Devoir Surveillé n°2. Correction

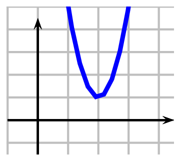
Première ES

Second degré

Durée 1 heure - Coeff. 4

Noté sur 20 points

Exercice 1. QCM — 2 points

		Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
1.	On sait que $\Delta < 0$ et $a > 0$ alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour allure				
2.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $x^2 - 1 = 3$ est				$\{-2\ ;\ 2\}$
3.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation $-x^2 + 5x - 4 < 0$	$]-\infty\ ;\ 1[\cup]4\ ;\ +\infty[$			
4.	Le sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 3$ est			$(-1\ ;\ 2)$	

Exercice 2. Bénéfice — 7 points

On considère la fonction B définie sur $[0; +\infty[$ *qui représente les bénéfices, exprimées en milliers d'euros, pour une production de x dizaines d'unités, dans une usine La Pomme :* $B(x) = \left(-2x^2 + 6x + 20\right)(4x + 3)$.

1. Étudier le signe de B sur $[0; +\infty[$ et résumer votre étude dans un tableau de signe.

B s'exprime comme un produit de deux facteur, l'un du second degré, l'autre du premier degré. Étudions le signe de chacun d'eux.

- Signe de $x \longmapsto -2x^2 + 6x + 20$.

  L'expression $\left(-2x^2 + 6x + 20\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 6 \\ c = 20 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 196 > 0$$

  Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-2x^2 + 6x + 20\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{-4} = 5 \in [0; +\infty[\quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{-4} = -2 \notin [0; +\infty[$$

  Le coefficient $a = -2$ étant négatif $\left(-2x^2 + 6x + 20\right)$ est positif entre les racines et négatif ailleurs. Donc sur $[0; +\infty[$, l'expression est positive entre 0 et 5 et négative ailleurs.

- Signe de $x \longmapsto (4x+3)$.
  Pas besoin d'étude de signe pour voir que si x est positif, alors $4x$ l'est aussi et donc $4x+3>0$.
- Résumons l'étude.

x	0		5		$+\infty$
signe de $-2x^2+6x+20$		$+$	0	$-$	
signe de $4x+3$		$+$		$+$	
signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	

2. En déduire la plage de production permettant de réaliser des bénéfices.

La plage de production permettant de réaliser des bénéfices est donc entre 0 et 5 (dizaines d'unités). Cela correspond à une production comprise entre 0 et 50 unités.

3. A l'aide de la calculatrice, élaborer une stratégie pour conjecturer le bénéfice maximal et la production associée.

Grâce à un tableau de valeurs, on peut calculer le bénéfice lié à chaque production. La variable x étant exprimée en dizaines, il suffit d'afficher les valeurs prises par la fonction B, entre 0 et 5, avec un pas de 0,1.

x	$B(x)$
2,8	299,90
2,9	300,468
3	300

Le bénéfice maximal est donc de 300,47 milliers d'euros soit 300 468 euros, pour une production de 2,9 dizaines soit 29 unités.

Exercice 3. Étude complète et application — 11 points

On considère la fonction f, définie sur $[0;7]$ par :

$$f(x) = -x^2+7x-6$$

1. Déterminer les racines de f sur $[0;7]$.

L'expression $\left(-1x^2+7x-6\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=7 \\ c=-6 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 25 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-1x^2+7x-6\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{25}}{-2} = 6 \in [0;7] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7+\sqrt{25}}{-2} = 1 \in [0;7]$$

2. En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.

$$f(x) = \underline{-(x-6)(x-1)}$$

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

Le coefficient $a=-1$ étant négatif $f(x)$ est positif entre les racines et négatif ailleurs. Donc sur $[0;7]$:

x	0		1		6		7
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[0; 7]$.

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \underline{x \in]1; 6[}$$

5. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 7]$ en faisant apparaitre les racines éventuelles dans le tableau.

L'expression $\left(-1x^2 + 7x - 6\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 7 \\ c = -6 \end{array}\right| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta & = (7)^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 > 0 \\ \alpha & = \dfrac{-7}{2 \times (-1)} = \dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

Le coefficient $a = -1$ étant négatif, la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{7}{2}; 7\right]$

x	0		$\frac{7}{2}$		7
Variations de f			$\frac{25}{4}$		
	-6	$\nearrow$		$\searrow$	-6

6. Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).

7. Application.

La fonction f représente en fait les bénéfices, exprimées en dizaines de milliers d'euros, pour une production de x milliers d'unités, dans une usine *Hamazonia*.
Déterminer la plage de production permettant de réaliser des bénéfices ainsi que le bénéfice maximal et la production associée.

- La plage de production permettant de réaliser des bénéfices correspond à l'intervalle où $f(x)$ est positif. D'après la question (3.) , cela correspond à une production comprise entre 1 et 6 milliers d'unités soit entre 1 000 et 6 000 unités.
- D'après la question (5.), le bénéfice maximal est de $\frac{25}{4}$ dizaines de milliers d'euros soit 62 500 euros, pour une production de $\frac{7}{2}$ milliers d'unités, soit 3 500 unités.

Fin du devoir

Annexe à rendre avec votre copie

Graphique de l'exercice 3