Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 19 octobre 2016

EXERCICE 1

Forme canonique et représentation **(3 points)**

1) $f(x) = 3x^2 + 12x + 5 = 3\left(x^2 + 4x + \dfrac{5}{3}\right) = 3\left[(x+2)^2 - 4 + \dfrac{5}{3}\right] = 3\left[(x+2)^2 - \dfrac{7}{3}\right]$

2) On peut aussi f sous la forme : $f(x) = 3(x+2)^2 - 7$.
Le sommet S de la parabole $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées : $S(-2\,;\,-7)$

3) Comme $a = 3$ la parabole $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-7	↗ $+\infty$

EXERCICE 2

Équations **(4 points)**

1) $2x^2 + 3x - 2 = 0$. On a $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$. $\Delta > 0$ deux racines :

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2 \quad \text{soit } S = \left\{-2\,;\,\frac{1}{2}\right\}$$

On a alors : $2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x+2) = (2x-1)(x+2)$

2) $x^2 + 3x - 5 = x - 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x - 1$. On a $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$,

$\Delta > 0$ deux racines : $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$

$S = \left\{-1 - \sqrt{2}\,;-1 + \sqrt{2}\right\}$

3) $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{x-2} = -1$, On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1\,;\,2\}$.
$x \in D_f$, on multiplie par $(x-1)(x-2)$:

$$4(x-2) - 3(x-1) + (x-1)(x-2) = 0$$
$$4x - 8 - 3x + 3 + x^2 - 2x - x + 2 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$x_1 = -1 \in D_f$, racine évidente, $P = -3$, d'où $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = 3 \in D_f$

$S = \{-1\,;\,3\}$

4) On pose $X = x^2$, avec $X > 0$. L'équation devient :

$X^2 - 12X + 27 = 0$, on a $\Delta = 144 - 108 = 36 = 6^2 > 0$, deux racines :

$$X_1 = \frac{12+6}{2} = 9 > 0 \text{ retenue} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{12-6}{2} = 3 > 0 \text{ retenue}$$

On revient à x :

$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ et $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$S = \left\{-3\,; -\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\,;\ 3\right\}$

Exercice 3

Inéquation **(4 points)**

1) $2(x+1)^2 + 5x > 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 + 5x - 7 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 9x - 5 > 0$

$\Delta = 81 + 40 = 121 = 11^2 > 0$, 2 racines $x_1 = \dfrac{-9+11}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-9-11}{4} = -5$

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2 + 9x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty\,; -5[\cup \left]\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$$

2) Racines de $-3x^2 + 4x + 4$: $\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2 > 0$, deux racines

$$x_1 = \frac{-4+8}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4-8}{-6} = 2$$

Racines de $5x^2 + x - 6$: $x_1 = 1$ racine évidente, $P = -\dfrac{6}{5}$ donc $x_2 = -\dfrac{6}{5}$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{6}{5}\,;\ 1\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		$-\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
$-3x^2 + 4x + 4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$5x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x^2 + 4x + 4}{5x^2 + x - 6}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$S = \left]-\frac{6}{5}\,; -\frac{2}{3}\right] \cup]1\,;\ 2]$$

3) $\dfrac{2x+1}{x-2} \leqslant \dfrac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{(2x+1)(x+3) - (x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{2x^2 + 6x + x + 3 - x^2 + 2x - x + 2}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 + 8x + 5}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0$, $D_f = \mathbb{R} - \{-3\,;\ 2\}$

Racines du numérateur : $\Delta = 64 - 20 = 44 = (2\sqrt{11})^2 > 0$, deux racines :

$x_1 = \dfrac{-8 + 2\sqrt{11}}{2} = -4 + \sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{-8 - 2\sqrt{11}}{2} = -4 - \sqrt{11}$

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{11}$		-3		$-4+\sqrt{11}$		2		$+\infty$
x^2+8x+5		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-2)(x+3)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2+8x+5}{(x-2)(x+3)}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

$$S = [-4-\sqrt{11}\,;-3[\,\cup\,[-4+\sqrt{11}\,;\,2[$$

Exercice 4

Équation paramétrique **(3 points)**

1) Si $m=0$, l'équation (E) est du 1er degré donc admet une unique solution.

$-3x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{2}{3}$

2) L'équation (E) possède deux solutions distinctes ssi $\Delta>0$ et $m\neq 0$.

$\Delta>0 \quad\Leftrightarrow\quad (2m+3)^2-4m(m+2)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 4m^2+12m+9-4m^2-8m>0 \quad\Leftrightarrow$

$4m+9>0 \quad\Leftrightarrow\quad m>-\dfrac{9}{4}$.

$\Delta>0$ et $m\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad m\in\left]-\dfrac{9}{4}\,;\,0\right[\cup\,]0\,;+\infty[$

3) $\forall x\in\mathbb{R},\ \ mx^2-(2m+3)x+m+2>0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta<0$ et $m>0$.

$\Delta<0 \quad\Leftrightarrow\quad m<-\dfrac{9}{4}$, donc les conditions $\Delta<0$ et $m>0$, sont incompatibles. Il n'existe donc pas de valeurs de m pour lesquelles l'inéquation soit toujours vérifiée.

Exercice 5

Système d'équations **(2 points)**

x et y sont solution de l'équation : $X^2-29X+198=0$.
$\Delta=29^2-4\times198=49=7^2>0$, deux racines :

$$X_1=\frac{29+7}{2}=18 \quad\text{et}\quad X_2=\frac{29-7}{2}=11$$

$S=\{(18\,;\,11)\,;\,(11\,;\,18)\}$

Exercice 6

Carrés **(2 points)**

La somme des aires des deux carrés vaut les 3/4 du carré ABCD, se traduit par :

$x^2+(5-x)^2=\dfrac{3}{4}\times5^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2+4(5-x)^2=75 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2+100-40x+4x^2=75 \quad\Leftrightarrow$

$8x^2-40x+25=0$,
$\Delta=1\,600-800=800=(20\sqrt{2})^2>0$, deux racines (symétriques)

$$x_1=\frac{40+20\sqrt{2}}{16}=\frac{10+5\sqrt{2}}{4}\approx 4,27 \quad\text{et}\quad x_1=\frac{40-20\sqrt{2}}{16}=\frac{10-5\sqrt{2}}{4}\approx 0,73$$

EXERCICE 7

Équation de troisième degré **(2 points)**

1) $1^3 + 5 \times 1^2 - 12 \times 1 + 6 = 1 + 5 - 12 + 6 = 0$.
   $x = 1$, est donc solution de (E).

2) On développe :
   $(x-1)(x^2+6x-6) = x^3 + 6x^2 - 6x - x^2 - 6x + 6 = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$

3) Racine de $x^2 + 6x - 6$. On a $\Delta = 36 + 24 = 60 = (2\sqrt{15})^2 > 0$, deux racines :

$$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{2} = -3 + \sqrt{15} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{2} = -3 - \sqrt{15}$$

   L'ensemble solution de (E) : $S = \left\{-3 - \sqrt{15}\,; -3 + \sqrt{15}\,;\ 1\right\}$