I RAPPELS

1 OPÉRATIONS SUR LES ÉVÈNEMENTS

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements

— L'évènement « A ne s'est pas réalisé » est l'évènement contraire de A noté $\overline{A}$.

— L'évènement « au moins un des évènements A ou B s'est réalisé » est l'évènement « A ou B » noté $A \cup B$.

— L'évènement « les évènements A et B se sont réalisés » est l'évènement « A et B » noté $A \cap B$.

— Deux évènements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont incompatibles.
On a alors $A \cap B = \varnothing$.
Les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

2 LOI DE PROBABILITÉ

Ω désigne un univers de n éventualités $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

— Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire e_i un nombre réel $p(e_i) = p_i$ de l'intervalle $[0;1]$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

— La probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

PROPRIÉTÉS

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

1. Pour tout évènement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
2. Si A et B sont deux évènements $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

3 ÉQUIPROBABILITÉ

Soit Ω un univers fini de n éventualités. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité c'est à dire, si $p(e_1) = p(e_2) = \dots = p(e_n) = \frac{1}{n}$, alors l'univers est dit équiprobable.
On a alors pour tout évènement A,

$$p(A) = \frac{\text{nombre des issues favorables à } A}{\text{nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Notation :
Soit E un ensemble fini, le cardinal de E noté card(E) est le nombre d'éléments de l'ensemble E.

EXEMPLE

On lance deux dés équilibrés. Quel est l'évènement le plus probable A « la somme des nombres obtenus est égale à 7 » ou B « la somme des nombres obtenus est égale à 8 » ?
Si on s'intéresse à la somme des deux dés, l'univers est $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque évènement élémentaire n'a pas la même probabilité :

$$2 = 1 + 1 \text{ alors que } 5 = 1 + 4 \text{ ou } 5 = 2 + 3.$$

On se place dans une situation d'équiprobabilité en représentant une issue à l'aide d'un couple (a,b) où a est le résultat du premier dé et b le résultat du second dé. L'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5,6\}$.
Les dés étant équilibrés, il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

L'évènement A est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 7. D'où $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.
L'évènement B est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 8. D'où $p(B) = \dfrac{5}{36}$.
L'évènement le plus probable est A.

II VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

Il arrive souvent qu'à chaque résultat d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$.
Par exemple le gain obtenu à l'occasion d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.
En première, on ne considère que le cas où Ω est un univers fini.

1 DÉFINITIONS

Soit Ω un univers fini de n éventualités.

— On appelle variable aléatoire X sur l'ensemble Ω toute fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

— L'évènement « $X = x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω qui ont pour image le réel x_i par X.

EXEMPLE

On lance à trois reprises une pièce bien équilibrée et on note le résultat à l'aide d'un mot de trois lettres.
L'univers associé à cette expérience est :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

1. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque éventualité de l'univers Ω le nombre de « pile ».
   — La variable X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.
   L'image de PPP est $X(PPP) = 3$, l'image de PFP est $X(PFP) = 2$.
   — L'évènement « $X = 2$ » est constitué des issues $\{PPF, PFP, FPP\}$.
   — L'évènement « $X < 2$ » est constitué des issues $\{PFF, FPF, FFP, FFF\}$.
2. On définit une variable aléatoire Y avec la règle de jeu suivante : un joueur gagne 8 € s'il obtient trois « pile » successifs, il ne gagne rien s'il obtient deux « pile » et il perd 2 € dans tous les autres cas.
   — La variable Y peut prendre les valeurs -2, 0 ou 8.
   L'image de PPP est $Y(PPP) = 8$, l'image de PFF est $Y(PFF) = -2$.
   — L'évènement « $Y = -2$ » est constitué des issues $\{PFF, FPF, FFP, FFF\}$.
   — L'évènement « $Y \geqslant 0$ » est constitué des issues $\{PPP, PPF, PFP, FPP\}$.

2 LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω, qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.
Lorsque, à chaque valeur x_i, on associe la probabilité de l'évènement « $X = x_i$ », notée $p(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

EXEMPLE

On considère la règle de jeu suivante :
Après avoir lancé deux dés cubiques équilibrés, un joueur gagne 10 € s'il obtient un double six, il gagne 3 € si la somme des chiffres est un nombre impair, sinon le joueur perd 5 €.
On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance deux dés cubiques équilibrés et on fait la somme des chiffres obtenus.
L'univers de cette expérience est $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. La loi de probabilité définie sur Ω est :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω, qui prend les valeurs $\{-5,3,10\}$.

— L'évènement $(X = 10)$ est constitué de l'issue $\{12\}$ donc $p(X = 10) = \frac{1}{36}$.

— L'évènement $(X = 3)$ est constitué des issues $\{3,5,7,9,11\}$ d'où $p(X = 3) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{2}$.

— Comme $p(X = -5) + p(X = 3) + p(X = 10) = 1$, on en déduit que :

$$p(X = -5) = 1 - p(X = 3) - p(X = 10) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{36} = \frac{17}{36}$$

D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-5	3	10
$p(X = x_i)$	$\frac{17}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{36}$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

On appelle espérance mathématique de X notée $\mathrm{E}(X)$, le réel :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k$$

REMARQUES :

— L'espérance $\mathrm{E}(X)$ apparaît comme la moyenne (au sens statistique du terme) des valeurs x_i affectées des fréquences p_i.

— Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $\mathrm{E}(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois.
Le signe de $\mathrm{E}(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre.
Si $\mathrm{E}(X) = 0$, on dit que le *jeu est équitable*.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la loi de probabilité de X est :

x_i	-5	3	10
$p(X = x_i)$	$\dfrac{17}{36}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{36}$

L'espérance mathématique de X est :

$$\mathrm{E}(X) = -5 \times \frac{17}{36} + 3 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{36} = -\frac{7}{12}$$

L'espérance mathématique $\mathrm{E}(X) < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur.
Si chaque joueur joue 6 parties, comme $6 \times \left(-\dfrac{7}{12}\right) = -3{,}5$, un joueur risque de perdre en moyenne 3,50 €.

III LOI BINOMIALE

Dans ce paragraphe, on étudie la répétition d'expériences identiques et indépendantes :

— Cela signifie que les conditions dans lesquelles on répète l'expérience sont les mêmes. Par exemple, les tirages d'objets se font « avec remise » de l'objet tiré après chaque tirage.

— Cela signifie aussi que le résultat d'une expérience n'a aucune influence sur le résultat de l'expérience suivante.

1 ÉPREUVE DE BERNOULLI

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.

2 LOI BINOMIALE

En répétant n fois la même expérience de Bernoulli, on obtient une nouvelle expérience aléatoire qui possède 2^n issues.

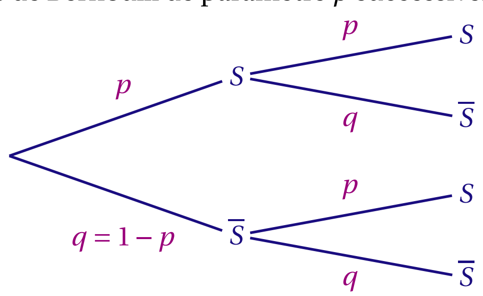
L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante est appelée un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La loi de probabilité de la variable aléatoire associée au nombre de succès obtenus au cours de n épreuves de ce schéma de Bernoulli est appelée la loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n; p)$.

CAS SIMPLES

Dans le cas où $n = 2$ ou $n = 3$, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

1. Cas $n = 2$

   On répète deux fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p successivement et de façon indépendante.



Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2;p)$ de paramètres $n=2$ et p :

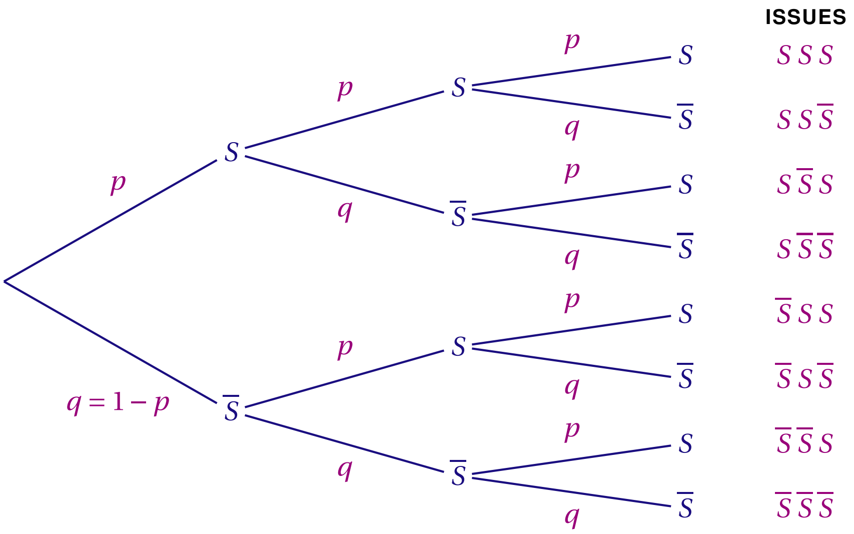
Nombre de succès k	0	1	2
$P(X=k)$	q^2	$2\times p\times q$	p^2

2. Cas $n=3$

On répète trois fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p successivement et de façon indépendante. L'expérience comporte $2^3=8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{S\,S\,S;\ S\,S\,\overline{S};\ S\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,S\,S;\ S\,\overline{S}\,\overline{S};\ \overline{S}\,S\,\overline{S};\ \overline{S}\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\}$$

Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès, on dresse un arbre et compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$ de paramètres $n=3$ et p :

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X=k)$	q^3	$3\times p\times q^2$	$3\times p^2\times q$	p^3

COEFFICIENTS BINOMIAUX

Soit n un entier naturel non nul et k un entier tel que $0\leqslant k\leqslant n$.

Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

REMARQUES :

— Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs : $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{n}=1$.

— Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès : $\binom{n}{1}=n$.

— Les calculatrices permettent de calculer les coefficients binomiaux dans les autres cas. Exemple de calcul de $\binom{8}{3}$:

TEXAS TI 83	CASIO
Touche math choisir PROB puis 3 : Combinaison 8 C 3 56	Touche OPTN choisir PROB puis n C r 8 C 3 56

FORMULE GÉNÉRALE DE LA LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\text{, où } q=1-p$$

PROPRIÉTÉS

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

— $P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k)$

— $P(X \geqslant k) = 1 - P(X < k)$

En particulier $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - q^n$, où $q = 1-p$

COMMANDES SPÉCIFIQUES DES CALCULATRICES :

	TI 83	Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST BINM
$P(X=k)$	binomFdP(n , p , k)	BpD binomialPD(k , n , p)
$P(X \leqslant k)$	binomFRép(n , p , k)	BcD binomialCD(k , n , p)

ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
L'espérance de X est $E(X) = np$, l'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

EXEMPLE

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients choisissent l'option « Livraison Express ».
On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, interpréter le résultat.

   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(30;0{,}4)$ de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}4$.
   $$E(x) = 30 \times 0{,}4 = 12$$
   Sur un grand nombre de prélèvements de 30 bons on trouve en moyenne 12 bons de commande avec la mention « Livraison Express ».

2. Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, que 13 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».

$$P(X=13)=\binom{30}{13}\times 0{,}4^{13}\times 0{,}6^{17}\approx 0{,}136$$

La probabilité que 13 bons portent la mention « Livraison Express » est d'environ 0,136.

3. Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, qu'au moins 16 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».

$$P(X\geqslant 16)=1-P(X\leqslant 15)\approx 0{,}097$$

La probabilité qu'au moins 16 bons portent la mention « Livraison Express » est d'environ 0,097.

IV ÉCHANTILLONNAGE

On appelle échantillonnage, le prélèvement d'un échantillon de taille n au sein de la population.
On s'intéresse à un caractère de proportion p connue au sein d'une population.
Si l'échantillon est réalisé par prélèvement des éléments de manière aléatoire avec remise, alors le nombre d'éléments de l'échantillon possédant le caractère étudié suit une loi binomiale de paramètres n et p.

REMARQUE

En pratique, si l'effectif de la population est très grand par rapport à l'effectif n de l'échantillon on considère que le tirage des éléments de l'échantillon s'effectue avec remise.

1 INTERVALLE DE FLUCTUATION À 95 % D'UNE FRÉQUENCE CORRESPONDANT À UNE LOI BINOMIALE

L'intervalle de fluctuation à 95 % correspondant à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où :

— a est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$;

— b est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.

On a alors $P(a\leqslant X\leqslant b)\geqslant 0{,}95$.

EXEMPLE

On considère une population pour laquelle la proportion d'un caractère C est $p=0{,}28$.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille $n=100$. La variable aléatoire X associée au nombre d'individus ayant le caractère C au sein de l'échantillon, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100;0{,}28)$ de paramètres $n=100$ et $p=0{,}28$.
On a ci-dessous, un extrait du tableau des probabilités cumulées $P(X\leqslant k)$ de la loi binomiale $\mathscr{B}(100;0{,}28)$.

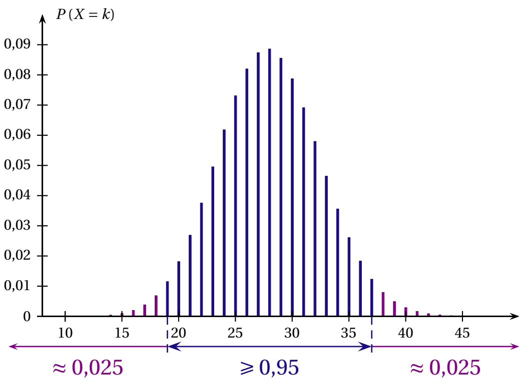
k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$
14	0,000 7	20	0,044	26	0,374 8	32	0,842	38	0,988 7
15	0,001 7	21	0,070 9	27	0,462 2	33	0,888 4	39	0,993 6
16	0,003 7	22	0,108 5	28	0,550 7	34	0,924	40	0,996 5
17	0,007 5	23	0,158	29	0,636 2	35	0,950 1	41	0,998 2
18	0,014 4	24	0,219 8	30	0,714 9	36	0,968 4	42	0,999 1
19	**0,025 9**	25	0,292 9	31	0,784	**37**	**0,980 7**	43	0,999 5

— Le plus petit entier a tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$ est $a=19$.

— Le plus petit entier b tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$ est $b=37$.

— On peut vérifier que $P(19\leqslant X\leqslant 37)=P(X\leqslant 37)-P(X\leqslant 18)\approx 0{,}9663\geqslant 0{,}95$

Loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}28$



L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence du nombre d'individus ayant le caractère C au sein d'un échantillon de taille 100 correspondant à la variable aléatoire est donc l'intervalle $\left[\frac{19}{100};\frac{37}{100}\right] = [0{,}19;0{,}37]$.
Cet intervalle est centré en 0,28 qui est la proportion du caractère C dans la population.

2 PRISE DE DÉCISION

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est p.
Pour valider cette hypothèse, on prélève au hasard dans la population un échantillon de taille n et on note f la fréquence observée du caractère étudié.
Si l'effectif de la population est suffisamment grand par rapport à l'effectif n de l'échantillon on considère que la variable aléatoire X associée au nombre d'éléments ayant le caractère étudié au sein de l'échantillon, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.
On détermine l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la variable aléatoire X qui permet de fixer le seuil de décision.

— Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, on accepte l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population au seuil de 95 %.

— Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.

EXEMPLE

Selon une publication de l'INSEE, 28 % des ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.

1. On interroge un échantillon de 100 ménages choisis au hasard, et on constate que dans cet échantillon 35 % des ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.
   Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

   L'intervalle de fluctuation à 95 % associé à la loi binomiale $\mathscr{B}(100;0{,}28)$ calculé précédemment est $I = [0{,}19;0{,}37]$.
   La fréquence observée des ménages comprenant une famille avec au moins un enfant mineur est $f = 0{,}35$. Donc f appartient à l'intervalle $[0{,}19;0{,}37]$.
   On considère que l'échantillon est représentatif de la population.

2. On interroge au hasard 300 ménages qui résident dans le même arrondissement d'une grande agglomération, et on constate également que 35 % de ces ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.
   Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

   On détermine l'intervalle de fluctuation à 95 % associé à la loi binomiale $\mathscr{B}(300;0{,}28)$.

— Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est $a = 69$.
— Le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est $b = 99$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence du nombre de ménages comprenant une famille avec au moins un enfant mineur dans un échantillon de taille 300 est donc l'intervalle $\left[\dfrac{69}{300};\dfrac{99}{300}\right] = [0{,}23;0{,}33]$.
La fréquence des ménages comprenant une famille avec au moins un enfant mineur est $f = 0{,}35$. Donc f n'appartient à l'intervalle $[0{,}23;0{,}33]$.
On considère que cet échantillon n'est pas représentatif de la population.