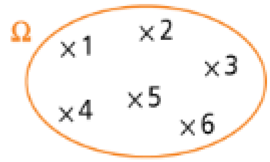
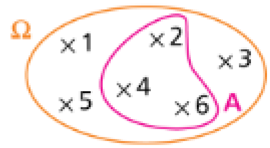
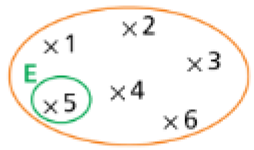
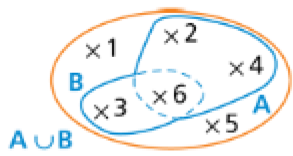
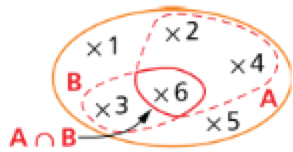
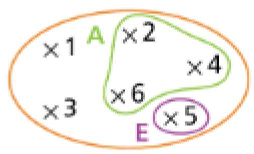
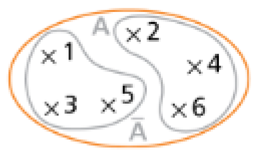
§ 6 Probabilités : Variable aléatoire

Livre p 291-314

A - <u>GENERALITES SUR LES PROBABILITES</u>

1 Vocabulaire des événements

Définition	Exemple	Représentation ensembliste
L'**univers** Ω est l'ensemble des issues (ou résultats possibles, ou éventualités) de l'expérience aléatoire.	On lance au hasard un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'univers est donc $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$	
Un **événement** A est une partie ou sous-ensemble de l'univers .	{2 ; 4 ; 6} est l'événement A : « *Obtenir un résultat pair.* »	
Un **événement élémentaire** est un ensemble contenant une seule issue de l'expérience.	{5} est l'événement élémentaire E : « *Obtenir un cinq.* »	
Un événement certain contient toutes les issues. C'est donc Ω.	« *Obtenir un résultat positif.* »	
Un événement impossible ne contient aucune issue.	« *Obtenir un résultat supérieur à 10.* »	C'est l'ensemble vide, noté ∅.
Une **réunion d'événements A ∪ B** est formée de toutes les issues qui sont au moins dans l'un des deux événements A **ou** B.	Si B est l'événement : « *Obtenir un multiple de 3* », alors {2 ; 3 ; 4 ; 6} est l'événement A ∪ B.	
Une **intersection d'événements A ∩ B** est formée de toutes les issues qui sont à la fois dans A **et** dans B.	{6} est l'événement A ∩ B : « *Obtenir un résultat pair et multiple de 3.* »	
Deux événements A et B sont **incompatibles** ou **disjoints** s'ils n'ont aucune issue commune. A ∩ B = ∅.	A et E sont disjoints.	
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ est formé de toutes les issues qui ne sont pas dans A ; $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.	{1 ; 3 ; 5} est l'événement $\overline{A}$: « *Obtenir un résultat impair.* »	

2 Loi de probabilité

On considère $\Omega = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$, l'univers d'une expérience aléatoire.

Définition 1

Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque éventualité e_i un nombre p_i compris entre 0 et 1 tel que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
Ce nombre p_i est appelé **probabilité de l'éventualité e_i.**

REMARQUE : Dans la réalité, on recherche une loi qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque éventualité.

EXEMPLE : Il y a 51,4 % d'habitants de la région Ile-de-France de sexe féminin (source I.N.S.E.E.). Si on considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard un habitant d'Ile-de-France et à noter son sexe, l'univers est $\Omega = \{\text{féminin, masculin}\}$ et la loi de probabilité associée est donnée par le tableau ci-contre.

Éventualité	Féminin	Masculin
Probabilité	0,514	0,486

Définition 2

La loi de probabilité sur un univers Ω est la **loi d'équiprobabilité** lorsque toutes les éventualités ont la même probabilité. Dans ce cas, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$.

EXEMPLE : On lance deux pièces de monnaie et on note P pour pile et F pour face.
Si on choisit l'univers $\Omega = \{(P ; F) ; (P ; P) ; (F ; P) ; (F ; F)\}$ (on induit un ordre en considérant la première pièce puis la seconde), les quatre éventualités sont équiprobables et ont pour probabilité $\frac{1}{4}$; $\Omega = \{\{P ; F\} ; \{P ; P\} ; \{F ; F\}\}$ (ici il n'y a pas d'ordre), les trois éventualités ne sont pas équiprobables.

Définition 3

La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des éventualités qui réalisent A.

REMARQUE : $p(\varnothing) = 0$, car aucune éventualité ne réalise $\varnothing$ et $p(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Propriété 1

Dans le cas de l'équiprobabilité : $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éventualités qui réalisent A}}{\text{nombre d'éventualités de l'univers}}$.

Propriété 2

- Probabilité de la **réunion** : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Dans le cas où A et B sont **incompatibles**, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

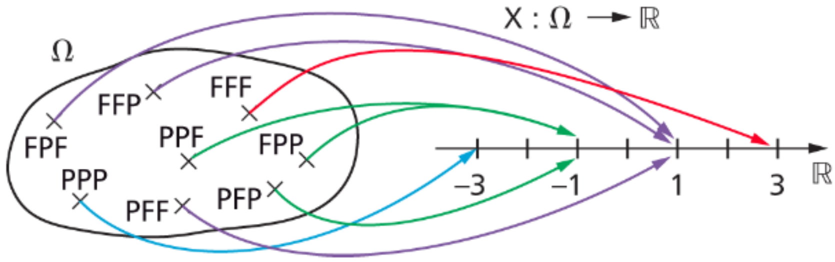
- Probabilité de l'**événement contraire** : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

EXEMPLE : On lance deux pièces de monnaie. Pour calculer la probabilité de l'événement A : « Obtenir au moins une fois face », on peut considérer $\overline{A}$: « Obtenir deux fois pile » de probabilité $\frac{1}{4}$, ainsi $p(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

B - VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES FINIES

1 Définition

Exemple : On lance trois fois de suite une pièce bien équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F). On choisit comme univers de l'expérience $\Omega = \{(F ; F ; F) ; (P ; F ; F) ; (F ; P ; F) ; (F ; F ; P) ; (F ; P ; P) ; (P ; F ; P) ; (P ; P ; F) ; (P ; P ; P)\}$. On définit alors le jeu qui consiste à gagner 1 € à chaque fois que face apparaît et à perdre 1 € à chaque fois que pile apparaît. Nous pouvons ainsi associer à chaque résultat de l'univers un nombre réel égal au gain relatif (positif ou négatif).
Au résultat FFF est associé 3 €, au résultat FFP est associé 1€, etc. Cette « association » est une variable aléatoire.



Définition 4

Lorsque l'on associe à chaque éventualité d'un univers Ω d'une expérience aléatoire un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire** sur Ω.

Remarques : • L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X se note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_m\}$.
• L'événement « X prend la valeur x_i » se note $(X = x_i)$.

Exemple : Appelons X la variable aléatoire définie précédemment. À chacune des **huit** éventualités de Ω est associé l'un des **quatre** gains : $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ ou $x_4 = 3$, donc $X(\Omega) = \{-3 ; -1 ; 1 ; 3\}$. L'événement $(X = 1)$ est $\{(F ; F ; P) ; (F ; P ; F) ; (P ; F ; F)\}$.

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 5

La **loi de probabilité d'une variable aléatoire X** est la fonction qui à chaque valeur x_i prise par X associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

Remarque : La loi de probabilité de X est donc une fonction dont l'ensemble de départ est $X(\Omega)$ et à valeurs dans l'intervalle [0 ; 1].

• On a toujours $\sum_{i=1}^{m} p(X = x_i) = 1$;

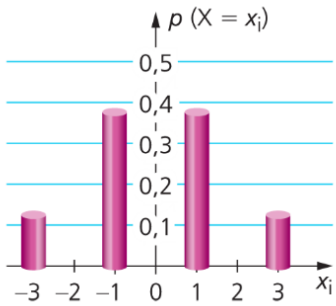
• La loi de probabilité de X s'appelle aussi « distribution de probabilité » qui signifie bien de quelle façon la probabilité totale 1 est « distribuée » entre les différentes valeurs possibles de X.

Exemple : D'après la formule de l'équiprobabilité, la probabilité de l'événement $(X = 1)$ est $p(X = 1) = \frac{3}{8}$. On calcule de même les trois autres probabilités et la loi de probabilité de X est donnée par son tableau de valeurs :

Valeur x_i prise par X	-3	-1	1	3
Probabilité $p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

On peut représenter la loi de probabilité de X par le diagramme en bâtons ci-contre.

Loi de X



C - ESPERANCE, VARIANCE ET ECART TYPE

1 Comment les calculer ?

On considère une **variable aléatoire X discrète finie** et on note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_m\}$.

Définition 6

- On appelle **espérance mathématique** de X le nombre réel $E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(X = x_i)$.
- On appelle **variance** de X le nombre réel $V(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$.
- On appelle **écart type** de X le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques : • L'espérance et la variance sont la moyenne et la variance des valeurs x_i prises par X et pondérées par les probabilités p_i.
• On peut montrer que $E(aX + b) = aE(X) + b$ et que $V(aX) = a^2\, V(X)$ avec a et b réels.

Propriété 3

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \times p(X = x_i) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

2 Comment les interpréter ?

• On reprend la variable aléatoire définie en B (voir p. xxx), on obtient :

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{8} - 1 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 0.$$

Cette valeur représente le **gain moyen** que peut espérer le joueur lors d'un **grand nombre** de parties (d'où la terminologie « espérance »).

Remarque : Si ce gain moyen est nul, on dit que le jeu est équitable. Si ce gain moyen est positif, on dit que le jeu est favorable au joueur sinon le jeu est dit défavorable au joueur.

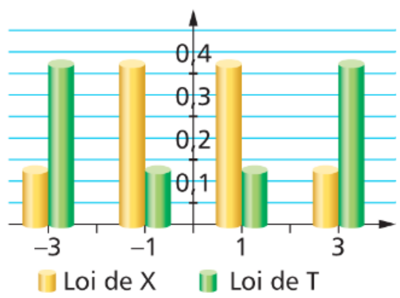
• On définit une nouvelle règle du jeu de variable aléatoire T dont la loi de probabilité est :

Valeur t_i prise par T	-3	-1	1	3
Probabilité $p(T = t_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

et pour laquelle $E(T) = -3 \times \frac{3}{8} - 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} = 0$.

Les **espérances** de X et T sont **égales** mais leurs **lois** sont très **différentes** comme on peut le voir sur le graphique ci-contre.

La loi de T est plus **dispersée** que la loi de X, ce que confirment les valeurs des variances.



$$V(X) = (-3)^2 \times \frac{1}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3,$$

de même $V(T) = 7$.

$\sigma(X) = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ et $\sigma(T) = \sqrt{7} \approx 2{,}6$.

Propriété 4

Plus l'écart type est **grand** et plus la variable aléatoire est **dispersée.**