§ SUITES

Livre p 117-140

A - GENERALITES SUR LES SUITES

1 Notion de suite

Définition 1

Une **suite** numérique est une liste infinie de nombres réels, numérotés généralement avec les indices entiers naturels consécutifs 0, 1, 2…
À chaque **rang n** (entier naturel) est associé un réel de la liste, u_n, appelé **terme** de la suite.

Attention : *ne pas confondre le terme général u_n et la suite (u_n).*

REMARQUES : • Toute la suite de termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; … ; u_{n-1} ; u_n ; u_{n+1} ; … se note globalement u ou (u_n).
• Le réel u_n est appelé **terme général** de la suite.

EXEMPLE : Soit la suite u : 1 ; 2 ; 6 ; 24 ; 120 ; … . Le 1er terme de rang 0, noté u_0, est égal à 1, de même le 2e terme de rang 1, noté u_1, est égal à 2, etc.
Le terme général est donné par $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n+1)$.
Si on commence au rang $n = 1$, alors $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 6$, $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Définition 2

Une **suite** (u_n) est une **fonction définie sur** $\mathbb{N}$ (ou à partir d'un rang n_0) qui, à chaque entier naturel n de $\mathbb{N}$ (ou pour $n \geqslant n_0$), associe un réel noté u_n.

Notation : *l'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.*

2 Formule explicite : u_n en fonction de n

Une suite (u_n) peut être définie par une **formule explicite** permettant d'exprimer directement u_n en fonction de n.

EXEMPLES : • **(1)** La suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, est telle que $u_n = f(n)$ où f est la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $u_0 = f(0) = 0$, $u_3 = f(3) = \dfrac{3}{4}$, etc.

• La suite (v_n) telle que $v_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x-4}$, n'est définie que si $n \geqslant 4$. On dit que la suite (v_n) est définie **à partir du rang 4** et cette suite se note $(v_n)_{n \geqslant 4}$. Les trois premiers termes sont $v_4 = f(4) = 0$, $v_5 = f(5) = 1$ et $v_6 = f(6) \approx 1{,}414$.

3 Relation de récurrence : u_{n+1} en fonction de u_n

• Une suite (u_n) peut être construite à partir d'un terme donné (en général le 1[er] terme) et d'une **relation de récurrence** permettant d'exprimer u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.

Exemple : (2) Si on pose $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$. $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = f(u_1) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$; $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Remarques : • Les suites définies dans les exemples **(1)** et **(2)** sont différentes alors qu'elles sont fabriquées avec la même fonction f.
• La suite de l'exemple **(2)** serait différente si on modifiait la valeur de u_0.
• On peut définir une suite par d'autres relations de récurrences ou par d'autres méthodes.

B - SUITES ARITHMETIQUES

1 Définition

Définition 3

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
La constante réelle r s'appelle **la raison** de la suite (u_n).

$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3$; … ; $u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$; …

Remarque : Une suite arithmétique peut être définie de manière unique par son 1[er] terme u_0 et sa raison r (qui donne la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n). Cette définition par récurrence impose cependant de connaître **tous les termes précédents** pour calculer un terme.

Exemple : La suite (u_n) : -10 ; -6 ; -2 ; 2 ; … est la suite arithmétique de 1[er] terme $u_0 = -10$ et de raison $r = 4$. On peut la définir par : $u_0 = -10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 4$.

2 Formule explicite u_n en fonction de n

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1[er] terme u_0 et de raison r.
• Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.
• Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$.

u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; … ; u_p ; … ; u_n ; …

$+r$, $+2r$, $+3r$, $+pr$, $+nr$, $+(n-p)r$

Exemple : Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = -10 + 4n$; ainsi, $u_{10} = -10 + 4 \times 10 = 30$.
On a aussi $u_n = u_3 + (n-3)r = 2 + (n-3) \times 4 = -10 + 4n$; ou encore $u_{10} = u_3 + 7r = 2 + 7 \times 4 = 30$.

Remarque : (u_n) est **arithmétique** lorsque $u_n = f(n)$ où f est une **fonction affine**.

3 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 2

La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique est telle que :
$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Remarque : Dans le cas particulier des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique, on a :
$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$

Exemple : Pour tout entier naturel n, on a $\sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démontrer que $\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

On pose $S = \sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$. ①

On a aussi $S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$. ②

En ajoutant ① et ② membre à membre, et en groupant deux par deux, on a :

$$2S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1).$$

On reconnaît n fois le terme $(n + 1)$, donc $2S = n(n + 1)$ et, ainsi $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Commentaires

Le principe de cette démonstration peut être utilisé pour démontrer le cas plus général de la propriété 2.

C - SUITES GEOMETRIQUES

1 Définition

Définition 4

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q\, u_n}$.
La constante q non nulle s'appelle la **raison** de la suite (u_n).

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \; ; \ldots ; \; u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \; ; \ldots$$

Remarque : Une suite géométrique peut être définie de manière unique par son 1er terme u_0 et sa raison q (qui donne la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n). Cette définition impose cependant de connaître **tous les termes précédents** pour calculer un terme.

Exemple : La suite $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{4}$; 1 ; 4 ; … est la suite géométrique de 1er terme $u_0 = \frac{1}{16}$ et de raison $q = 4$.

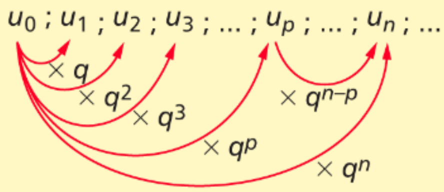
On peut la définir par $u_0 = \frac{1}{16}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4\, u_n$.

2 Formule explicite u_n en fonction de n

Propriété 3

Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.

- Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.
- Plus généralement, pour tous entier naturel n et p, $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.



EXEMPLES : Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = \frac{1}{16} \times 4^n = \frac{1}{4^2} \times 4^n = 4^{n-2}$; ainsi, $u_{10} = 4^8 = 65\,536$. On a aussi, par exemple, $u_n = u_3 \times q^{n-3} = 4 \times 4^{n-3} = 4^{n-2}$.

3 Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 4

Soit q un nombre réel avec $q \neq 0$ et $q \neq 1$. La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est telle que : $S = (1^{\text{er}}\ \text{terme}) \times \left[\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\right]$.

REMARQUE : Dans le cas particulier des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Démontrer que $\sum_{i=0}^{i=n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, avec $q \neq 1$

On a n un entier naturel et q un réel différent de 1.

On pose $S = \sum_{i=0}^{i=n} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. ①

On a alors $q\,S = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$. ②

En retranchant ② de ① membre à membre, on a :

$S - q\,S = 1 - q^{n+1}$, donc $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$.

Or $q \neq 1$ donc $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Commentaires

Le principe de cette démonstration peut être utilisé pour démontrer le cas plus général de la propriété 4.