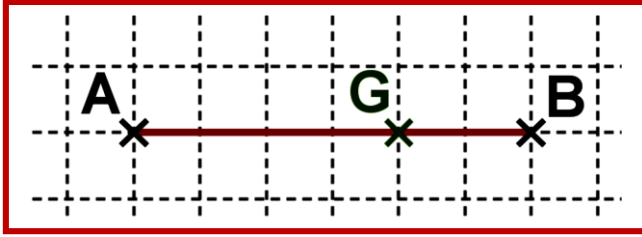


درس : المرجح في المستوى

I. مرجح نقطتين متزنيتين:

A. نقطة متزنة - المرجح لنقطتين متزنيتين:

1. نشاط:

A و B نقطتان من (\mathcal{P}) حيث I منتصف $[A, B]$.1. حدد G من (\mathcal{P}) حيث $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$.2. أنشئ G حيث: $\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}$.3. كم توجد من نقطة G حيث: $2\vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0}$.4. هل توجد نقطة G حيث: $3\vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0}$.

2. مفردات:

في الكتابة: $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$.

// العدد a يسمى وزن النقطة A, أو نقول أن النقطة A معينة بالمعامل a.

// الزوج (A, a) يسمى نقطة متزنة.// المجموعة: $S = \{(A, a), (B, b)\}$ تسمى نظمة متزنة.// في حالة $a + b \neq 0$: G تسمى مرجح النظمة المتزنة S.// حالة خاصة: $a = b$ و $a \neq 0$. G تسمى مركز ثقل A و B.

3. خاصية و تعريف:

لتكن (A, a) و (B, b) نقطتين متزنيتين من المستوى (\mathcal{P}) حيث $A \neq B$ و a و b من \mathbb{R} .• إذا كان $a + b \neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G من (\mathcal{P}) حيث $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$.• G تسمى مرجح النظمة المتزنة $S = \{(A, a), (B, b)\}$ أو G مرجح النقطتين المتزنيتين (A, a) و (B, b) .

4. برهان:

(1): $(a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0} \text{ و } a + b \neq 0)$ $(1) \Leftrightarrow a\vec{GA} + b\vec{GA} + b\vec{AB} = \vec{0} \text{ و } a + b \neq 0$ $\Leftrightarrow (a + b)\vec{AG} = b\vec{AB} \text{ و } a + b \neq 0$ $\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{b}{a + b}\vec{AB} \text{ و } a + b \neq 0$ بمأن A و B نقطتين معلومتين من (\mathcal{P}) إذن المتجهة \vec{AB} وحيدة و نفس الشيء للعدد $\frac{b}{a + b}$ فهو وحيد و بالتالي النقطة G وحيدةحيث $\vec{AG} = \frac{b}{a + b}\vec{AB}$.• خلاصة: G وحيدة حيث $a + b \neq 0$ و $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{0}$.

B. خاصيات مرجح نقطتين متزنيتين:

1. صمود:

a. نشاط:

النقطة G مرجح النظمة المتزنة $S = \{(A, a), (B, b)\}$.1. حدد G' مرجح النظمة المتزنة $\{(A, ka), (B, kb)\}$ هل هناك شرط على k؟ أعط الخاصية.

b. خاصية:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$ فإن لكل k من \mathbb{R}^* ؛ G هي كذلك مرجح النظمة المتزنة $\{(A,ka),(B,kb)\}$ (مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب وزنيهما في نفس العدد الحقيقي الغير المنعدم).

2. الخاصية المميزة :

a. نشاط:

(1) G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$: [(1) و M نقطة من (\mathcal{P}) .

أ - أكتب $a\overline{MA} + b\overline{MB}$ بدلالة \overline{MG} .

ب: أتم التكافؤ التالي: $\overline{MG} = (a\overline{MA} + b\overline{MB})$ \Leftrightarrow (1)

(2) نأخذ: $A=M$ أو $B=M$ في العلاقة (1) ماذا تستنتج ؟

b. الخاصية المميزة :

/// G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$ يكافئ $\overline{MG} = a\overline{MA} + b\overline{MB}$ $\forall M \in (\mathcal{P})$ و $a+b \neq 0$

/// A و B و G نقط مستقيمة حيث: $\overline{AG} = \frac{b}{a+b} \overline{AB}$

3. موقع أو إنشاء G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,a),(B,b)\}$

/// طريقة تقسيم $[AB]$ إلى $|a+b|$ قطعة متساوية.

من خلال الكتابة $\overline{AG} = \frac{b}{a+b} \overline{AB}$ نستنتج أن:

بتقسيم $[AB]$ إلى $|a+b|$ قطعة متساوية طول كل قطعة هو $d = \frac{AB}{|a+b|}$ و G تكون على بعد $|b| \times d$ من A (أو أيضا النقطة G موقع

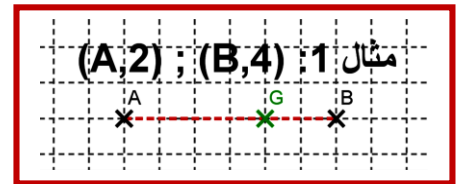
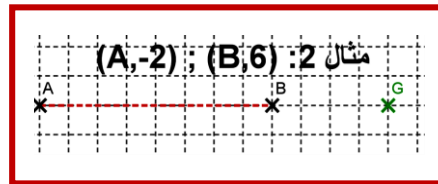
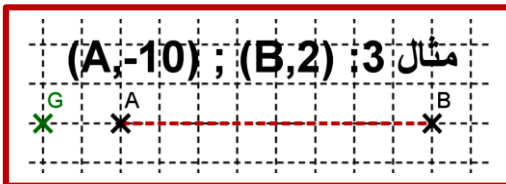
يكون على بعد $|b|$ قطعة من جهة A) و الاتجاه يحدد حسب الحالات التالية.

/// $\frac{b}{a+b} \in [0,1]$ فإن $G \in [AB]$ (G ذلك داخل القطعة)

/// $\frac{b}{a+b} > 1$ فإن $G \in [AB]$ و $G \notin [AB]$ (G خارج القطعة في اتجاه B) .

/// $\frac{b}{a+b} < 0$ فإن $G \in [BA]$ و $G \notin [AB]$ (G خارج القطعة و ليست في اتجاه B) .

/// مثال 1: $\{(A,2),(B,4)\}$ ؛ (أنشئ G) مثال 2: $\{(A,-2),(B,6)\}$ ؛ (أنشئ G) مثال 3: $\{(A,-10),(B,2)\}$ ؛ (أنشئ G)

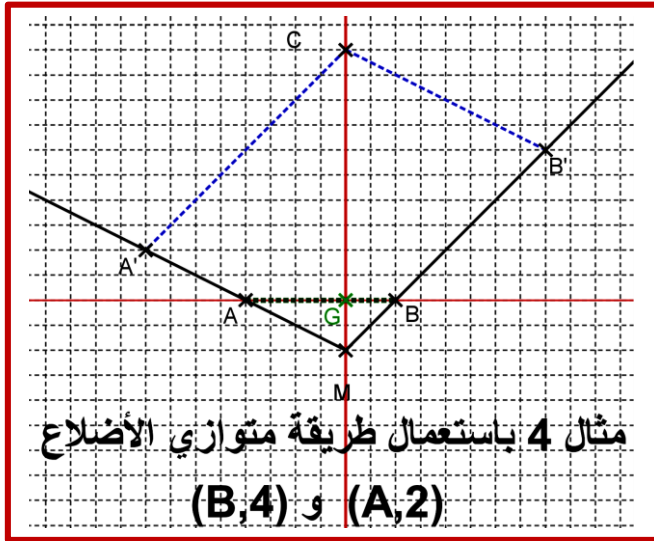


/// طريقة متوازي الأضلاع:

نأخذ نقطة M حيث: $M \notin (AB)$ (أي خارج المستقيم (AB)).

ننشئ النقطتان A' و B' حيث $\overline{MA'} = a\overline{MA}$ و $\overline{MB'} = b\overline{MB}$ (1) ومنه $\overline{MC} = \overline{MA'} + \overline{MB'}$ (3) أي $[MC]$ قطر لمتوازي الأضلاع $A'MB'C$.

درس : المرحح في المستوى



حسب الخاصية المميزة : $(2) \ a\overline{MA} + b\overline{MB} = (a+b)\overline{MG}$
من خلال (1) و (2) نحصل على: $(4) \ \overline{MA} + \overline{MB} = (a+b)\overline{MG}$
من خلال (3) و (4) نحصل على $(a+b)\overline{MG} = \overline{MC}$
ومنه : M و G و C نقط مستقيمة إذن $G \in (MC)$
ونعلم بأن A و B و G نقط مستقيمة. إذن $G \in (AB)$
ومنه $(MC) \cap (AB) = \{G\}$ بالتالي $G \in (AB) \cap (MC)$.
مثال: (A,4) و (B,3)

4. تطبيقات:

a. حدد مجموعة النقط M من المستوى (P) حيث: $\|2\overline{MA} + 4\overline{MB}\| = 12$

b. حدد مجموعة النقط M من المستوى (P) حيث: $\|2\overline{MA} + 4\overline{MB}\| = \|4\overline{MA} + 2\overline{MB}\|$

جواب:

a. نحدد مجموعة النقط:

نعتبر G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,2), (B,4)\}$. حسب الخاصية المميزة نحصل على: $\|2\overline{MA} + 4\overline{MB}\| = 6 \Leftrightarrow \|6\overline{MG}\| = 12$

$$\Leftrightarrow \|\overline{MG}\| = 2$$

$$\Leftrightarrow MG = 2$$

خلاصة : مجموعة النقط هي : الدائرة $C(G,2)$.

b. نحدد مجموعة النقط:

نعتبر G مرجح النظمة المتزنة $\{(A,2), (B,4)\}$ و G' مرجح النظمة المتزنة $\{(A,4), (B,2)\}$.

حسب الخاصية المميزة نحصل على: $\|2\overline{MA} + 4\overline{MB}\| = \|4\overline{MA} + 2\overline{MB}\| \Leftrightarrow \|6\overline{MG}\| = \|6\overline{MG'}\|$

$$\Leftrightarrow \|\overline{MG}\| = \|\overline{MG'}\| \Leftrightarrow MG = MG'$$

خلاصة : مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GG']$.

c. إحداثيتي G مرجح النظمة متزنة $S = \{(A,a), (B,b)\}$:

1. نشاط:

المستوى (P) منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $G(x_G, y_G)$

1. أعط إحداثيتي المتجهة \overline{OA} و \overline{OB} .

2. أكتب المتجهة \overline{OG} بدلالة المتجهات: \overline{OA} و \overline{OB} .

3. استنتج إحداثيتي G بدلالة إحداثيات النقط A و B.

2. خاصية:

المستوى (P) منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $G(x_G, y_G)$ نقط من (P).

$$G \text{ مرجح النظمة المتزنة } \{(B,b); (A,a)\} \text{ فان: } x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \text{ و } y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$$

درس : المرجح في المستوى

II. مرجح ثلاث نقط متزنة :

A. مرجح ثلاث نقط متزنة:

1. نشاط:

نريد معرفة هل توجد نقطة وحيدة G من (P) بالنسبة لنقط المتزنة $\{(C,4);(B,-3);(A,1)\}$ (أي $\overline{GA} - 3\overline{GB} + 4\overline{GC} = \vec{0}$)

1 أكتب \overline{GA} بدلالة \overline{AB} و \overline{AC} . ثم استنتج وحدانية G .

2 لتكن K مرجح $\{(B,-3);(A,1)\}$:

أ- بين : $-2\overline{GK} + 4\overline{GC} = \vec{0}$.

ب- ماذا يمكن أن نستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

ج- ماذا يمكن أن نقول عن النقط G و K و C ؟

2. تعريف و خاصية :

لتكن $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ ثلاث نقط متزنة من المستوى (P) حيث : $a+b+c \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G تحقق : $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = \vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$

النقطة G تسمى مركز ثقل المثلث ABC .

3. ملحوظة:

A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي إذن: $\overline{AA'} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ و G مركز ثقل المثلث ABC إذن

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}. \text{ ومنه: } \overline{GA} + (\overline{GA} + \overline{AB}) + (\overline{GA} + \overline{GC}) = \vec{0}$$

$$\overline{CG} = \frac{1}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB} \text{ و } \overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC} \text{ و } \overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} //$$

$$\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{AA'} // \text{ ومنه: } //$$

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BA'} \text{ و } \overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CA'} \text{ بنفس الطريقة نحصل على: } //$$

B. خاصيات:

1. صمود:

a. خاصية:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ فإن لكل k من \mathbb{R}^* ؛ G هي كذلك مرجح النظمة المتزنة

$\{(A,ka);(B,kb);(C,kc)\}$. (مرجح لثلاث نقط متزنة لا يتغير بضرب معاملاتهما في نفس العدد الحقيقي الغير المنعدم).

2. الخاصية المميزة:

a. خاصية:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ إذا وفقط إذا كان : $a+b+c \neq 0$ و

$$\forall M \in (P) : a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = (a+b+c)\overline{MG}$$

3. تجميعية المرجح : (المرجح الجزئي)

a خاصية:

مرجح ثلاث نقط متزنة لا يتغير إذا عوضنا نقطتين منها بمرجحين بوزن يساوي مجموع وزنيهما .
أو أيضا : G_2 مرجح $\{(A,a),(B,b)\}$ (مع $a+b \neq 0$) و G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ فان G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$.

b برهان:

G مرجح $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$. G_2 مرجح $\{(A,a),(B,b)\}$ (مع $a+b \neq 0$).

نبين أن : G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$.

لدينا:

$$\begin{aligned} (a+b)\overrightarrow{GG_2} + c\overrightarrow{GC} &= a\overrightarrow{GG_2} + b\overrightarrow{GG_2} + c\overrightarrow{GC} \\ &= a\overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{AG_2} + b\overrightarrow{GB} + b\overrightarrow{BG_2} + c\overrightarrow{GC} \\ &= a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + a\overrightarrow{AG_2} + b\overrightarrow{BG_2} \\ (\{(A,a),(B,b)\} \text{ مرجح } G_2 \text{ و } \{(C,c);(B,b);(A,a)\} \text{ مرجح } G) &= \underbrace{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}}_0 + \underbrace{a\overrightarrow{AG_2} + b\overrightarrow{BG_2}}_0 \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

خلاصة: G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c),(G_2,a+b)\}$.

c أمثلة:

مثال 1 : مركز ثقل مثلث:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,1);(B,1);(A,1)\}$ (أي مركز ثقل المثلث ABC . A' منتصفات $[BC]$ إذن A' مرجح $\{(C,1);(B,1)\}$)

ومنه : G مرجح النظمة المتزنة $\{(A',2);(A,1)\}$. إذن : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$

مثال 2:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,3);(B,-2);(A,-2)\}$

نعتبر G_2 مرجح $\{(A,-2);(B,-2)\}$ إذن G_1 منتصف $[AB]$.

ومنه : G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,3);(G_2,-4)\}$. وبالتالي : $\overrightarrow{CG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{CG_2} = \frac{-4}{-1} \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$

C إحدائيتي G مرجح النظمة متزنة:

1 نشاط:

المستوى (P) منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ و $G(x_G, y_G)$

1. أعط إحدائيتي المتجهة \overrightarrow{OA} و \overrightarrow{OB} و \overrightarrow{OC} . ثم أكتب المتجهة \overrightarrow{OG} بدلالة المتجهات: \overrightarrow{OA} و \overrightarrow{OB} و \overrightarrow{OC}

2. استنتج إحدائيتي G بدلالة إحداثيات النقط A و B و C .

2 خاصية:

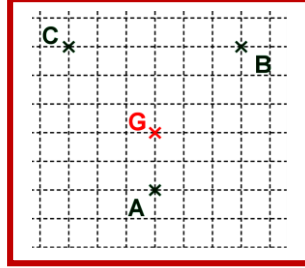
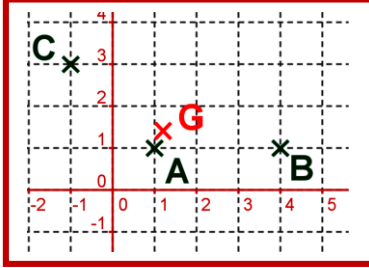
المستوى (P) منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ و $G(x_G, y_G)$ نقط من (P) .

G مرجح النظمة المتزنة $\{(C,c);(B,b);(A,a)\}$ فان: $x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$ و $y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$

درس : المرحح في المستوى

3. إنشاء مرجح ثلاث نقط متزنة:

مثال 2

مثال 1 $\{(C,1);(B,1);(A,3)\}$ مثال: aمثال 1: أنشئ G مرجح $(A,3) ; (B,1) ; (C,1)$.مثال 2: في المستوى (P) منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) نعتبر النقط $(A(1,1);3)$ و $(B(4,1);1)$ و $(C(-1,3);1)$ حدد إحداثيتي $G(a,b)$ مرجح النقط المتزنة .

III. مرجح أربع نقط متزنة:

A. مرجح أربع نقط متزنة:

1. نشاط

ليكن ABCD متوازي الاضلاع مركزه O. لتكن $(A,1);(B,1);(C,1)$ و $(D,1)$ أربع نقط متزنة من (P) .1) حدد G_1 مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,1)$ 2) حدد G_2 مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(D,1)$ 3) هل النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ تقبل نقطة G من (P) حيث: $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0}$

4) أعط استنتاج لذلك .

2. تعريف وخاصية:

لتكن $(A,a);(B,b);(C,c);(D,d)$ أربع نقط متزنة من المستوى (P) حيث: $a+b+c+d \neq 0$.// توجد نقطة وحيدة G تحقق: $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} + d\overline{GD} = \vec{0}$.// النقطة G تسمى مرجح النظمة المتزنة $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$ // $a=b=c=d$ النقطة G تسمى مركز ثقل الرباعي ABCD.

B. خاصيات:

1. صمود:

a. خاصية:

G مرجح النظمة المتزنة $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$ لكل k من \mathbb{R}^* ؛ G هي كذلك مرجح النظمة المتزنة $\{(D,kd);(C,kc);(B,kb);(A,ka)\}$

(مرجح لأربع نقط متزنة لا يتغير بضرب معاملاتهما في نفس العدد الحقيقي الغير المنعدم).

2. الخاصية المميزة:

a. خاصية:

مرجح النظمة المتزنة $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$ إذا و فقط إذا كان $a+b+c+d \neq 0$ ولكل نقطة M من (P)

$$a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} + d\overline{MD} = (a+b+c+d)\overline{MG}$$



درس : المرجح في المستوى

3. تجميعية المرجح :

a. خاصية:

G مرجح النظمة : $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$

1. مرجح أربع نقط متزنة لا يتغير إذا عوضنا نقطتين منها بمرجحها و بوزن يساوي مجموع وزنيهما (أو 3 نقط منها) .

أو أيضا : G_2 مرجح $\{(A,a), (B,b)\}$ (مع $a+b \neq 0$) فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(G_1, a+b), (C,c), (D,d)\}$

2. مرجح أربع نقط متزنة لا يتغير إذا عوضنا ثلاث منها بمرجحها و بوزن يساوي مجموع أوزانها الثلاثة.

أو أيضا : G_3 مرجح $\{(A,a), (B,b), (C,c)\}$ (مع $a+b+c \neq 0$) فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(G_3, a+b+c), (D,d)\}$

C. إحدائتي G مرجح نظمة متزنة:

1. نشاط : هل بإمكانك إعطاء إحدائتي النقط G بدلالة

إحدائيات النقط A و B و C و D الأوزان a و b و c و d .

2. خاصية :

المستوى (P) منسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ نقط من (P) .G (x_G, y_G) مرجح النظمة المتزنة $\{(D,d);(C,c);(B,b);(A,a)\}$ فان :

$$y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \text{ و } x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d}$$