

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – Montpellier

EXERCICE 4C.1

Etudier les variations de la fonction $f(x) = \frac{1}{3x-9}$ sur les intervalles $]3; +\infty[$ et $]-\infty; 3[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Les opérations successives de la fonction f sont : $x \mapsto 3x \mapsto 3x-9 \mapsto \frac{1}{3x-9}$

Soit $a, b \in]3; +\infty[$ tels que

$$3 < a < b$$

$$\Leftrightarrow 9 < 3a < 3b$$

$$\Leftrightarrow 0 < 3a-9 < 3b-9$$

ces quantités sont positives

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3a-9} > \frac{1}{3b-9} > 0$$

ces quantités restent positives

$$\Leftrightarrow f(a) > f(b)$$

donc f est décroissante sur $]3; +\infty[$.

Soit $a, b \in]-\infty; 3[$ tels que

$$a < b < 3$$

$$\Leftrightarrow 3a < 3b < 9$$

$$\Leftrightarrow 3a-9 < 3b-9 < 0$$

ces quantités sont négatives

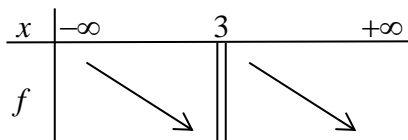
La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc

$$\Leftrightarrow 0 > \frac{1}{3a-9} > \frac{1}{3b-9}$$

ces quantités restent négatives

$$\Leftrightarrow f(a) > f(b)$$

donc f est décroissante sur $]-\infty; 3[$.



EXERCICE 4C.2

Etudier les variations de la fonction $g(x) = \frac{-5}{8-2x}$ sur les intervalles $]4; +\infty[$ et $]-\infty; 4[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Les opérations successives de la fonction g sont : $x \mapsto -2x \mapsto 8-2x \mapsto \frac{1}{8-2x} \mapsto \frac{-5}{8-2x}$

Soit $a, b \in]4; +\infty[$ tels que

$$4 < a < b$$

$$\Leftrightarrow -8 > -2a > -2b$$

$$\Leftrightarrow 0 > 8-2a > 8-2b$$

ces quantités sont négatives

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{8-2a} < \frac{1}{8-2b}$$

ces quantités restent négatives

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{8-2a} > \frac{-5}{8-2b} > 0$$

ces quantités deviennent positives

$$\Leftrightarrow g(a) > g(b)$$

donc g est décroissante sur $]4; +\infty[$.

Soit $a, b \in]-\infty; 4[$ tels que

$$a < b < 4$$

$$\Leftrightarrow -2a > -2b > -8$$

$$\Leftrightarrow 8 - 2a > 8 - 2b > 0$$

ces quantités sont positives

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{8-2a} < \frac{1}{8-2b}$$

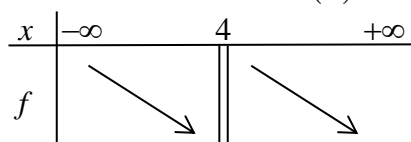
ces quantités restent positives

$$\Leftrightarrow 0 > \frac{-5}{8-2a} > \frac{-5}{8-2b}$$

ces quantités deviennent négatives

$$\Leftrightarrow g(a) > g(b)$$

donc g est décroissante sur $]-\infty; 4[$.



EXERCICE 4C.3

Etudier les variations de la fonction $h(x) = \frac{1}{(5x-10)^2}$ sur les intervalles $]2; +\infty[$ et $]-\infty; 2[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Les opérations successives de la fonction h sont : $x \mapsto 5x \mapsto 5x - 10 \mapsto (5x - 10)^2 \mapsto \frac{1}{(5x - 10)^2}$

Soit $a, b \in]2; +\infty[$ tels que

$$2 < a < b$$

$$\Leftrightarrow 10 < 5a < 5b$$

$$\Leftrightarrow 0 < 5a - 10 < 5b - 10$$

ces quantités sont positives

La fonction carré est croissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow 0 < (5a - 10)^2 < (5b - 10)^2$$

ces quantités sont positives

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(5a - 10)^2} > \frac{1}{(5b - 10)^2} > 0$$

ces quantités restent positives

$$\Leftrightarrow h(a) > h(b)$$

donc h est décroissante sur $]2; +\infty[$.

Soit $a, b \in]-\infty; 2[$ tels que

$$a < b < 2$$

$$\Leftrightarrow 5a < 5b < 10$$

$$\Leftrightarrow 5a - 10 < 5b - 10 < 0$$

ces quantités sont négatives

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc

$$\Leftrightarrow (5a - 10)^2 > (5b - 10)^2 > 0$$

ces quantités sont positives

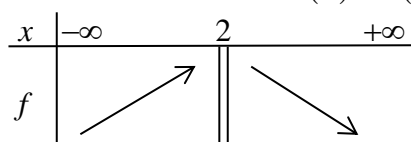
La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{(5a - 10)^2} < \frac{1}{(5b - 10)^2}$$

ces quantités restent positives

$$\Leftrightarrow h(a) < h(b)$$

donc h est croissante sur $]-\infty; 2[$.



EXERCICE 4C.4

Etudier les variations de la fonction $m(x) = \frac{-7}{(15-3x)^2}$ sur les intervalles $]5; +\infty[$ et $]-\infty; 5[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Les opérations successives de la fonction m sont :

$$x \mapsto -3x \mapsto 15 - 3x \mapsto (15 - 3x)^2 \mapsto \frac{1}{(15 - 3x)^2} \mapsto \frac{-7}{(15 - 3x)^2}$$

Soit $a, b \in]5; +\infty[$ tels que

$$5 < a < b$$

$$\Leftrightarrow -15 > -3a > -3b$$

$$\Leftrightarrow 0 > 15 - 3a > 15 - 3b$$

ces quantités sont négatives

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc

$$\Leftrightarrow 0 < (15 - 3a)^2 < (15 - 3b)^2$$

ces quantités sont positives

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(15 - 3a)^2} > \frac{1}{(15 - 3b)^2} > 0$$

ces quantités restent positives

$$\Leftrightarrow \frac{-7}{(15 - 3a)^2} < \frac{-7}{(15 - 3b)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow m(a) < m(b)$$

donc m est croissante sur $]5; +\infty[$.

Soit $a, b \in]-\infty; 5[$ tels que

$$a < b < 5$$

$$\Leftrightarrow -3a > -3b > -15$$

$$\Leftrightarrow 15 - 3a > 15 - 3b > 0$$

ces quantités sont positives

La fonction carré est croissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow (15 - 3a)^2 > (15 - 3b)^2 > 0$$

ces quantités sont positives

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{(15 - 3a)^2} < \frac{1}{(15 - 3b)^2}$$

ces quantités restent positives

$$\Leftrightarrow 0 > \frac{-7}{(15 - 3a)^2} > \frac{-7}{(15 - 3b)^2}$$

$$\Leftrightarrow m(a) > m(b)$$

donc m est décroissante sur $]-\infty; 5[$.

