السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	مبادئ في المنطق حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : اكتب العبارات التالية مستعملا المكممين الكوني و الوجودي :

(A_1) : "مهما يكن العدد الموجب a و مهما يكن العدد السالب b فإن : $a+b$ سالب".

$A_1 : \quad \forall\ a \in IR^+\ \forall b \in IR^- \quad a+b \le 0$ أو أيضا $A_1 : \quad \forall\ (a,b) \in IR^+ \times IR^- \quad a+b \le 0$

(A_2) : "يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب x يكون مربعه أكبر من 34".

$A_2 : \quad \exists x \in IR^+ \quad x^2 > 34$

(A_3) : "يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد n مربعه أصغر من 78 و أكبر من 23".

$A_3 : \quad \exists! n \in IN \quad 23 < n^2 < 78$

(A_4) : "مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n فإنه يوجد على الأقل عدد صحيح طبيعي m مربعه n".

$A_4 : \quad \forall n \in IN \ \exists m \in IN \quad m^2 = n$

(A_5) : "يوجد عدد حقيقي a بحيث مهما يكن العدد الحقيقي x فإن : $x^2 \ge a$".

$A_5 : \quad \exists a \in IR\ \forall x \in IR \ \ x^2 \ge a$

(A_6) : "يوجد عدد حقيقي b و يوجد عدد حقيقي x يحققان : $b \le x$".

$A_6 : \quad \exists b \in IR\ \exists x \in IR \quad b \le x$ أو أيضا $A_6 : \quad \exists (b,x) \in IR^2 \quad b \le x$

تمرين 2 : اعط نفي العبارات التالية دون تحديد قيمة حقيقتها :

العبارة	نفيها
$\exists\ x \in IR^+ \quad x^3 = 8$	$\forall\ x \in IR^+ \quad x^3 \ne 8$
$\forall\ x > 0 \quad \frac{1}{x} + x \ge 2$	$\exists\ x > 0 \quad \frac{1}{x} + x < 2$
$\exists\ a > 0\ \exists\ b > 0 \quad 2ab = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	$\forall\ a > 0\ \forall\ b > 0 \quad 2ab \ne \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
$\forall\ x > 0 \quad \frac{1}{x} \ne 7$	$\exists\ x > 0 \quad \frac{1}{x} = 7$
$\exists\ y \in [1;4] \quad 5 < y \le 13$	$\forall\ y \in [1;4] \quad (y \le 5 \ \ ou\ \ y > 13)$
$\forall\ p \in IN\ \forall\ q \in IN^* \quad \frac{p}{q} \in Q$	$\exists\ p \in IN\ \exists\ q \in IN^* \quad \frac{p}{q} \notin Q$
$\exists p \in IN \ \left(p^2 = 5 \ \ ou\ \ p^2 > 10 \right)$	$\forall p \in IN \ \left(p^2 \ne 5 \ \ et\ \ p^2 \le 10 \right)$
$\forall\ x \in IR^* \quad \left(x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1 \right)$	$\exists\ x \in IR^* \quad \left(x + \frac{1}{x} = 2 \quad et \quad x \ne 1 \right)$
$\forall\ x \in IR \ \left(x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \right)$	$\exists\ x \in IR \ \left(x^2 = 0\ et\ x \ne 0 \right)\ ou\ \left(x = 0\ \ et\ \ x^2 \ne 0 \right)$

أثناء نفي عبارة رياضية يجب مراعاة القواعد التالية:

عند نفي أحد المكممين الكوني $\forall$ أو الوجودي $\exists$ لا ننفي العبارة المرتبطة به (مثلا نفي $\forall x \in IR$ هو $\exists x \in IR$ وليس $\exists x \notin IR$

لا ننفي الكتابات المختصرة إلا بعد إرجاعها لصيغتها الأصلية: مثلا نفي $1 < a < 2$ هي ($a \le 1$ أو $a \ge 2$) وليس $1 \ge a \ge 2$

لأن هذه الكتابة هي مجرد اختصار للكتابة ($a > 1$ و $a < 2$)

العبارة $p \Rightarrow q$ تكافئ $\neg p\ ou\ q$ لذلك نفيها هو $p\ \ et\ \neg q$

العبارة $p \Leftrightarrow q$ تكافئ $(p \Rightarrow q)\ et\ (q \Rightarrow p)$ لذلك نفيها هو $\neg(q \Rightarrow p)\ ou\ \neg(p \Rightarrow q)$ أي $(p\ et \neg q)\ ou\ (q\ et\ \neg p)$

تمرين 3 : حدد حقيقة العبارات التالية :

العبارة	حقيقتها	التعليل
$\exists\, x\in IR \quad x^2+1=0$	خاطئة	العبارة تعني وجود عدد حقيقي مربعه يساوي -1 و هذا غير ممكن لأن مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا
$\exists\, x\in IR \quad \exists\, y\in IR \quad x+y=0$	صحيحة	نأخذ مثلا : $x=7$ و $y=-7$
$\forall\, x\in IR \quad \sqrt{x^2}=x$	خاطئة	إذا أخذنا عددا سالبا مثل $-1\in IR$ فسنجد أن : $\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1\neq -1$
$\forall\, x\in IR \ \left(x^2+2x=-1 \Leftrightarrow x=-1\right)$	صحيحة	$x^2+2x=-1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0$ $\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
$\forall\, x\in IR \ \left(x^2=4 \Rightarrow x=2\right)$	خاطئة	إذا أخذنا العدد $-2\in IR$ فسنجد أن : $(-2)^2=4$ لكن مع ذلك $-2\neq 2$
$\forall\, x\in IR^+ \ \left(x^2=4 \Rightarrow x=2\right)$	صحيحة	هذه المرة العبارة صحيحة لكون مجموعة الانتماء هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، و هذا هو التعليل: $x^2=4 \Rightarrow x^2-2^2=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0$ $\Rightarrow x-2=0 \ \ ou\ \ x+2=0$ $\Rightarrow x=2 \ \ ou\ \ x=-2$ و لكون $x\in IR^+$ فإن الحالة $x=-2$ غير ممكنة
$\exists a\in IR \ \ \forall\, x\in IR \ \ x^2\geq a$	صحيحة	نأخذ $a=0$ فنجد أن العبارة تصبح $\forall\, x\in IR \ \ x^2\geq 0$ و التي نعلم أنها صحيحة، مما يؤكد وجود عدد حقيقي على الأقل يحقق العبارة
$\exists (a,b)\in IN^2 \ \ (2a+1)^{2015}=2014b$	خاطئة	نعلم أن $2014b=2\times(1007\, b)$ عدد زوجي و $(2a+1)^{2015}$ عدد فردي (لأنه عبارة عن قوة عدد فردي) إذن المتساوية الموجودة بالعبارة غير ممكنة

تحديد حقيقة عبارة رياضية أمر غير يسير ، يتطلب فهما و استيعاب العبارة جيدا قصد إيجاد التعليل المناسب(مثال مضاد...)

تمرين 4 : لتكن P و Q عبارتين.

P	Q	$(P$ و $Q)$	$(P$ و $Q)\Rightarrow P$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

P	Q	$\neg P$	$\neg P\Rightarrow Q$	$P\Rightarrow(\neg P\Rightarrow Q)$
F	F	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	V	V
V	V	F	V	V

بما أن العبارتان $(P$ و $Q)\Rightarrow P$ و $P\Rightarrow(\neg P\Rightarrow Q)$ صحيحتان مهما كانت حقيقة العبارتين P و Q فإنها قوانين منطقية.