

# Contrôle de mathématiques

Mercredi 31 mai 2017

## EXERCICE 1

### Tireurs à l'arc

(3 points)

Pour une compétition internationale, le sélectionneur doit choisir entre deux tireurs à l'arc dont les performances sont définies par les lois de probabilités ci-dessous.

À chaque tir dans la cible, on associe un nombre de points. Plus la flèche est proche du centre de la cible, plus le nombre de points est élevé.

On note  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires donnant le nombre de points obtenus à chaque tir respectivement par le tireur A et le tireur B.

Tireur A	1	2	3	4	5	10
probabilité	0,16	0,15	0,20	0,25	0,18	0,06

Tireur B	1	2	3	4	5	10
probabilité	0,03	0,1	0,51	0,21	0,11	0,04

- 1) Calculer l'espérance et l'écart type de chacune des deux variables aléatoires.
- 2) Compte tenu de ces informations, quel tireur va choisir le sélectionneur ? Pourquoi ?

## EXERCICE 2

### Problème de boules et d'urne.

(6 points)

Une urne contient une boule rouge et  $n$  boules blanches.

On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

- 1) Exprimer en fonction de  $n$  la probabilité des événements suivants :

M : « Les deux boules sont de la même couleur »

N : « Les deux boules sont de couleur différente »

On pourra éventuellement s'aider d'un arbre pondéré.

- 2) On considère le jeu suivant :

- le joueur perd  $(n + 1)^2$  € si M est réalisé ;
- et gagne  $2(n + 1)^2$  € sinon.

On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- b) Démontrer que  $E(X) = -n^2 + 4n - 1$ .
- c) Pour quelles valeurs de  $n$  le jeu est favorable au joueur ?
- d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?

## EXERCICE 3

### Bénéfice et coût de fabrication

(6 points)

Le coût de production d'un objet est de 950 €.

Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou bien en même temps le défaut A et le défaut B.

La garantie permet de faire des réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants : 100 € pour le défaut A et 150 € pour le défaut B.

On admet que 90 % des objets produits n'ont aucun défaut, 5 % ont au moins le défaut A, et 4 % ont les deux défauts A et B.

- 1) On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . On pourra éventuellement s'aider d'un tableau double entrée.
- 2) Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de cette variable aléatoire. Que représente  $E(X)$  pour l'usine ?
- 3) On admet que tous les objets produits sont vendus.
  - a) L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 € chaque objet vendu ?
  - b) L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 € par objet. Expliquer comment doit-on alors choisir le prix de vente de l'objet produit.

#### EXERCICE 4

**Pile ou face**

**(3 points)**

*Les résultats seront donnés à  $10^{-3}$  près.*

On lance 7 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On appelle  $X$  le nombre de fois où l'on a obtenu "pile".

- 1) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire  $X$ . On se justifiera.
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois "pile" ?
- 3) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 fois "pile" ?

#### EXERCICE 5

**Un professeur très âgé**

**(3 points)**

*Les résultats seront donnés à  $10^{-4}$  près.*

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles.

À chaque cours de mathématiques, le professeur, très âgé, interroge au hasard un élève, sans jamais se rappeler quels élèves il a précédemment interrogés. Soit  $n$  un entier naturel. On appelle  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées au cours de  $n$  séances consécutives.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ? Justifier.
- 2) a) Quelle est la probabilité que, sur 10 cours consécutifs, soient interrogées exactement quatre filles ?
  - b) Quelle est la probabilité que, sur 10 cours consécutifs, soient interrogées au moins quatre filles ?
  - c) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?