

المجموعات الميكانيكية المتذبذبة  
Systèmes mécaniques oscillants

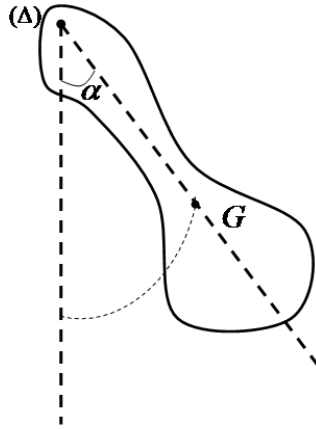
I – تقديم المجموعات الميكانيكية المتذبذبة :

1 – تعريف :

المجموعة الميكانيكية المتذبذبة هي مجموعة تنجز حركة دورية ذهابا و إيابا حول موضع توازنها المستقر

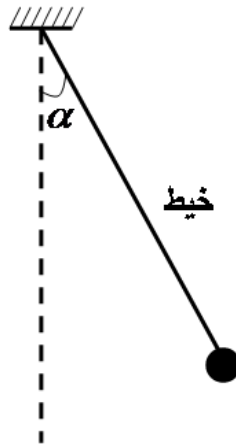
أ – النواس الوزن : pendule pesant

هو جسم صلب غير قابل للتشويه يمكنه إنجاز حركة تذبذبية حول محور  $(\Delta)$  ثابت أفقي لا يمر بمركز قصوره تحت تأثير وزنه.



ب – النواس البسيط : pendule simple

هو جسم صلب نقطي يتأرجح على مسافة ثابتة من محور أفقي ثابت :

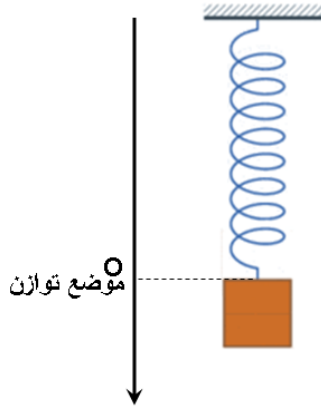


❖ ملحوظة :

النواس البسيط حالة خاصة للنواس الوزن عندما تكون أبعاد الجسم صغيرة و كتلته كبيرة.

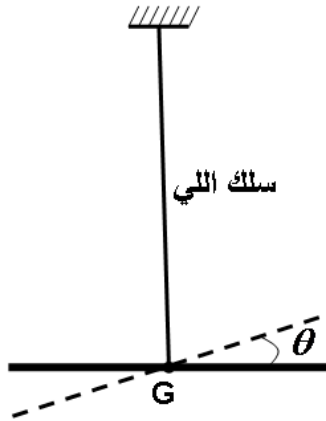
ج – النواس المرن : pendule élastique

يتكون من جسم صلب مشدود بطرف نابض ذي لفات غير متصلة و كتلته مهمة :



### د – النواس اللي : *pendule de torsion*

يتكون من سلك أحد طرفيه مثبت إلى حامل و طرفه الآخر إلى قضيب متجانس معلق من مركز قصوره.



### 2 – الحركة التذبذبية و مميزاتها :

- الحركة التذبذبية : هي حركة ذهاب و أياب حول موضع التوازن.
- الحركة التذبذبية الحرة : هي حركة تذبذبية لمجموعة ميكانيكية دون أن تكتسب طاقة ما من أي مجموعة خارجية بعد إحداث الحركة.
- موضع التوازن المستقر : هو الموضع الذي إذا زحزح عنه موضع مركز قصور المجموعة المتذبذبة تعود إليه لتستقر فيه.
- وسع الحركة لمذبذب ميكانيكي حر و غير مخمد : هو القيمة القصوى الموجبة التي يأخذها المقدار المميز (أفصول خطي أو أفصول زاوي) لحركة المتذبذب عن موضع توازن المستقر.
- الدور الخاص  $T_0$  لمذبذب ميكانيكي حر و غير مخمد : هو المدة الزمنية التي تستغرقها ذبذبة واحدة وحدته في (SI) هي الثانية (S).

### 3 – خمود الذبذبات الميكانيكية :

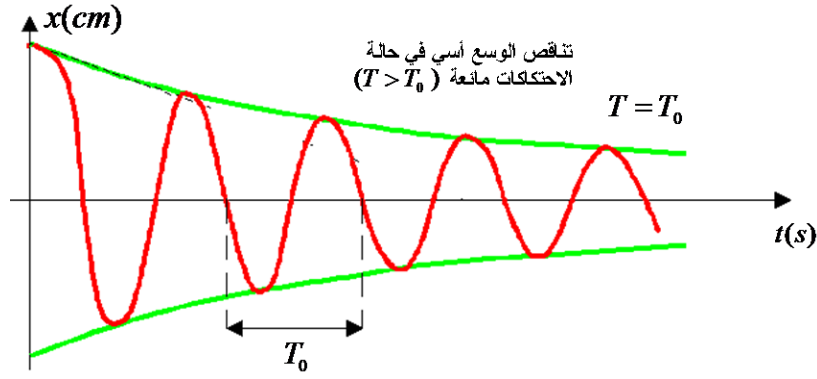
#### أ – ظاهرة الخمود : *phénomène d'amortissement*

- يتناقص وسع التذبذبات تدريجيا مع الزمن إلى أن يتوقف المتذبذب عند موضع توازنه المستقر و تسمى هذه الظاهرة : **ظاهرة الخمود**.
- و تحدث هذه الظاهرة بسبب وجود الاحتكاكات التي يمكن تصنيفها إلى صنفين :
- احتكاكات صلابة : تنتج عن تماس المتذبذب الميكانيكي مع جسم صلب و ينتج عنها **خمود صلب**.
- احتكاكات مائعة : تنتج عن تماس المتذبذب الميكانيكي مع جسم مائل (سائل أو غاز) و ينتج عنها **خمود مائع**.

#### أ – أنظمة خمود الذبذبات الميكانيكية :

#### ❖ حالة الخمود الضعيف : نظام شبه دوري *amortissement faible*

- يتناقص وسع الذبذبات تدريجيا مع الزمن إلى أن يستقر عند موضع توازنه المستقر ، حركة المتذبذب في هذه الحالة ليست دورية نقول أنها **شبه دورية** دورها  $T$  يقارب الدور الخاص  $T_0$  عموما ( $T \geq T_0$ )



❖ ملحوظة :

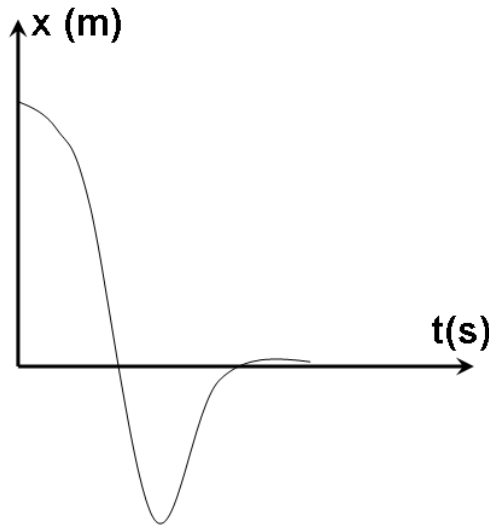
- تناقص الوسع خطي في حالة الاحتكاكات الصلبة ( $T = T_0$ ).

- كلما كان الخمود ضعيف كلما تتناهي  $T$  نحو  $T_0$ .

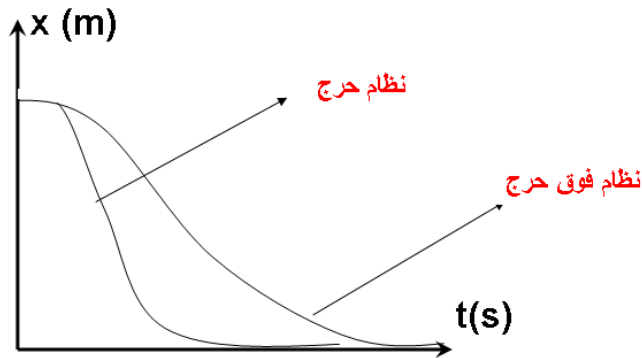
❖ حالة الخمود الحاد : نظام لا دوري (amortissement fort)

في هذه الحالة تكون حركة المتذبذب ال دورية و نميز 3 حالات حسب أهمية الخمود :

- النظام تحت الحرج : ينجز المتذبذب ذبذبة واحدة قبل أن يتوقف.



- النظام الحرج : يعود المتذبذب إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب :



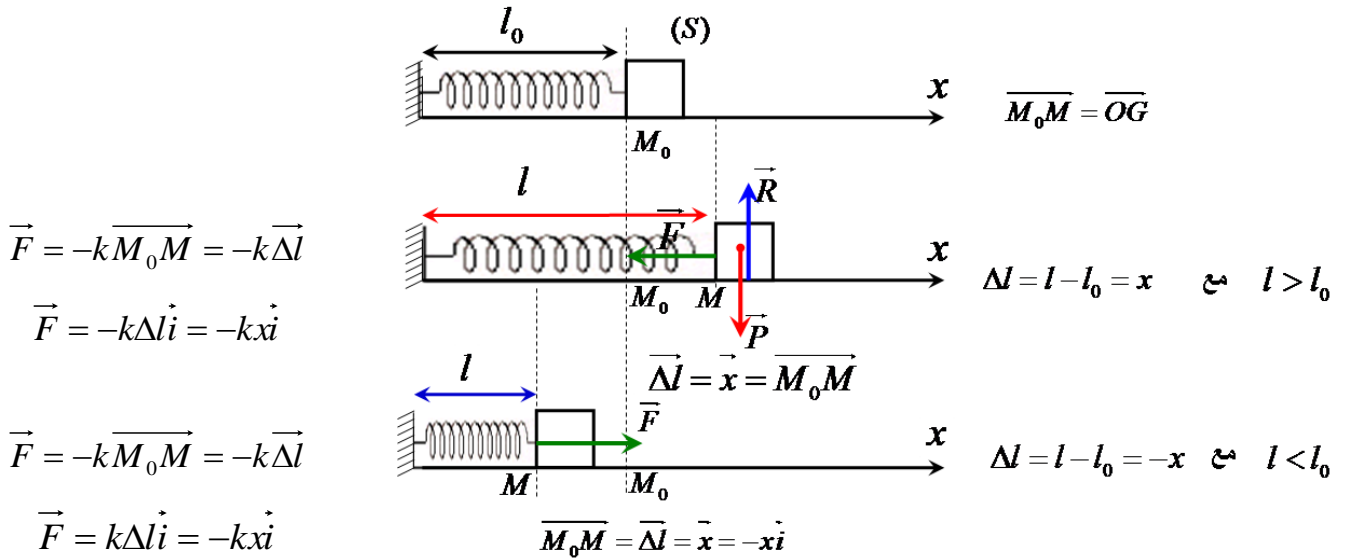
- النظام فوق الحرج : يستغرق وقتا طويلا لكي يرجع إلى موضع توازن المستقر دون أن يتذبذب.

❖ ملحوظة :

لصيانة الحركة التذبذبية نستعمل أجهزة ملانمة تمكن من تعويض الطاقة المبددة و بذلك تصبح الحركة التذبذبية مصانة.

II – دراسة مجموعات ميكانيكية متذبذبة :1 – النواس المرن :1-1 قوة الارتداد التي يطبقها النابض :

نعتبر نواسا مرنا في وضع أفقي ، عندما يكون النابض حرا تحتل نقطة تماسه مع الجسم (S) الموضع  $M_0$  . و عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا تحتل هذه النقطة الموضع  $M$  . في هذه الحالة يطبق النابض على الجسم **قوة ارتداد**  $\vec{F}$  تسعى إلى ارجاع الطرف الحر للنابض إلى وضعه البدني.

**❖ مميزات  $\vec{F}$  قوة الارتداد :**

ن ت : نقطة تماس الجسم الصلب و النابض

خ ت : محور الدوران

المنحى : من  $\vec{F}$  معاكس منحى التشويه

الشدة :  $F = k\Delta l = k(l - l_0)$  حيث  $k$  : صلابة النابض

إذن نعرف قوة الارتداد ب :  $\vec{F} = -k\overline{M_0M} = -k\overline{\Delta l} = -kx\dot{i}$

1-2 المعادلة التفاضلية : l'équation différentielle

المجموعة المدروسة :  $\{S\}$  الجسم

جرد القوى المطبقة على الجسم (S) : نهمل الاحتكاكات

$\vec{P}$  : وزن الجسم (S)

$\vec{R}$  : تأثير السطح الافقي

$\vec{T}$  : قوة الارتداد

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = m\vec{a}_G$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم :  $(O, i)$

$$\vec{P}_x + \vec{R}_x + \vec{T}_x = m\vec{a}$$

$$0 + 0 - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها عبارة عن دالة جيبية :

### 1-3 حل المعادلة التفاضلية :

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

يكتب حل العام للمعادلة التفاضلية كالتالي :

$x_m$  : وسع الحركة ب (m)

$T_0$  : الدور الخاص ب (s)

$\varphi$  : الطور عند اللحظة  $t = 0$  ب (rad)

$\frac{2\pi}{T_0} + \varphi$  : الطور عند اللحظة  $t$  ب (rad) ، مع  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  : النبض الخاص ب (rad/s)

### 1-4 تعبير الدور الخاص $T_0$ :

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

لدينا

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x(t)$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$x(t) \cdot \left(\frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right) = 0$$

$$x(t) = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = 0$$

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = 0$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

❖ التردد الخاص  $f_0$  :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2- نواس اللي :1-2 مزدوجة الارتداد التي يطبقها اللي :

عندما تطبق مزدوجة قوتين على قضيب يحدث لي السلك و عند حذف المزدوجتين ، يعود القضيب إلى موضع توازنه بفعل قوى الارتداد التي تطبقها مولدات السلك على القضيب و تسمى **مزدوجة اللي**.

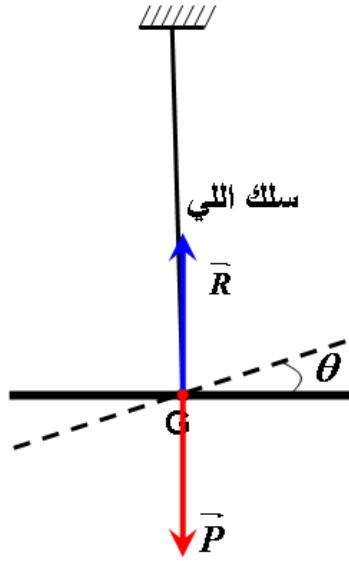
يعبر عنها بالعلاقة :

$$M_{\Delta} = -C\theta$$

C : ثابتة تتعلق بطول السلك و مقطعه و نوعيته (طبيعته)

2-2 المعادلة التفاضلية :

نعتبر نواس اللي في توازنه المستقر ، ندير القضيب عن موضع توازنه بزاوية  $\theta_m$  و نحرره بدون سرعة بدئية، فينجز حركة تذبذبية حرة حول موضع التوازن المستقر ونعتبر الاحتكاكات مهملة.



❖ المجموعة المدروسة : {القضيب}

جهد القوى المطبقة على القضيب

$\vec{P}$  : وزن القضيب

$\vec{R}$  : تأثير محور الدوران ( $\Delta$ )

$M_C$  : عزم مزدوجة اللي :  $M_C = -C\theta$

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

بتطبيق العلاقة الاساسية للديناميك في حالة دوران :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_C = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

لأن تأثيرهما يتقاطع مع محور الدوران :

$$-C \cdot \theta = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

وبالتالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \cdot \theta = 0$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية يحققها القضيب :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

حلها عبارة عن دالة جيبية :

إذن طبيعة حركة القضيب دورانية جيبية.

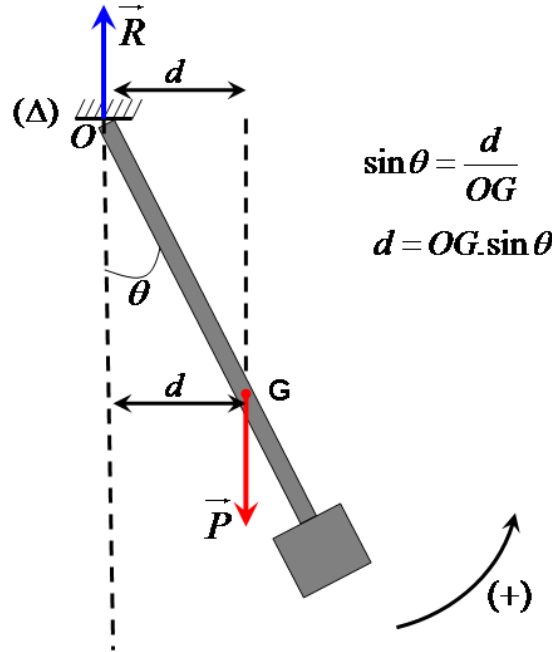
❖ تعبير الدور الخاص  $T_0$ 

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{و} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J_{\Delta}}$$

❖ تطبيق :3- نواس الوزن :

نعتبر نواس وزان ينجزذبذببات صغيرة وحررة بدون احتكاكات و هو عبارة عن قضيب تثبيت عليه سحمة :



$$\sin \theta = \frac{d}{OG}$$

$$d = OG \cdot \sin \theta$$

❖ المجموعة المدروسة : { سحمة القضيب + }

جرد القوى المطبقة على المجموعة

 $\vec{P}$  : وزن المجموعة $\vec{R}$  : تأثير محور الدوران  $(\Delta)$ 

بتطبيق العلاقة الأساسية لديناميك في حالة دوران :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

لأن تأثيرها يتقاطع مع محور الدوران :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot d = -mg \cdot OG \cdot \sin \theta$$

$$-mg \cdot OG \cdot \sin \theta = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$$\sin \theta \approx \theta$$

و بما أن الذبذبات صغيرة :  $\theta \leq 0,26 \text{ rad}$  أو  $\theta < 15^\circ$  فإن

$$\ddot{\theta} + \frac{m \cdot g \cdot OG}{J_{\Delta}} \cdot \theta = 0$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية يحققها الأفضول الزاوي للنواس :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

حلها عبارة عن دالة جيبية :

إن طبيعة حركة النواس دورانية تذبذبية جيبية.

❖ تعبير الدور الخاص  $T_0$

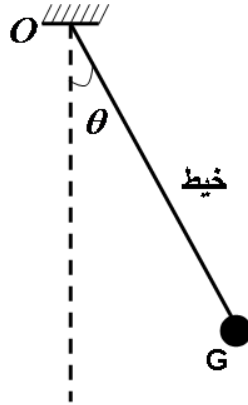
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{m \cdot g \cdot OG}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{و}$$

$$\omega_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot OG}{J_{\Delta}}$$

4 - نواس البسيط :

النواس البسيط نموذج مثالي لمتذبذب ميكانيكي و هو حالة خاصة للنواس الوزان حيث :  $OG = l$  و  $J_{\Delta} = m \cdot r^2 = m \cdot l^2$



$$\ddot{\theta} + \frac{m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2} \theta = 0$$

و بالتالي تصبح المعادلة التفاضلية :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

معادلة تفاضلية حلها عبارة عن دالة جيبية :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

❖ تعبير الدور الخاص  $T_0$

II ظاهرة الرنين الميكانيكي :

1 - الذبذبات القسرية : oscillations forcées

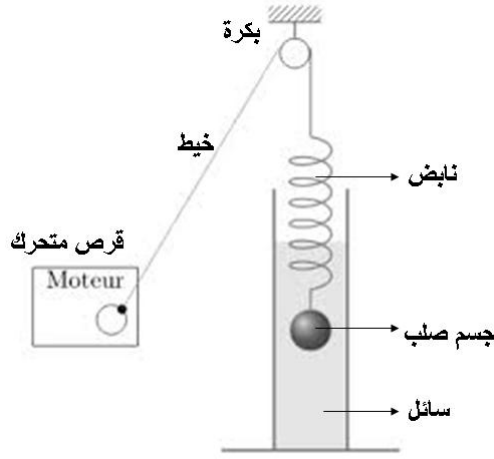
- تؤثر الاحتكاكات على التذبذبات الميكانيكية فتصبح حركتها مخمدة و يمكن صيانتها بتعويض الطاقة المبددة بكيفية تتناسب مع طبيعة المذبذب.

حيث يتم تجميع المتذبذب الميكانيكي مع جهاز يمنحه الطاقة اللازمة لكي تصير حركته مصونة (entretenu) ، هذا يسمى **المثير excitateur** و هو مجموعة ذات حركة جيبية تفرض دورها  $T_e$  على المجموعة المتذبذبة فتصبح هذه الذبذبات قسرية ، ويسمى **الرنان**

(résonance)

❖ مثال :





- يسمى القرص المتحرك و الخيط و البكرة **بالمثير**

- تسمى المجموعة { جسم صلب + نابض } **بالرنان**

### 1 – الرنين الميكانيكي : résonance mécanique

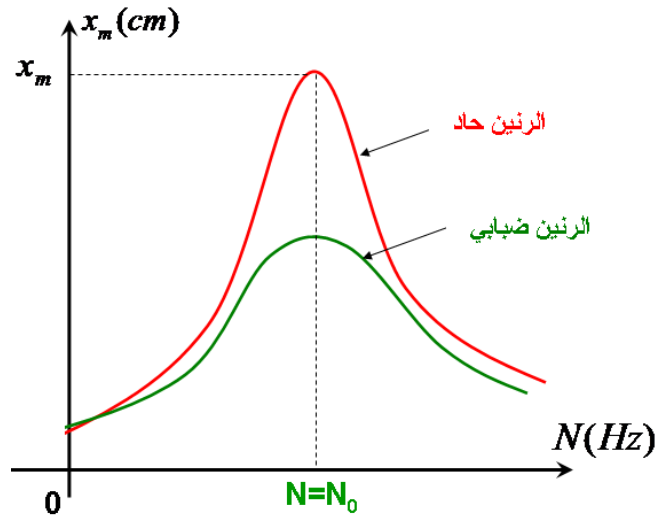
ينعلق وسع الذبذبات القسرية للرنان بالدور  $T_e$  للمثير ، و يصير هذا الوسع أقصى عندما يقارب الدور  $T_e$  الدور الخاص  $T_0$  للمجموعة المتذبذبة نقول أنه تم حدوث رنين ميكانيكي ( $T_0 = T_e$ )

إذن تحدث ظاهرة الرنين عندما يقارب الدور  $T_e$  لذبذبات الرنان دوره الخاص  $T_0$  . ( $T_0 = T_e$ ) أو ( $N_0 = N_e$ )

#### ❖ ملحوظة :

كلما كان الخمود ضعيف كلما كانت ظاهرة الرنين بارزة فنحصل **الرنين الحاد** الذي يتجلى في كون وسع التذبذبات القسرية يأخذ قيمة كبيرة عند الرنين.

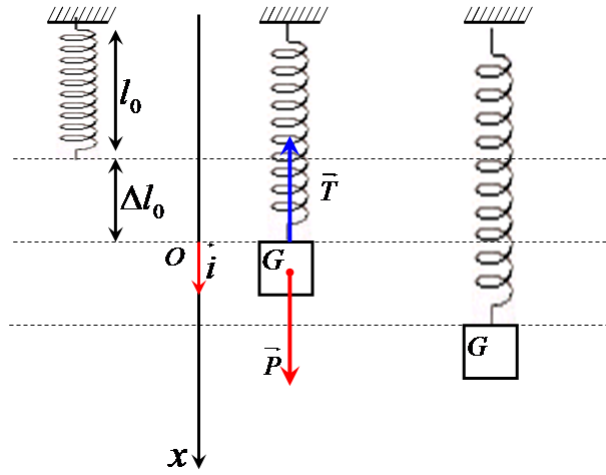
- في حالة الخمود القوي يكون الرنين ضبابيا بحيث يصبح وسع الذبذبات القسرية عند الرنين صغيرا.



#### ❖ تطبيق : النواس المرن الرأسي

نعتبر نواسا مرنا رأسيًا مكونا من نابض صلابته  $k = 20N$  و جسم صلب ( $S$ ) كتلته  $m = 200g$  ، نزيح الجسم ( $S$ ) رأسيًا نحو

الأسفل عن موضع توازنه ب  $3cm$  ثم نحرره بدون سرعة بدئية :



نعتبر معلما  $(O, i)$  رأسيا موجهها نحو الأسفل أصله  $O$  منطبق مع مركز قصور الجسم  $(S)$  عند التوازن  $G_0$  ، عند اللحظة  $t = 0$  يمر الجسم  $(S)$  من موضع توازنه المستقر  $G_0$  في المنحى الموجب.

1 – أوجد إطالة النابض  $\Delta l_0$  عند التوازن ؟

2 – أوجد المعادلة التفاضلية للحركة ؟

3 – أوجد المعادلة الزمنية للحركة ؟

4 – أحسب الدور الخاص لحركة المتذبذب ؟ نعطي  $g = 10N/kg$

1 – المجموعة المدروسة :  $\{S\}$  الجسم

جرد القوى المطبقة على الجسم  $(S)$

$\vec{P}$  : وزن الجسم  $(S)$

$\vec{T}$  : توتر النابض

بما أن الجسم  $(S)$  في حالة توازن فإنه حسب شرط التوازن :  $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

ومنه :  $T = P$  و  $mg - k\Delta l_0 = 0$

$$mg = k\Delta l_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta l_0 = \frac{m \cdot g}{k}$$

$$\Delta l_0 = \frac{0,2 \times 10}{20} = 0,1m = 10cm$$

2 – خلال الحركة :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = m \cdot \vec{a}_G$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم :  $(O, i)$  :

$$\vec{T} = -k(\Delta l_0 + x)\vec{i} \quad \text{و} \quad \vec{P} = mg\vec{i}$$

$$mg\vec{i} - k(\Delta l_0 + x)\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i}$$

$$\underbrace{mg - k\Delta l_0}_{\text{عند التوازن}} - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{معادلة تفاضلية لحركة النواس المرن} :$$

3 - بما أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية فإن حلها عبارة عن دالة جيبيية يكتب حلها كالتالي :

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$x_m = 3cm$$

لدينا :

و حسب الشروط البدئية :  $x(t=0) = x_m \cos(\varphi) = 0$  عند  $t = 0$  يكون موضع التوازن

$$\cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

و لدينا :

$$\dot{x}(t=0) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m \sin(\varphi) > 0$$

يمر الجسم (S) من موضع توازن عند  $t = 0$  في المنحى الموجب  $v > 0$

$$\text{أي أن : } \sin \varphi < 0 \quad \text{ومنه} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 3.10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

4 - لدينا :

$$T_0 = 2 \times 3,14 \times \sqrt{\frac{0,2}{20}}$$

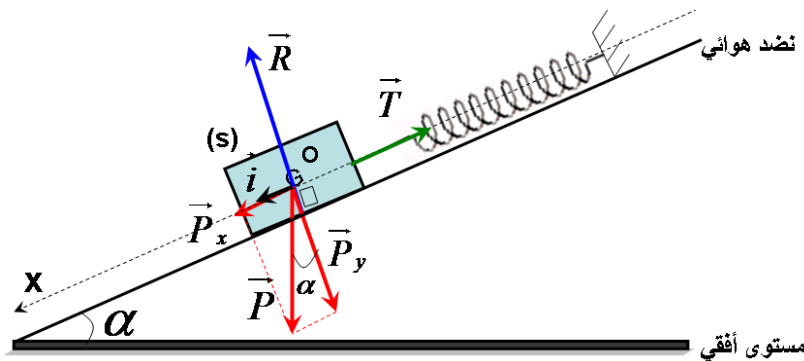
$$\Rightarrow$$

$$T_0 = 0,628s$$

### ❖ تطبيق : النواس المرن المائل

نعتبر جسم (S) صلب كتلته  $m = 100g$  بإمكانه أن يتزحلق بدون احتكاك فوق نضد هوائي ، مائل بزاوية  $\alpha = 10^0$  بالنسبة للمستوى

الأفقي هذا الجسم مرتبط بنابض كما الشكل التالي :



علما أن إطالة النابض عند التوازن  $\Delta l_0 = 8cm$  و  $g = 9,8N/kg$

1 – أوجد صلابة النابض ؟

2 – نزيح الجسم الصلب عن موضع توازنه المستقر نحو الأسفل ب  $3cm$  ثم نحرره بدون سرعة بدئية :

2 – 1 أوجد المعادلة التفاضلية للحركة ؟

2 – 2 علما أن مركز قصور الجسم يمر عند اللحظة  $t = 0$  من النقطة ذات الأفضول  $x = \pm 1,5cm$  في المنحنى الموجب

أوجد المعادلة الزمنية للحركة التذبذبية ؟

2 – 3 أحسب الدور الخاص للحركة التذبذبية ؟

1 – دراسة الجسم (S) عند التوازن

المجموعة المدروسة :  $\{S\}$  الجسم

جرد القوى المطبقة على الجسم (S)

$\vec{P}$  : وزن الجسم (S)

$\vec{R}$  : تأثير سطح النضد الهوائي

$\vec{T}$  : توتر النابض  $T = k\Delta l_0$

بما أن الجسم (S) في حالة توازن فإنه حسب شرط التوازن :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

نسقط العلاقة المتجهية وفق المحور  $(O, \vec{i})$  :

$$\vec{P}_x + \vec{R}_x + \vec{T}_x = \vec{0}$$

$$P_x + 0 - T = 0$$

ومنه :  $T = k\Delta l_0 = mg \cdot \sin \alpha$  و  $mg \cdot \sin \alpha - T = 0$

$$k = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{\Delta l_0} = \frac{0,1 \times 9,8 \times \sin 10^\circ}{8 \cdot 10^{-2}} = 2,13N/m$$

2 – 1 خلال الحركة :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = m \cdot \vec{a}_G$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة المتجهة على محور المعلم :  $(O, \vec{i})$  :

$$\vec{P}_x + \vec{R}_x + \vec{T}_x = m\vec{a}$$

$$mg \sin \alpha + 0 - k(\Delta l_0 + x) = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{mg \cdot \sin \alpha - k\Delta l_0}_{=0 \text{ عند التوازن}} - kx = m\ddot{x}$$

المعادلة التفاضلية للحركة :  $m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

2 – 2 بما أن المعادلة من الدرجة الثانية فإن حلها عبارة عن دالة جيبيية تكتب على شكل :  $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

لدينا :  $x_m = 3cm$

$$x(t=0) = x_m \cos(\varphi) = 1,5$$

$$\cos \varphi = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

بما الجسم (S) يمر عن اللحظة  $t=0$  في المنحنى الموجب فإن :  $\varphi > 0$

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\dot{x}(t=0) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)x_m \sin(\varphi) > 0$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{3}}$$

ومنه فإن :

أي :  $\sin \varphi < 0$

$$x(t=0) = x_m \cos(\varphi) = 1,5$$

وبالتالي المعادلة الزمنية :

$$x(t) = 3.10^{-2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

2 - 3 الدور الخاص  $T_0$  :

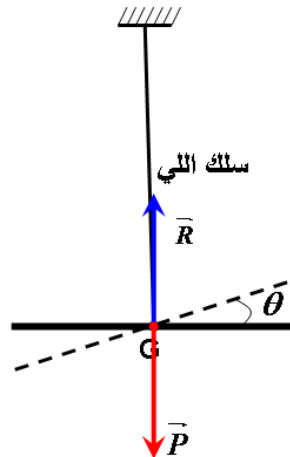
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_0 = 2 \times 3,14 \times \sqrt{\frac{0,1}{2,13}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 1,36s}$$

❖ تطبيق : نواس اللي

يمثل الشكل التالي سلكا فولاذيا رأسيا ثابتة ليه  $C = 0,65N.m/rad$  مثبتا من طرفه السفلي بمركز قصور قضيب متجانس عزم قصوره

بالنسبة لمحور الدوران  $J_{\Delta}$  :



ندير القضيب أفقيا بزاوية  $\theta_m = \pm \frac{\pi}{4}$  ثم نحرره بدون سرعة بدئية فتصبح له حركة تذبذبية في غياب الاحتكاكات تبقى الذبذبات مصنونة فينجز 20 ذبذبة خلال 24 ثانية.

علما أنه عند اللحظة  $t = 0$  يمر من الموضع المعلم بالزاوية  $\theta = +\frac{\pi}{8}$  في المنحنى الموجب.

- 1 – أوجد المعادلة التفاضلية لحركة القضيب و بين أن حركة دورانية جيبيية ؟
- 2 – أحسب الدور الخاص  $T_0$  لهذا المتذبذب الميكانيكي ؟
- 3 – أوجد تعبير عزم القصور  $J_\Delta$  للقضيب بدلالة  $T_0$  و  $C$  ثم أحسب قيمته ؟
- 4 – أوجد المعادلة الزمنية للحركة ؟

1 – المجموعة المدروسة : {القضيب}

جرد القوى المطبقة على القضيب

$\vec{P}$  : وزن القضيب

$\vec{R}$  : تأثير محور الدوران ( $\Delta$ )

$M_C$  : عزم مزدوجة اللي :  $M_C = -C\theta$

بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك في حالة دوران :

$$\sum M(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$$

لأن تأثيرهما يتقاطع مع محور الدوران :

$$-C \cdot \theta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

وبالتالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta} \cdot \theta = 0$$

المعادلة التفاضلية للحركة التذبذبية لنواس اللي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

حلها عبارة عن دالة جيبيية :

إن طبيعة الحركة دورانية جيبيية.

$$T_0 = \frac{24}{20} = 1,2s$$

و

$$20T_0 = 24s$$

2 – لدينا

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

3 – لنا

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{C}{J_\Delta} \Rightarrow J_\Delta = \frac{T_0^2 \cdot C}{4\pi^2}$$

$$J_\Delta = \frac{(1,2)^2 \times 0,65}{4 \times (3,14)^2} = 23,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

4 – المعادلة الزمنية :

$$\theta_m = +\frac{\pi}{4}$$

$$\theta(t=0) = \theta_m \cos \varphi = \frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \times \frac{4}{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

بما أن القضيب يمر عند اللحظة  $t = 0$  في المنحى الموجب  $v > 0$

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\dot{\theta}(t=0) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\theta_m \sin(\varphi) > 0$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} \cos\left(5,24t - \frac{\pi}{3}\right) \quad \varphi = -\frac{\pi}{3} \text{ أي } \sin \varphi < 0 \quad \text{ومنه فإن}$$

### المعجم العلمي

Support	حامل	Ressort	نابض
Oscillation	ذبذبة	Masselotte	سحمة
Suspension	معلق	Périodique	دوري
Simple	بسيط	Pesant	وازن
Tige	ساق	Elastique	مرن
Torsion	لي	Rappel	ارتداد
Stable	مستقر	Couple	مزدوجة
Equilibre	توازن	Position	موضع
Orienté	موجه	Amplitude	وسع
Amortissement	خمود	Propre	خاص
Régime	نظام	Frottement	احتكاك
Fort	حاد	Faible	ضعيف
Critique	حرج	Entretien	صيانة
Analogue	مماثلة	Vibration	اهتزاز
Résonateur	رنان	Excitateur	مثير
Résonance	رنين	Entretenu	مصونة