أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:عموميات حول الدوال

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

1) $f(x)=2x^3+x+3$ (2 $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$

3) $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$

أجوبة: 1) $f(x)=2x^3+x+3$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\neq0\}$

$2x^2-x-1=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-1$ و $c=-1$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2}=\dfrac{1+3}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ و $x_2=\dfrac{1-3}{2\times2}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$

3) $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$ $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\geq0\}$

$x_1=1$ و $x_2=-\dfrac{1}{2}$: نحدد جدول الاشارة

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه : $D_h=\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

تمرين2: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

1) $f(x)=\dfrac{|x|(2x+1)}{x(2x^2+x-3)}$ (2 $g(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$

3) $h(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2|x|-1}$ (4 $A(x)=\dfrac{x^2-3}{4|x|+2}$ (5 $B(x)=\dfrac{x^2-3}{|x-1|-|x+1|}$

6) $C(x)=\sqrt{3-x^2}$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x(2x^2+x-3)\neq0\}$

$x(2x^2+x-3)=0\Leftrightarrow x=0$ أو $2x^2+x-3=0$

$2x^2+x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-3)=1+24=25=(5)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times2}=\dfrac{-1+5}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ و $x_2=\dfrac{-1-5}{2\times2}=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};0;1\right\}$

2) $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\neq0\}$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

3) $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-1\neq0\}$

$2|x|-1=0\Leftrightarrow|x|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ أو $x=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_h=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

4) $D_A=\{x\in\mathbb{R}/4|x|+2\neq0\}$

$4|x|+2=0\Leftrightarrow|x|=-\dfrac{1}{2}$

وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_A=\mathbb{R}$

5) $D_B=\{x\in\mathbb{R}/|x-1|-|x+1|\neq0\}$

$|x-1|-|x+1|=0\Leftrightarrow|x-1|=|x+1|$

ومنه: $\Leftrightarrow x-1=x+1$ أو $x-1=-(x+1)$

$x=0\Leftrightarrow-1=1$ أو $2x=0$

$D_B=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

6) $C(x)=\sqrt{3-x^2}$ $D_C=\{x\in\mathbb{R}/3-x^2\geq0\}$

$3-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3})^2-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}-x=0$ أو $\sqrt{3}+x=0\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه : $D_C=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f D_f
2. بين أن : $f(x)\leq1$ $\forall x\in\mathbb{R}$
3. بين أن : $0\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$
4. ماذا تستنتج ؟ماذا نقول عن الدالة f ؟

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq0$

اذن: $x^2+1\geq0+1$ يعني $x^2+1\geq1$

يعني $\forall x\in \mathbb{R}\ f(x)\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}\le 1$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

3) نعلم أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ x^2\ge 0$

اذن: $x^2+1\ge 0+1$ يعني $x^2+1\ge 1$

يعني $\forall x\in \mathbb{R}\ 0\le f(x)$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1-؟ نعم

4)نستنتج أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ 0\le f(x)\le 1$

اذن : f مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

<u>تمرين4:</u> حدد من بين الدوال f التالية الدوال المكبورة و المصغورة و المحدودة

1. $f(x)=|x|+6$ $\quad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=2\cos x+1$ $\quad I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=-x^4-4$ $\quad I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\sqrt{x}+6$ $\quad I=\mathbb{R}^+$
5. $f(x)=sinx-2$ $\quad I=\mathbb{R}$

<u>الأجوبة:</u> 1) نعلم أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ |x|\ge 0$

اذن: $|x|+6\ge 0+6$ يعني $|x|+6\ge 6$

أي $\forall x\in \mathbb{R}\ 6\le f(x)$

اذن f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 6

2) نعلم أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ -1\le \cos x\le 1$

اذن: $-2\le 2\cos x\le 2$ يعني $-2+1\le 2\cos x+1\le 2+1$

يعني $\forall x\in \mathbb{R}\ -1\le f(x)\le 3$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

3) نعلم أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ x^4\ge 0$ يعني $-x^4\le 0$ يعني $-x^4-4\le 0-4$

يعني $f(x)\le -4$ ومنه f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4-

4) نعلم أن : $\forall x\in \mathbb{R}^+\ \sqrt{x}\ge 0$ يعني $\sqrt{x}+6\ge 0+6$

يعني $6\le f(x)$ ومنه f مصغورة على $I=\mathbb{R}^+$ بالعدد 6

5) نعلم أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ -1\le \sin x\le 1$

اذن: $-1-2\le \sin x-2\le 1-2$ يعني $-3\le \sin x-2\le -1$

يعني $\forall x\in \mathbb{R}\ -3\le f(x)\le -1$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

<u>تمرين5:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

<u>الجواب :</u> يكفي أن نبين أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ 4\le f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$

ومنه : $\forall x\in \mathbb{R}\ 4\le f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

<u>تمرين6:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

<u>الجواب</u> : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ f(x)\le 3$

اذن نحسب الفرق : $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\ge 0$

ومنه : $\forall x\in \mathbb{R}\ f(x)\le 3$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

<u>تمرين7:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{5+4x^4}{x^4+1}$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

<u>الجواب :</u> يكفي أن نبين أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ 4\le f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-4=\frac{5+4x^4}{x^4+1}-4=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{1}{x^4+1}\ge 0$$

ومنه : $\forall x\in \mathbb{R}\ 4\le f(x)$

<u>تمرين8:</u> لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=-5x-\sqrt{x-1}$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 5− على $I=[1;+\infty[$

<u>الجواب :</u> يكفي أن نبين أن : $\forall x\in[1;+\infty[\ f(x)\le -5$

نعلم أن : $\forall x\in[1;+\infty[\ \sqrt{x-1}\ge 0$ يعني $-\sqrt{x-1}\le 0$ $\quad(1)$

ولدينا : $x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow x\ge 1\Leftrightarrow -5x\le -5$ $\quad(2)$

من : (1) و (2) نحصل على : $-\sqrt{x-1}-5x\le 0-5$

يعني $f(x)\le -5$ ومنه f مكبورة على $I=[1;+\infty[$ بالعدد 5-

<u>تمرين9:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.
3. بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.
4. مادا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

<u>الأجوبة:</u> 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\ne 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times 3\times 1=9-12=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ f(x)\le \frac{7}{3}$

اذن نحسب الفرق :

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7}{3}-\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}=\frac{7(x^2+3x+3)-3(2x^2+7x+7)}{x^2+3x+3}$$

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7x^2+21x+21-6x^2-21x-21}{x^2+3x+3}=\frac{x^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 وجدنا أن : $\Delta<0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $x^2\ge 0$ فان : $\frac{x^2}{x^2+3x+3}\ge 0$

ومنه : $\forall x\in \mathbb{R}\ f(x)\le \frac{7}{3}$ بالتالي : f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in \mathbb{R}\ 1\le f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}$$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 سبق أن وضحنا أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $(x+2)^2\ge 0$ فان : $\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}\ge 0$

ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\le f(x)$ بالتالي: الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

4)وجدنا أن : $1\le f(x)$ و $f(x)\le\frac{7}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\le f(x)\le\frac{7}{3}$ اي أن f محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\cos x$

قارن : $f(x)$ و $f(x+2\pi)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

الجواب $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)=\cos x=f(x)$

تمرين11: نعتبر الدوال f و g المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=\cos 6x$ و $g(x)=\sin 7x$

1. بين أن الدالة f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.
2. بين أن الدالة g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\frac{\pi}{3}\in\mathbb{R}$
- $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 6\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(6x+2\pi)=\cos 6x=f(x)$

ومنه f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.

2) $D_g=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\frac{2\pi}{7}\in\mathbb{R}$
- $g\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin 7\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin(7x+2\pi)=\sin 7x=g(x)$

g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

تمرين12: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+2$

1. أحسب : $f(0)$
2. بين أن : $f(0)\le f(x)$ على $\mathbb{R}$ وماذا تستنتج؟

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=2$

2) نعلم أن : $0\le x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $0+2\le x^2+2$ يعني $2\le x^2+2$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(0)\le f(x)$

أستنتج أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين13: تكن f دالة معرفة ب:. $f(x)=-2x^2+4x+1$

1) أحسب $f(1)$ و تأكد أن : $f(x)=-2\left((x-1)^2-\frac{3}{2}\right)$

2) تأكد أن : $f(x)\le f(1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

3) ماذا تستنتج؟

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(1)=3$

2) نعلم أن : $0\le(x-1)^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $0-\frac{3}{2}\le(x-1)^2-\frac{3}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le(x-1)^2-\frac{3}{2}$

يعني $(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)\ge(-2)\left((x-1)^2-\frac{3}{2}\right)$ يعني $f(x)\le 3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le f(1)$

3)أستنتج أن $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين14: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2+2x+3$.

بين أن : $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1)\le f(x)$

$f(-1)=2-2+3=3$

اذن نحسب الفرق :

$f(x)-f(-1)=2x^2+2x+1-3=2x^2+2x-2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times2=4-16=-12<0$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=2$ اذن : $2x^2+2x-2>0$

ومنه : $f(-1)\le f(x)$

وبالتالي: $f(-1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين15: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.
3. بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\ne 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(1)\le f(x)$

$$f(1)=\frac{1^2+1}{1^2+1+1}=\frac{2}{3}$$

$$f(x)-f(1)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}=\frac{3x^2+3-2(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)}=\frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

اذن : $f(x)-f(1)=\frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 وجدنا $\Delta<0$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=1$ أي : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x-1)^2\ge 0$ اذن : $f(x)-f(1)\ge 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(1)\le f(x)$

و بالتالي : $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le f(-1)$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1+1}=2$$

$$f(-1)-f(x)=2-\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{2(x^2+x+1)-(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}$$

إذن : $f(-1)-f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 سبق أن

بينا أن : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x+1)^2\geq 0$ إذن : $f(-1)-f(x)\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq f(-1)$

و بالتالي : $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

<u>تمرين16:</u> نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$ بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

<u>الجواب :</u> يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{1}{2}-x\sqrt{x^2+1}+x^2=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-2\sqrt{x^2+1}\times x+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{2}\geq 0$$

ومنه f مكبورة بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

<u>تمرين17:</u> لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين

على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2$

1. مثل الدالتين f و g في نفس المعلم

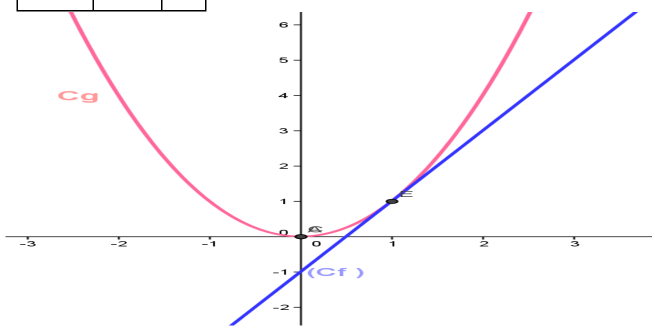
2. أدرس اشارة الفرق: $g(x)-f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

<u>الأجوبة:1)</u>

$D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهما دوال حدودية

x	-3	-2	-1	0	1	2	
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9

x	0	1
$f(x)$	-1	1



2) $g(x)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$ ومنه $g(x)\geq f(x)$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن : $g\geq f$

أستنتج مبيانيا أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على $\mathbb{R}$

<u>تمرين18:</u> لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x$ و $g(x)=x^2$

1. حدد D_f و D_g

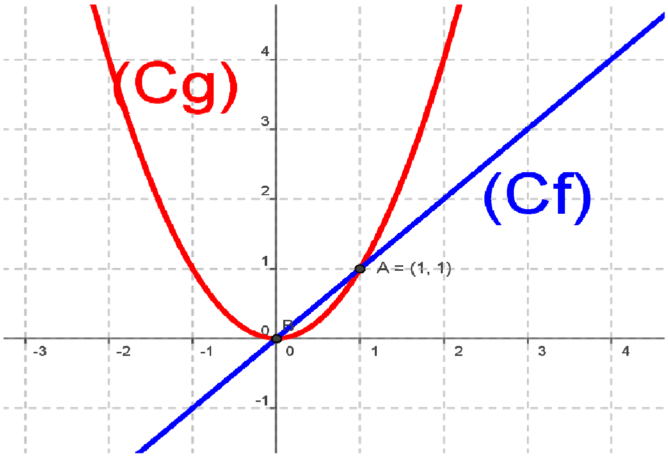
2. أرسم في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالتين f و g

3. قارن f و g

<u>الأجوبة:1)</u> $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهما دوال حدودية

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9

x	0	1
$f(x)$	1	1



(2 $g(x)-f(x)=x^2-x=x(x-1)$

ندرس اشارة $x(x-1)$: $x(x-1)=0$ يعني $x-1=0$ أو $x=0$

نرسم جدول الاشارة :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	−	0	+	

<u>الحالة 1</u>:اذاكانت $x\in\,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على $]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$

<u>الحالة2</u>:اذاكانت $x\in[0,1]$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة g يوجد تحت منحنى الدالة f على $[0,1]$.

<u>تمرين19:</u> قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي :

$g(x)=4x-1$ و $f(x)=4x^2$

واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

<u>الجواب :</u> $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهما دوال حدودية

$f(x)-g(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$

ومنه : $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\mathbb{R}$.

<u>تمرين20:</u> أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

حيث $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$ و $g(x)=x$

<u>الجواب :</u> $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x+\dfrac{1}{x+1}-x=\dfrac{1}{x+1}$

ندرس اشارة $x+1$:

<u>الحالة 1</u>:اذاكانت $x>-1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-1;+\infty[$.

<u>الحالة2</u>:اذاكانت $x<-1$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $]-\infty;-1[$.

<u>تمرين21:</u> نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$f(x)=x^2-3x+5$ و $g(x)=-x^2+2x+2$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$$f(x)-g(x)=x^2-3x+5-(-x^2+2x+2)=2x^2-5x+3$$

ندرس اشارة $2x^2-5x+3$:

$a=2$ و $b=-5$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=25-24=1>0$$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان لهذه الحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{5+1}{2\times2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{5-1}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$

x	$-\infty$		1		$3/2$		$+\infty$
$2x2-5x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الحالة 1:اذاكانت $x\geq 3/2$ أو $x\leq 1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-\infty,1]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$.

الحالة2:اذاكانت $1\leq x\leq\frac{3}{2}$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

تمرين22: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x+1$ و $g(x)=x^2$

حدد : $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ و

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ماذا تلاحظ ؟

الجواب: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$

نلاحظ: $g\circ f\neq f\circ g$

تمرين23:لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=-x+1$ و $g(x)=x^3-x$ حدد $(g\circ f)(x)$

الجواب: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+1)=(-x+1)^3-(-x+1)$

$(g\circ f)(x)=(1-x)^3-(-x+1)=1^3-3\times1\times x+3\times1\times x^2-x^3+x-1$

$(g\circ f)(x)=1^3-3x+3x^2-x^3+x-1=-x^3+3x^2-2x$

تمرين24:لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\}=[0,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f$ و $f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}$ و $f(x)\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}$ و $x+1\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq-1\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq0\}$

$D_{g\circ f}=[-1;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)=\sqrt{x-1}$

تمرين25:لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$

و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq-1\}=[-1,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f$ و $f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}$ و $f(x)\in[1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\in[-1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq2\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\geq-1\}$

$D_{g\circ f}=[2;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)=\sqrt{x-3+1}=\sqrt{x-2}$

تمرين26: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=4x-3$ و $g(x)=-3x+2$

أدرس رتابة f و g

أجوبة : 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن : $4x_1<4x_2$ اذن : $4x_1-3<4x_2-3$

اذن : $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

2) $D_g=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن : $-3x_1>-3x_2$ اذن : $-3x_1+2>-3x_2+2$ اذن :

$g(x_1)>g(x_2)$

ومنه الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

تمرين27:لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1)حدد D_f

2) أدرس رتابة f على كل من المجالين : $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

3)حدد جدول تغيرات

أجوبة : 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن : $x_1\in[0;+\infty[$ و $x_2\in[0;+\infty[$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^2<x_2^2$ ومنه $2x_1^2<2x_2^2$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن : $x_1\in]-\infty;0]$ و $x_2\in]-\infty;0]$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^2>x_2^2$ ومنه $2x_1^2>2x_2^2$ أي $f(x_1)>f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;0]$

3)حدد جدول تغيرات الدالة f .

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien

تمرين28: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أدرس رتابة الدالة f على D_f وحدد جدول تغيرات f

3) أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

2) ليكن : $x_1\in[-2;+\infty[$ و $x_2\in[-2;+\infty[$ بحيث $x_1<x_2$

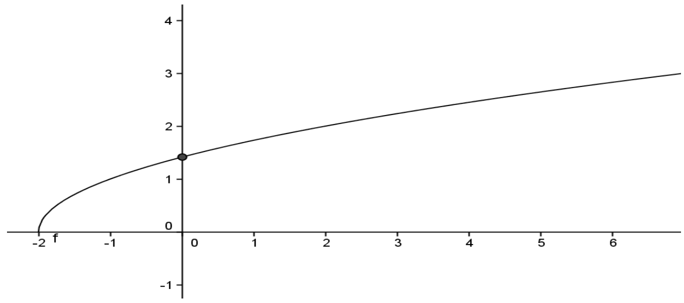
اذن: $x_1+2<x_2+2$ ومنه $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2;+\infty[$

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

3)

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



تمرين29: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) بين أن الدالة f تناقصية قطعا على D_f و حدد جدول تغيرات f

3) أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب : 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^3<x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}\times x_1^3<\frac{1}{4}\times x_2^3$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

3)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5