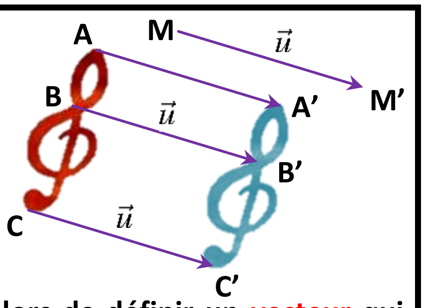
Chapitre 3 ~ Vecteurs et compagnie

I – Vecteur et translation

Définitions

Soient M et M' deux points distincts. On appelle translation (qui transforme M en M') la transformation qui permet de glisser d'une figure $\mathscr{F}$ à une figure $\mathscr{F}'$:

- **selon la direction de la droite (MM') ;**
- **dans le sens de M vers M' ;**
- **d'une longueur MM'.**

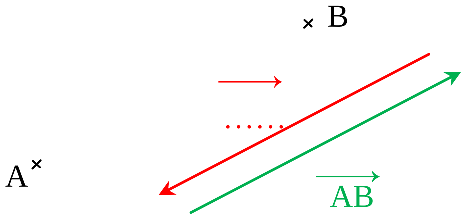


Les points qui vont ensemble (A et A', B et B', …) permettent alors de définir un vecteur qui respecte toujours les trois points ci-dessus, on le note en général $\vec{u}$.

Remarques

- On peut aussi noter $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$. On dira donc que la transformation qui a permis à la figure rouge de glisser vers la bleue est la translation de vecteur $\vec{u}$.
- Puisqu'on a aussi $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, on dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$. **Ainsi, un vecteur n'est en aucun cas lié à un point de départ et un point d'arrivée !!**
- La longueur du vecteur $\vec{u}$ est appelée norme et notée $\| \vec{u} \|$.

Exemple : Avec deux points A et B, on a forcément un vecteur $\overrightarrow{AB}$: c'est la « flèche » qui relie directement A et B. Attention, le chemin opposé (de B vers A) n'est pas le même vecteur :



	En classe : 1, 3 p. 171	Exercices : 2, 4 p. 171

II – Propriétés

1. Vecteurs égaux

Définitions

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits égaux, et on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points tous distincts. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme (qui peut être aplati).

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C en D. Par définition d'un vecteur, les segments [AB] et [CD] sont de même longueur et parallèles (même direction), impliquant que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

Réciproquement, si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car ses côtés opposés [AB] et [CD] sont parallèles et de même longueur.

	En classe : 6 p. 171	Exercices : 5 p. 171

2. Vecteurs opposés, vecteur nul

Définitions

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dit <u>nul</u> si les deux points A et B sont confondus. On note alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
Deux vecteurs sont dits <u>opposés</u> s'ils ont la même direction et la même norme, mais s'ils sont de sens opposé.

Remarque

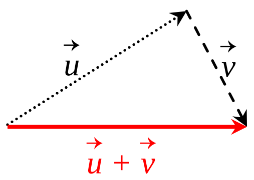
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont toujours deux vecteurs opposés. Ce mot n'est pas choisi par hasard, car on note : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

	En classe : 8 p. 171	Exercices : 7, 9 p. 171

III – $\vec{u} + \vec{v}$?

Un vecteur étant compris comme un déplacement (un « glissement »), il est aisé de voir que :

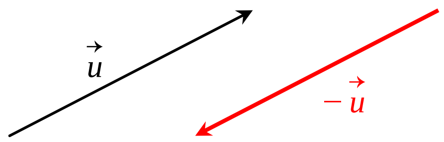
- la somme de deux vecteurs est comprise comme la succession de deux déplacements



Si les points ont des noms, on appelle cette relation la **<u>relation de Chasles</u>** :

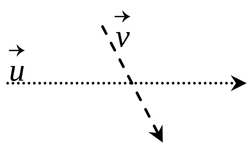
$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$.

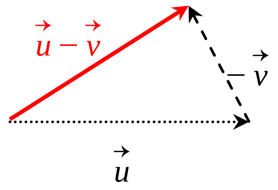
- l'opposé d'un vecteur est le déplacement en sens inverse (même direction et même norme)



$\boxed{\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}}$

- la différence de deux vecteurs est la somme du premier avec l'opposé du second





$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})}$

Propriété

Soient A, B et C trois points. Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

En effet,

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

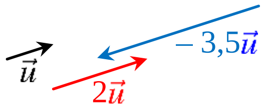
	En classe : 20, 22, 24 p. 172	Exercices : 21, 23, 25 p. 172

IV – $k\vec{u}$ et colinéarité

1. Produit d'un vecteur par un réel

Définitions

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul. On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, et on le note $k\vec{u}$, le vecteur :
- de même direction que $\vec{u}$;
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ ou de sens contraire si $k < 0$;
- de norme égale à $|k|\ \|\vec{u}\|$.



Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tous réels k et k', on a :

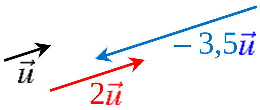
- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$;
- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Ces démonstrations sont immédiates si l'on utilise la définition ci-dessus !

2. Colinéarité

Définitions

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.



Propriété

1) (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
2) A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

1) (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
2) A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ (AB) et (AC) parallèles $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

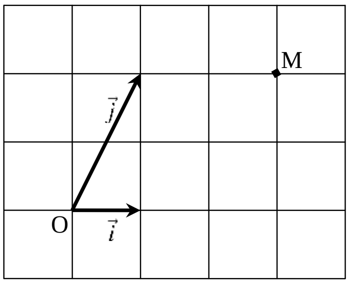
	En classe : 28, 29, 32, 33 p. 173	Exercices : 30, 31, 34, 35 p. 173

V – Repères du plan

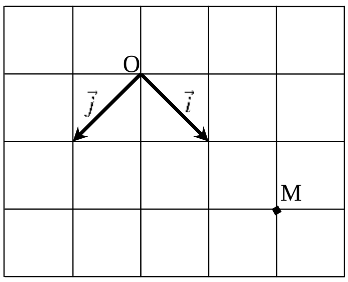
1. Nouveau repère

Exercice : Dans chacune des situations ci-dessous, et quand cela est possible, exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs de la figure.

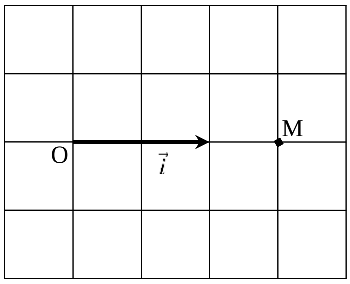
a) $\overrightarrow{OM} =$



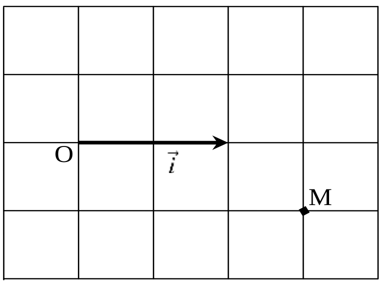
b) $\overrightarrow{OM} =$



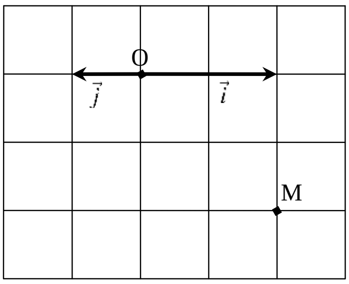
c) $\overrightarrow{OM} =$



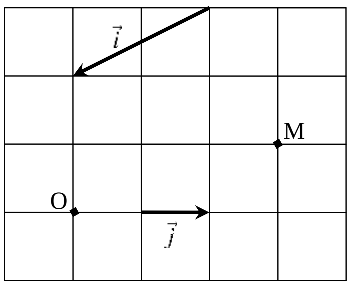
d) $\overrightarrow{OM} =$



e) $\overrightarrow{OM} =$



f) $\overrightarrow{OM} =$

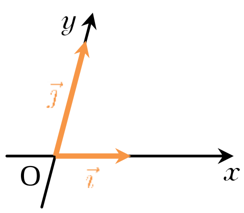


Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :

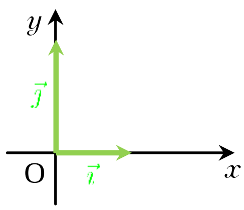
- En fonction d'un seul vecteur, on peut uniquement exprimer un vecteur qui lui est colinéaire (c et d).
- En fonction de 2 vecteurs colinéaires, on peut uniquement exprimer un vecteur qui leur est colinéaire (e).
- En fonction de 2 vecteurs non colinéaires, on peut exprimer tout vecteur !!
-

Définitions

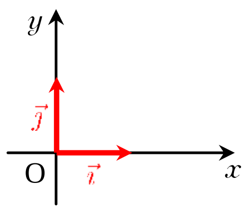
On appelle repère du plan, et on note (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), la donnée d'un point O appelé origine et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- De plus, un repère est orthogonal si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires ;
- Enfin, un repère orthogonal est dit orthonormé (ou orthonormal) si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même norme.



Repère quelconque



Repère orthogonal

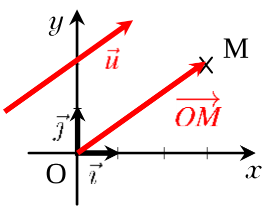


Repère orthonormé

	En classe : 36 p. 173 + 39 p. 174	**Exercices :** 37, 38, 40 p. 174

Définition

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère sont alors celles du point M :



Si M a pour coordonnées (m_1 ; m_2), alors on note :

$$\vec{u}(m_1\ ;\ m_2) \text{ ou } \vec{u}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}.$$

	En classe : 41, 42 p. 174	**Exercices :** 43, 44 p. 174

Propriété

Soient $\vec{u}(x_1 ; y_1)$ et $\vec{v}(x_2 ; y_2)$ deux vecteurs. Alors

- **$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$;**
- **$\vec{u} + \vec{v}\ (x_1 + x_2 ; y_1 + y_2)$;**
- **$k\vec{u}\ (kx_1 ; ky_1)$.**

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points. Alors

1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$;

2) le milieu I de [AB] a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Les trois premiers points utilisent simplement la définition. Pour le 4ème, la relation de Chasles nous donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Comme $-\overrightarrow{OA}(-x_A ; -y_A)$ et $\overrightarrow{OB}(x_B ; y_B)$, on a alors par addition que $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$. Pour le dernier, on remarque que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ si on construit un parallélogramme à partir des points O, A et B (tel que AB en soit une diagonale). Par conséquent, $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ a pour coordonnées $\frac{1}{2}(x_A + x_B ; y_A + y_B)$.

Exercice : Soient A(– 1 ; – 5) et B(2 ; 3). Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du milieu I de [AB].

Solution :

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont données par : $x_B - x_A = 2 - (-1) = 3$ et $y_B - y_A = 3 - (-5) = 8$. Donc $\overrightarrow{AB}(3 ; 8)$. Pour le vérifier, faire une figure, et vérifier qu'on se déplace bien horizontalement de 3 carreaux vers la droite puis verticalement de 8 carreaux vers le haut afin d'aller du point A au point B.

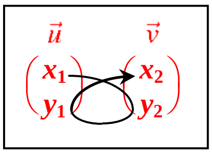
Puisque $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, on conclut que I(0,5 ; – 1).

	En classe : 49, 51 p. 175	Exercices : 50, 53 p. 175

2. *Critère pratique de colinéarité*

Propriété

Soient $\vec{u}(x_1 ; y_1)$ et $\vec{v}(x_2 ; y_2)$ deux vecteurs. Alors ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ (c'est-à-dire si leurs coordonnées sont proportionnelles).



Si l'un des vecteurs est nul, il n'y a rien à démontrer. Supposons alors que les deux vecteurs soient non nuls.

S'ils sont colinéaires, c'est qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire $x_1 = kx_2$ et $y_1 = ky_2$. Dans ce cas, $x_1y_2 - y_1x_2 = kx_2y_2 - ky_2x_2 = 0$.

Réciproquement, supposons que $kx_2y_2 - ky_2x_2 = 0$ et montrons que les vecteurs sont alors colinéaires. Le vecteur $\vec{v}$ n'est pas nul, l'une au moins de ses coordonnées n'est donc pas nulle, on peut supposer qu'il s'agit de x_2. Posons alors $k = x_1/x_2$. La relation $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$, équivalente à $y_1 = x_1y_2/x_2$ nous permet d'écrire que $y_1 = ky_2$. Au final, on a bien $\vec{u} = k\vec{v}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.

Exercice : * Est-ce que les vecteurs $\vec{u}(-5 ; 3)$ et $\vec{v}(15 ; -9)$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

* Est-ce que les vecteurs $\vec{a}(7 ; -3)$ et $\vec{b}(4 ; -2)$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Solution :

* Puisque $(-5) \times (-9) - 3 \times 15 = 45 - 45 = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
* Puisque $7 \times (-2) - (-3) \times 4 = -14 + 12 = -2$, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

	En classe : 54, 57, 59 p. 175	Exercices : 55, 56, 58 p. 175

3. Distance dans un repère orthonormé

Propriété

Soient A(x_A ; y_B) et B(x_B ; y_B) deux points dans un repère orthonormé. Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

C'est une conséquence directe du théorème de Pythagore (ajouter un point C de sorte que ABC soit rectangle en C).

Exercice : Soient A(– 5 ; 3), B (15 ; – 9), C(7 ; – 3) et D(4 ; – 2). Calculer toutes les longueurs possibles.

Solution : Supposons que la norme des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ du repère soit égale à 1 cm. Alors :

* AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(15 - (-5))^2 + (-9 - 3)^2} = \sqrt{20^2 + (-12)^2} = \sqrt{400 + 144} = \sqrt{544} \approx 23{,}3$ cm.
* AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(7 - (-5))^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{12^2 + (-6)^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} \approx 13{,}4$ cm.
* AD = $\sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(4 - (-5))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{9^2 + (-5)^2} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106} \approx 10{,}3$ cm.
* BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(7 - 15)^2 + (-3 - (-9))^2} = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ cm.
* BD = $\sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 15)^2 + (-2 - (-9))^2} = \sqrt{(-11)^2 + 7^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170} \approx 13{,}0$ cm.
* CD = $\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(4 - 7)^2 + (-2 - (-3))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \approx 3{,}2$ cm.

	En classe : 60 p. 175	Exercices : 61, 62 p. 175