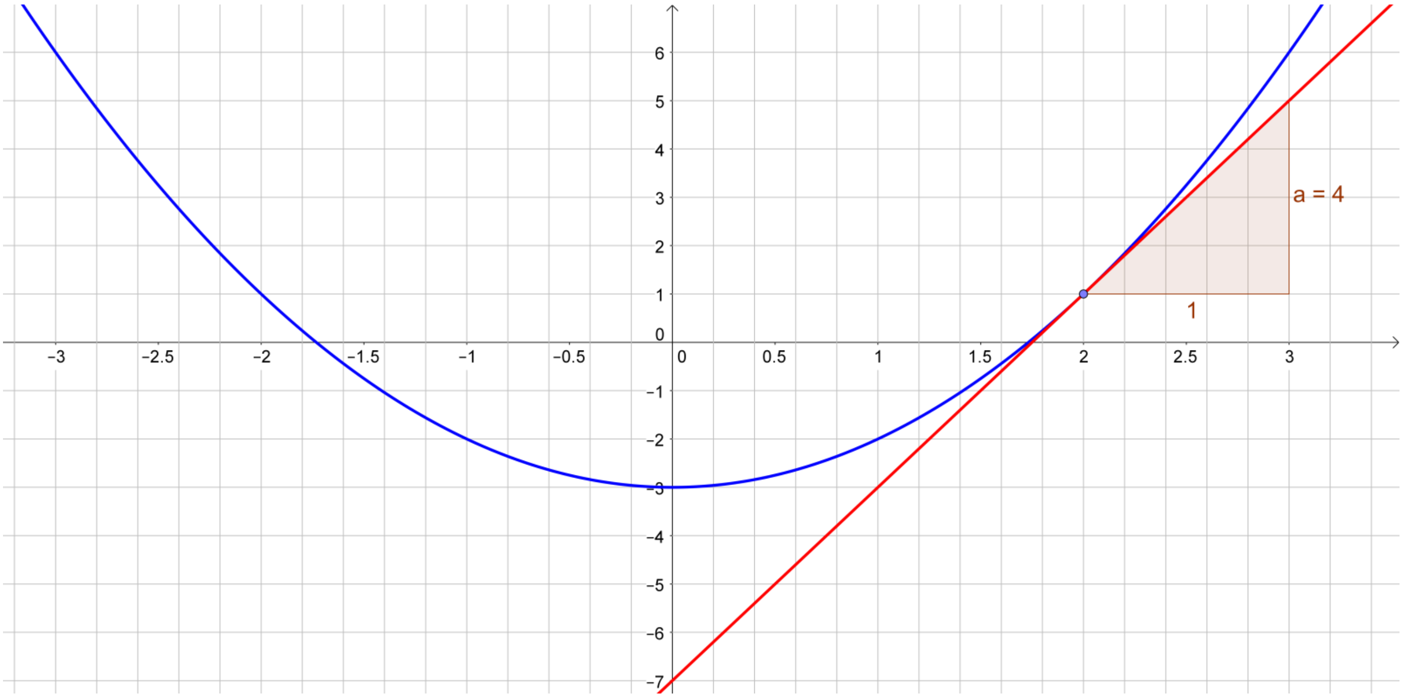
CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 1 : Les fonctions carrées mènent à des identités remarquables

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.



Equation de la tangente : $y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$

1) Calculer $f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

a) $$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\left[(2+h)^2 - 3\right] - 1}{h} = \frac{\left[4 + 4h + h^2 - 3\right] - 1}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 3 - 1}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

→ $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} h + 4 = 4$

b) $$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{x^2 - 3 - 1}{x-2} = \frac{x^2 - 4}{x-2} = \frac{x^2 - 2^2}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$$

→ $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$

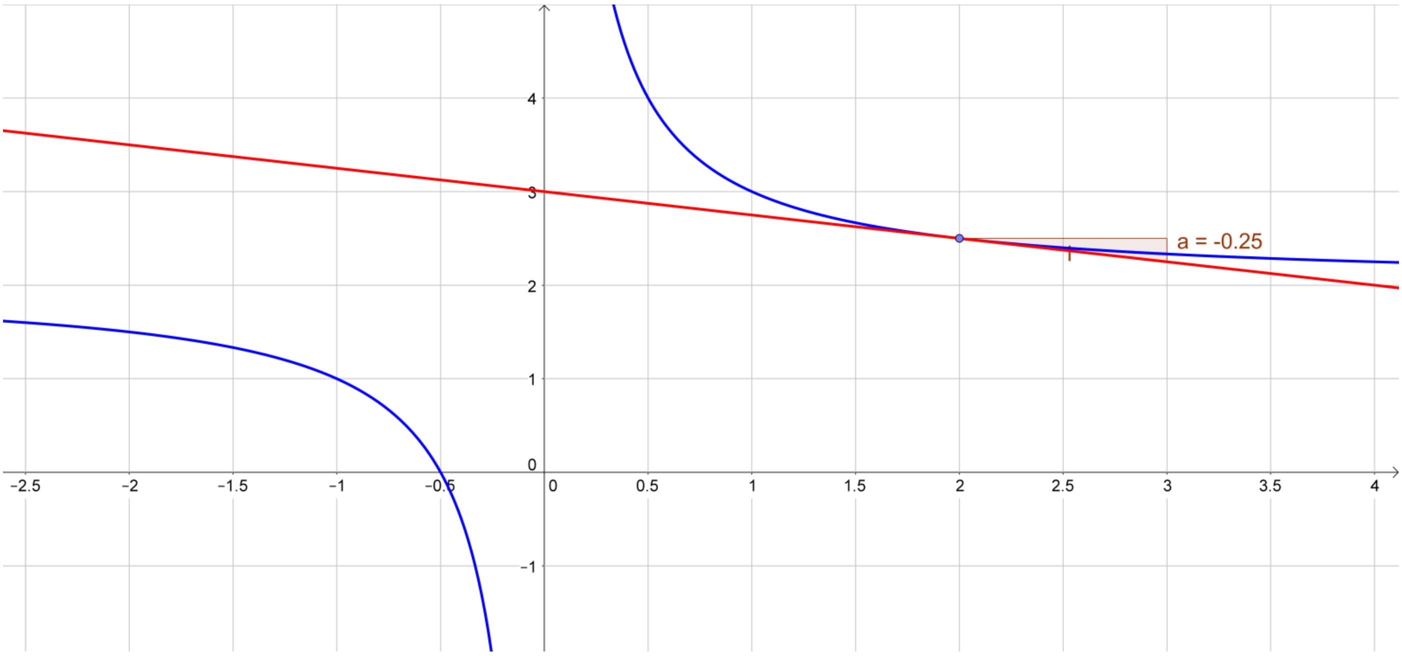
3) Formule de la tangente en $x = 2$:

$$T : y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 1 = 4x - 8 + 1 = 4x - 7$$

Exercice 2 : **Les fonctions inverses mènent à des identités remarquables**

Soit la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{x}+2$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction g au point d'abscisse $x=2$.



Equation de la tangente : $y=g'(2)\times(x-2)+g(2)$

1) Calculer $g(2)=\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

a) $$\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\frac{\left(\frac{1}{2+h}+2\right)-\frac{5}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}+\frac{4}{2}-\frac{5}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}\times\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{2+h}{2+h}}{h}$$

$$=\frac{\frac{2}{(2+h)\times 2}-\frac{2+h}{2\times(2+h)}}{h}=\frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h}=\frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{\frac{h}{1}}=\frac{-h}{2(2+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{2(2+h)}$$

$$\rightarrow g'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

b) $$\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{2}-\frac{5}{2}}{x-2}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\frac{\frac{1\times 2}{x\times 2}-\frac{1\times x}{2\times x}}{x-2}=\frac{\frac{2}{2x}-\frac{x}{2x}}{x-2}=\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\frac{2-x}{2x}\times\frac{1}{x-2}=\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}=\frac{-1}{2x}$$

$$\rightarrow g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{4}$$

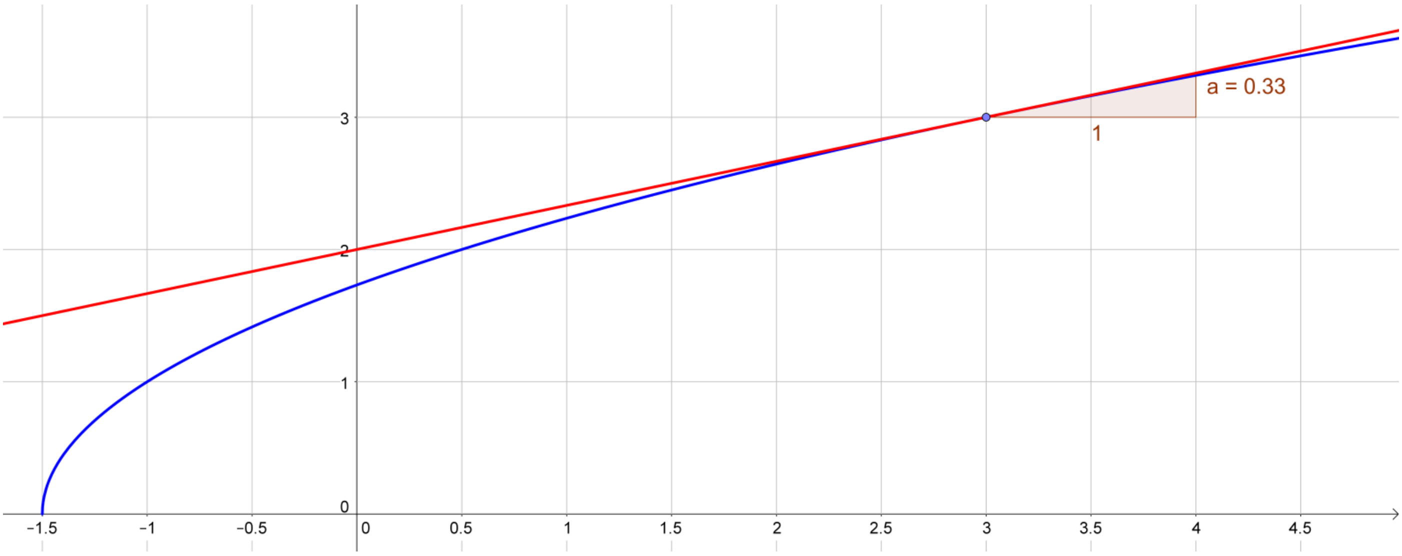
3) Formule de la tangente en $x=2$:

$$T: y=g'(2)(x-2)+g(2)=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{2}{2}=-\frac{1}{4}x+3$$

Exercice 3 : **Les fonctions avec racine carrée nécessitent la forme conjuguée**

Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x=3$.



1) Calculer $f(3)=\sqrt{2\times 3+3}=\sqrt{9}=3$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

a) $$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\sqrt{2\times(3+h)+3}-3}{h}=\frac{\sqrt{6+2h+3}-3}{h}=\frac{\sqrt{2h+9}-3}{h}\times\frac{\sqrt{2h+9}+3}{\sqrt{2h+9}+3}$$

$$=\frac{\sqrt{2h+9}-3}{h}\times\frac{\sqrt{2h+9}+3}{\sqrt{2h+9}+3}=\frac{\left(\sqrt{2h+9}\right)^2-3^2}{h\left(\sqrt{2h+9}+3\right)}=\frac{2h+9-9}{h\left(\sqrt{2h+9}+3\right)}=\frac{2h}{h\left(\sqrt{2h+9}+3\right)}=\frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$$

→ $$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

b) $$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}\times\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{\left(\sqrt{2x+3}\right)^2-3^2}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}$$

$$=\frac{2x+3-9}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2x-6}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}$$

→ $$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3) Formule de la tangente en $x=3$: $T: y=f'(3)(x-3)+f(3)=\frac{1}{3}(x-3)+3=\frac{1}{3}x-1+3=\frac{1}{3}x+2$