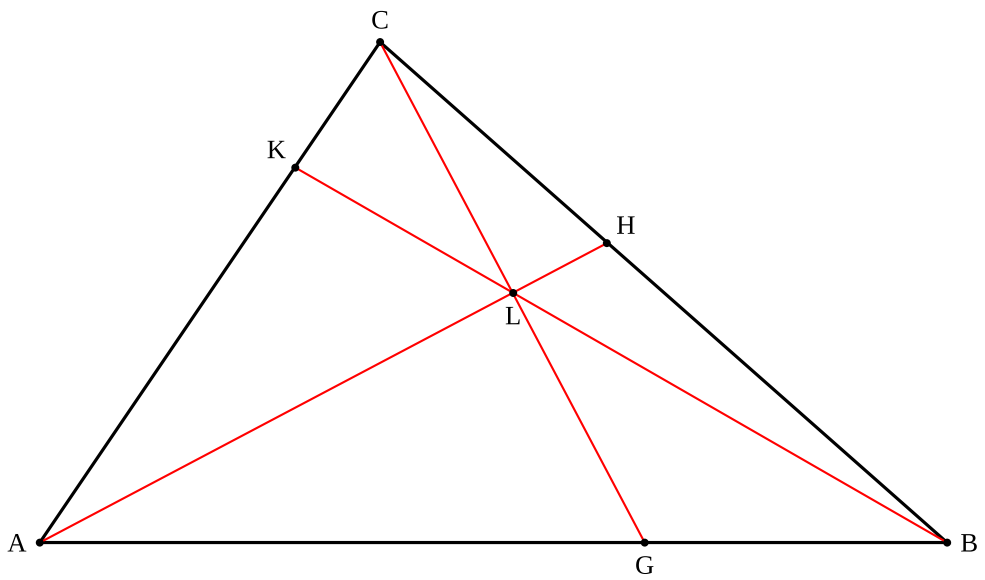
Correction contrôle de mathématiques

du mercredi 15 mars 2017

Exercice 1

Alignements **(5 points)**

1) On obtient la figure suivante :



a) En utilisant la relation de Chasles et les définitions de L et G, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CL} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL}\\ &= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}\\ &= -\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{CL}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$, L est donc le milieu de [GC]

b) En utilisant la relation de Chasles et les définitions de H et L, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On a alors $5\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 6\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 6\overrightarrow{AL}$

On a donc : $\overrightarrow{AH} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AL}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires et donc les points A, L et H sont alignés.

Le point L est alors l'intersection de (CG) et (AH).

c) En utilisant la relation de Chasles et les définitions de K et L, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}\\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KB} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\\ &= 3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

On a : $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont colinéaires et donc les points K, L et B sont alignés. L appartient à la droite (KB).

d) Les droites (GC), (HA) et (KB) sont concourantes en L

Exercice 2

Avec un repère **(3 points)**

1) $B(1\,;\,0)$, $C(2\,;\,0)$, $E(3\,;\,1)$ et $I\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

2) $\overrightarrow{BJ} = x\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = x\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AH}$.

Les coordonnées de J sont donc $(1\,;\,x)$.

3) $\det\left(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AE}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 3\\ x & 1\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

4) $\det\left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CI}\right) = \begin{vmatrix}1-2 & \frac{1}{2}-2\\ x-0 & \frac{1}{2}-0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} = 0$

$\det\left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CI}\right) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires et donc les points C, I et J sont alignés.

Exercice 3

Droites **(5 points)**

1) Les droite D_m possède une équation réduite si le coefficient devant y est non nul soit pout $m \neq \frac{1}{2}$

2) La droite D_m est parallèle à la droite Δ ssi un vecteur directeur $\vec{u}(-2m+1\,;\,m)$ de D_m est colinéaire à un vecteur directeur $\vec{v}(-4\,;\,3)$ de Δ.

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-2m+1 & -4\\ m & 3\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6m+3+4m = 0 \Leftrightarrow -2m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

3) La droite D_m est parallèle à l'un des axes du repère ssi l'un des coefficients devant x ou y est nul. On trouve alors :

- $D_m//(Ox) \Leftrightarrow m = 0$
- $D_m//(Oy) \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

4) $D_1 : x + y + 4 = 0$ et $D_2 : 2x + 3y + 4 = 0$.

$I = D_1 \cap D_2 \; \begin{cases} x + y = -4 & \times(-2)\\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = -4 \\ \hline y = 4 \end{array}$$

On remplace $y = 4$ dans la première équation

$x + 4 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -8$

On trouve alors $\mathrm{I}(-8\,;\,4)$

5) Si les droites D_m sont concourantes, elles sont concourantes en I point d'intersection de D_1 et D_2.
Vérifions que les coordonnées de I vérifient l'équation de toutes les droites D_m
$\forall m \in \mathbb{R}, \quad m(-8) + (2m-1)(4) + 4 = -8m + 8m - 4 + 4 = 0$
Les droites D_m sont concourantes en I.

Exercice 4

Mesure principale **(2 points)**

$$-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\ ,\ \pi\ [2\pi]\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\ ,\ -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]\ ;\ \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\ ,\ -\frac{11\pi}{12}\ [2\pi]$$

Exercice 5

Relations entre angles orientés **(1 points)**

- $(3\vec{u}\,;\,2\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$
- $(-\vec{v}\,;\,2\vec{u}) = (-\vec{v}\,;\,\vec{u}) = (\vec{v}\,;\,\vec{u}) + \pi = -(\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi = \dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$
- $(\vec{v}\,;\,3\vec{u}) = (\vec{v}\,;\,\vec{u}) = -(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Exercice 6

Trigonométrie **(6 points)**

1) $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, donc $\cos x < 0$

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = +\frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$$

2) $x_1 = -\dfrac{\pi}{3}, \quad x_2 = -\dfrac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$

3) $2\sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$

On obtient alors les solutions : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

4) a) $X \in [-1\,;\,1]$

b) $2X^2 + 9X + 4 = 0$, on calcule $\Delta = 81 - 32 = 49 = 7^2$

On obtient deux solutions $X_1 = \dfrac{-9+7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-9-7}{4} = -4$.

c) Seule la solution X_1 est acceptable car comprise entre (-1) et 1.

On revient à x : $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$

On obtient les solutions $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + k\,2\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k\,2\pi \end{cases}$