4x+1$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -4x+1>0 \Leftrightarrow -4x>-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$$

x	-5		$\frac{1}{4}$		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-5		$\frac{1}{4}$		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-60	$\nearrow$	$-\frac{39}{8}$	$\searrow$	-125

$$f(-5)=-2\times(-5)^2+(-5)-5=-2\times25-5-5=-60$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}-5=-2\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-5$$

$$=\frac{-1}{8}+\frac{2}{8}-\frac{40}{8}=-\frac{39}{8}$$

$$f(8)=-2\times8^2+8-5=-2\times64+8-5=-125$$

EXERCICE 5.3

Soit la fonction définie sur $I=[0;4]$ par :

$$f(x)=-3x^2-5x+7$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=-6x-5$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I.

En déduire le tableau de signe de *f'(x)* sur I.

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -6x-5>0 \Leftrightarrow -6x>5 \Leftrightarrow x<\frac{-5}{6}$$

Or $\frac{-5}{6}\notin[0;4]$

x	0		4
$f'(x)$		$-$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	0		4
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	7	$\searrow$	-61

$$f(0)=-3\times0^2-5\times0+7=7$$

$$f(4)=-3\times4^2-5\times4+7=-3\times16-20+7=-61$$

EXERCICE 5.4

Soit la fonction définie sur $I=[-3;3]$ par :

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+1$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=x^2-x-2$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9=3^2$$

$$x_1=\frac{-(-1)-3}{2\times1}=\frac{1-3}{2}=-1,\ x_2=\frac{-(-1)+3}{2\times1}=\frac{1+3}{2}=2$$

$a=1$ donc $a>0$: le polynôme est tourné vers le haut

x	-3		-1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-3		-1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{13}{2}$	↗	$-\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$-\frac{1}{2}$

$$f(-3)=\frac{(-3)^3}{3}-\frac{(-3)^2}{2}-2\times(-3)+1$$
$$=-9-\frac{9}{2}+6+1=-2-\frac{9}{2}=-\frac{13}{2}$$
$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2\times(-1)+1$$
$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+1=-\frac{5}{6}+3=-\frac{13}{6}$$
$$f(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}-2\times2+1$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4+1=\frac{8}{3}-5=-\frac{7}{3}$$
$$f(3)=\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}-2\times3+1$$
$$=9-\frac{9}{2}-6+1=4-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$$

EXERCICE 5.5

Soit la fonction définie sur $I=[-2;2]$ par :

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=x^2-2x-3$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16=4^2$

$x_1=\frac{-(-2)-4}{2\times1}=\frac{2-4}{2}=-1,\ x_2=\frac{-(-2)+4}{2\times1}=\frac{2+4}{2}=3$

$a=1$ donc $a>0$: le polynôme est tourné vers le haut

La dérivée est négative si $x\in[-1;3]$

Or $3\notin[-2;2]$

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{8}{3}$	↘	$\frac{-19}{3}$

$$f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2-3\times(-2)+1$$
$$=\frac{-8}{3}-4+6+1=\frac{1}{3}$$
$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-3\times(-1)+1$$
$$=\frac{-1}{3}-1+3+1=\frac{8}{3}$$
$$f(2)=\frac{2^3}{3}-2^2-3\times2+1$$
$$=\frac{8}{3}-4-6+1=\frac{-19}{3}$$

EXERCICE 5.6

Soit la fonction définie sur $I=[-1;3]$ par :

$$f(x)=x^3-x^2+x+8$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=3x^2-2x+1$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$\Delta=(-2)^2-4\times3\times1=4-12=-8\ \rightarrow\ \Delta<0$

Il n'y a pas de solution : la dérivée ne s'annule pas

$a=1$ donc $a>0$: le polynôme est tourné vers le haut

x	-1		3
$f'(x)$		$+$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	5	↗	29

$$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2+(-1)+8$$
$$=-1-1-1+8=5$$
$$f(3)=3^3-3^2+3+8$$
$$=27-9+3+8=29$$

EXERCICE 5.7

Soit la fonction définie sur $I=[-3;3]$ par :

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x+5$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=x^2-4x+4$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times4=16-16=0$

Solution double : $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

$a=1$ donc $a>0$: le polynôme est tourné vers le haut

x	-3		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-3		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	-34	$\nearrow$			8

$f(-3)=\frac{(-3)^3}{3}-2\times(-3)^2+4\times(-3)+5$

$=-9-2\times9-12+5=-34$

$f(3)=\frac{3^3}{3}-2\times3^2+4\times3+5$

$=9-2\times9+12+5=8$

EXERCICE 5.8

Soit la fonction définie sur $I=[-1;4]$ par :

$$f(x)=\frac{2x-5}{x+2}$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=\frac{9}{(x+2)^2}$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

Le numérateur et le dénominateur sont positifs donc la dérivée est positive.

x	-1		4
$f'(x)$		$+$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-1		4
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-7	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

$f(-1)=\frac{2\times(-1)-5}{(-1)+2}=\frac{-2-5}{1}=-7$

$f(4)=\frac{2\times4-5}{4+2}=\frac{8-5}{6}=\frac{1}{2}$

EXERCICE 5.9

Soit la fonction définie sur $I=[1;3]$ par :

$$f(x)=\frac{5x-1}{3x-2}$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x)=\frac{-7}{(3x-2)^2}$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I, et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

Le numérateur est négatif et le dénominateur est positif donc la dérivée est négative.

x	1		3
$f'(x)$		$-$	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	1		3
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	4	$\searrow$	2

$f(1)=\frac{5\times1-1}{3\times1-2}=\frac{4}{1}=4$

$f(3)=\frac{5\times3-1}{3\times3-2}=\frac{15-1}{9-2}=\frac{14}{7}=2$