# Variables aléatoires (corrigé niveau 1).

**Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.**

1. Notons $G_n$ l'événement : « 6 sort au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

   Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (X = n) = \overline{G_1} \cap \dots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n$.

   On a par ailleurs : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et puisque les lancers sont indépendants, on a donc :

   $$\forall\ n \geq 1,\ P(X = n) = P(\overline{G_1} \cap \dots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n) = P(\overline{G_1})\dots P(\overline{G_{n-1}}).P(G_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}.$$

   $X$ suit bien la loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

2. $X$ étant à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$, $Y$ est également à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$.

   De plus : $\forall\ k \in \{0,\dots,n\},\ (Y = k) \Leftrightarrow (X = n-k)$, donc :

   $$\forall\ k \in \{0,\dots,n\},\ P(Y = k) = P(X = n-k) = \binom{n}{n-k}.p^{n-k}.(1-p)^k = \binom{n}{k}.(1-p)^k.p^{n-k}.$$

   Autrement dit, $Y$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1-p)$.

3. On note tout d'abord que les valeurs prises par $X^2$ sont 0, 1 et 4.
   Puis :
   - $P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0.15$,
   - $P(X^2 = 1) = P((X = 1) \cup (X = -1)) = P(X = 1) + P(X = -1) = 0.60$, et :
   - $P(X^2 = 4) = P((X = 2) \cup (X = -2)) = P(X = 2) + P(X = -2) = 0.25$,

   où on a utilisé le fait que les événements dans les réunions étaient incompatibles.

4. a. Notons tout d'abord que l'univers « naturel » de cette expérience est $\{1,\dots,n\}^2$, ensemble des $n^2$ couples d'entiers entre 1 et $n$, correspondant aux faces supérieures des dés rendus discernables.
   De plus la variable aléatoire S vérifie : $S(\Omega) = \{2,3,\dots,2.n\}$.
   L'événement $(S = i)$, pour : $1 \leq i \leq n+1$, correspond aux couples dont la somme des éléments fait $i$ autrement dit aux couples $(j, i-j)$, avec : $1 \leq j \leq n$, et : $1 \leq i-j \leq n$, soit : $1 \leq j \leq i-1$.
   Il y a donc $i-1$ tels couples et la probabilité utilisée dans cette modélisation étant uniforme, on en déduit que : $P(S = i) = \dfrac{i-1}{n^2}$.

   b. De même, pour : $n+2 \leq i \leq 2.n$, l'événement $(S = i)$ correspond aux couples $(j, i-j)$, avec : $1 \leq j \leq n$, et : $1 \leq i-j \leq n$, soit : $i-n \leq j \leq n$.
   Il y a : $n-(i-n+1) = 2.n-i+1$, tels couples et : $P(S = i) = \dfrac{2.n-i+1}{n^2}$.

   c. Par réunion disjointe (ou événements incompatibles) : $(S \leq n+1) = \bigcup\limits_{k=2}^{n+1}(S = k)$, et :

   $$P(S \leq n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} P(S = k) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}.\frac{n.(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2.n}.$$

5. Il nous faut donc déterminer : $p_0 = P(X = 0)$, $p_1 = P(X = 1)$ et : $p_2 = P(X = 2)$.
   Or on sait que :
   - $1 = E(X) = \sum\limits_{i=0}^{2} i.P(X = i) = 0.p_0 + 1.p_1 + 2.p_2$, et :
   - $\dfrac{1}{2} = E(X^2) - (E(X))^2 = \left(\sum\limits_{i=0}^{2} i.^2 P(X = i)\right) - 1^2 = 0.p_0 + 1.p_1 + 4.p_2 - 1.$

On est amené à résoudre le système : $\begin{cases} p_1 + 2.p_2 = 1 \\ p_1 + 4.p_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, soit : $p_1 = \dfrac{1}{2}$, et : $p_2 = \dfrac{1}{4}$.

Enfin, $p_0$ s'obtient par le fait que la somme des probabilités doit donner 1, soit : $p_0 = \dfrac{1}{4}$.

6. Soit $X$ une variable aléatoire admettant une variance et telle que : $V(X) = E((X - E(X))^2) = 0$.
   Notons alors : $X' = (X - E(X))^2$, et : $X'(\Omega) = \{x'_n, n \geq 0\}$.
   Alors les valeurs $x'_n$ sont positives (puisque $X'$ est un carré) et : $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} x'_n.P(X' = x'_n)$.
   Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x'_n.P(X' = x'_n) = 0$.
   On en déduit que si : $x'_n \neq 0$, $P(X' = x'_n) = 0$.
   Enfin la famille $('X' = x'_n), n \geq 0)$ forme un système complet d'événements donc :
   $1 = P(X' = 0) + \sum_{x'_n \neq 0} P(X' = x'_n)$ et : $P(X' = 0) = 1$.
   On en déduit que $X'$ est nulle presque sûrement, donc : $X = E(X)$, presque sûrement ce qui peut aussi s'exprimer en disant que $X$ est presque sûrement constante.

7. Il suffit de vérifier que :
   - $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \geq 0$, ce qui est le cas,
   - $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, ce qui est aussi le cas puisque la série est télescopique avec : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

   Ces deux points garantissent alors qu'il existe bien une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par la famille $(n.p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

8. a. Toutes les valeurs proposées sont positives et :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.2^n.\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{\ln(2)}.(-\ln(1 - \frac{1}{2})) = 1.$$
   Donc $(n.p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien la loi de probabilité d'une variable discrète $X$.

   b. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n$ est absolument convergente.

   Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq n.p_n = \dfrac{1}{2^n.\ln(2)}$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

   Donc $X$ admet une espérance et : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n.\ln(2)} = \dfrac{1}{\ln(2)}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

   c. Comme fonction affine de $X$, $Y$ admet une espérance et : $E(Y) = (\ln(2)).E(X) - 1 = 0$.
   $Y$ est donc une variable centrée.

9. a. La famille est constituée de réels positifs et : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1$.

   Donc $(n.p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien la loi de probabilité d'une variable discrète $X$.

   b. A nouveau $X$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n$ converge, ce qui est le cas car :

   $\forall$ n $\geq$ 1, $n^2.(n.p_n) = n^3.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, qui tend vers 0 en $+\infty$ du fait du théorème des croissances comparées.

Puis : $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} n.p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}.\right)^2} = \frac{3}{4}$.

c. Pour la même raison qu'au-dessus la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.p_n$ converge donc $X^2$ admet une espérance par le théorème de transfert et $X$ admet une variance.

Puis : $E(X^2)=\sum_{n=0}^{+\infty} n^2.p_n = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2.\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}.\right)^3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}.\right)^2} = \frac{3}{2}$.

On en déduit que : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = \frac{3}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$.

10. Notons : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $B_k$ l'événement : « la $k$ ième boule tirée est Blanche ».
On note pour commencer que : $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(X=n)=\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{n-1}}\cap B_n$.
Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n)=P(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{n-1}}\cap B_n)=P(\overline{B_1})\ldots P(\overline{B_{n-1}}).P(B_n)$,
par indépendance des tirages.
De plus : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $P(B_k)=\frac{k+1}{2.k+1}$,
puisqu'avant le $k$ ième tirage, la boîte contient $k+1$ boules Blanches sur un total de $2.k+1$.
Donc : $\forall\ n\geq 1$, $P(X=n)=\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k+1}{2.k+1}\right)\right).\frac{n+1}{2.n+1} = \frac{n+1}{2.n+1}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2.k+1} = \frac{2^n.(n+1)!.(n-1)!}{(2.n+1)!}$.

11. Notons tout d'abord que : $X(\Omega)=\{1,2,\ldots,n-1\}$.
Puis : $\forall\ 1\leq k\leq n-1$, notons $B_k$ l'événement : « on tire une boule Blanche au $k$ ième tirage ».
Alors : $\forall\ 1\leq k\leq n-1$, $(X=k)=\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k$.
Donc par la formule des probabilités composées :
$\forall\ 1\leq k\leq n-1$, $P(X=k)=P(\overline{B_1}).P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\ldots P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}}).P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)$, et :
$\forall\ 1\leq k\leq n-1$, $P(X=k)=\frac{n-2}{n}.\frac{n-3}{n-1}\ldots\frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)+1}.\frac{2}{n-k+1}=\frac{2.(n-k)}{n.(n-1)}$.
$X$ prenant un nombre fini de valeurs, elle admet une espérance et une variance et :
$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1} k.P(X=k)=\sum_{k=1}^{n-1} k.\frac{2.(n-k)}{n.(n-1)}=\frac{2}{n.(n-1)}.\sum_{k=1}^{n-1} k.(n-k)$,
d'où à l'aide de sommes classiques :
$E(X)=\frac{2}{n.(n-1)}.\left(n.\frac{n.(n-1)}{2}-\frac{n.(n-1).(2.n-1)}{6}\right)=n-\frac{2.n-1}{3}=\frac{n+1}{3}$.
Puis : $E(X^2)=\sum_{k=1}^{n-1} k^2.P(X=k)=\frac{2}{n.(n-1)}.\sum_{k=1}^{n-1}(n.k^2-k^3)=\frac{2}{n.(n-1)}.\left(n.\frac{n.(n-1).(2.n-1)}{6}-\frac{n^2.(n-1)^2}{4}\right)$,
et : $E(X^2)=\frac{n.(2.n-1)}{3}-\frac{n.(n-1)}{2}=\frac{n.(n+1)}{6}$,
d'où : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{n.(n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{9}=\frac{(n+1).(n-2)}{18}$.

12. On commence par écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(X\geq n)=(X=n)\cup(X\geq n+1)$,
et par incompatibilité : $P(X\geq n)=P(X=n)+P(X\geq n+1)$.

On en déduit que : $\dfrac{P(X=n)}{k} = P(X=n) + \dfrac{P(X=n+1)}{k}$,

donc : $(1-k).P(X=n) = P(X=n+1)$,

et par récurrence immédiate : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = (1-k)^n.P(X=0)$.

Enfin on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1 = P(X=0).\sum_{n=0}^{+\infty}(1-k)^n = \dfrac{P(X=0)}{k}$,

donc : $P(X=0) = k$,

et finalement : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = k.(1-k)^n.P(X=0)$.

On peut remarquer que la variable $X+1$ suit la loi géométrique $\mathscr{G}(k)$.

13. a. Il est immédiat que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \dfrac{a^n}{n!}.P(X=0)$.

Et comme : $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = P(X=0).\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n!} = e^a.P(X=0)$, et donc : $P(X=0) = e^{-a}$.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \dfrac{a^n}{n!}.e^{-a}$.

b. $X$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n.p_n$ est absolument convergente.

Or $n^2.(n.p_n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ (théorème des croissances comparées), donc $X$ admet une espérance et : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.\dfrac{a^n}{n!}.e^{-a} = a.e^{-a}.\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!} = a.e^{-a}.e^a = a$.

c. La variable aléatoire $X$ admet un moment d'ordre 2 car par le théorème de transfert, cela revient à étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.p_n$ qui converge pour une raison similaire à celle de la question b.

Puis : $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2.\dfrac{a^n}{n!}.e^{-a} = a.e^{-a}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!} = a.e^{-a}.\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).\dfrac{a^n}{n!} = a.e^{-a}.\left(a.\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n!}\right)$,

donc : $E(X^2) = a.e^{-a}.\left(a.e^a + e^a\right) = a^2 + a$.

Enfin : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = a^2 + a - a^2 = a$.

14. a. Notons que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et posons : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ p_n = P(X=n)$.

La suite ( $p_n$ ) vérifie une relation de récurrence double, d'équation caractéristique : $3.r^2 - 4.r + 1 = 0$, dont les racines sont 1 et $\dfrac{1}{3}$.

Donc : $\exists\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ p_n = \alpha + \beta.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

De plus la série $\sum_{n\geq 0} p_n$ doit être convergente (et de somme 1), donc : $\alpha = 0$.

Enfin : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$, et donc on doit prendre : $\beta = \dfrac{2}{3}$.

La loi de $X$ est donc donnée par : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b. La série $\sum_{n\geq 0} n.\dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ converge (car $n^2.n.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0) donc $X$ admet une espérance.

De même $\sum_{n\geq 0} n^2.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge pour une raison similaire et par le théorème de transfert, $X^2$ admet une espérance et $X$ admet une variance.

Puis : $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} n.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{9}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

De même : $E(X^2)=\sum_{n=0}^{+\infty} n^2.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}.\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2.\sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$, soit :

$$E(X^2)=\frac{2}{27}.\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+\frac{2}{9}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1, \text{ et enfin : } V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

15. a. Avant le tirage $n$, la boîte contient $n$ boules Noires et 1 boule Blanche et $n+1$ au total.
L'ensemble des valeurs possibles de $Y$ est $\mathbb{N}^*$, soit : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Notons ensuite pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n$ l'événement « on tire une boule Noire au tirage $n$ ».
Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(Y=n)=\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{n-1}}\cap N_n$, et :

$$P(Y=n)=P(\overline{N_1}).P_{\overline{N_1}}(\overline{N_2})\ldots P_{\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{n-2}}}(\overline{N_{n-1}}).P_{\overline{N_1}\cap\ldots\cap\overline{N_{n-1}}}(N_n)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n}.\frac{n}{n+1}=\frac{n}{(n+1)!}.$$

De même : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $(Z=n)=N_1\cap\ldots\cap N_{n-1}\cap\overline{N_n}$, et :

$$P(Z=n)=P(N_1).P_{N_1}(N_2)\ldots P_{N_1\cap\ldots\cap N_{n-2}}(N_{n-1}).P_{N_1\cap\ldots\cap N_{n-1}}(\overline{N_n})=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}.\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n.(n+1)}.$$

b. Y admet une espérance car : $n^2.n.P(Y=n)=\frac{n^4}{(n+1)!}$, tend vers 0 en $+\infty$ et $\sum_{n\geq 1} n.P(Y=n)$ converge.

Puis : $E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1).n-(n+1)+1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}$,
et avec la série exponentielle : $E(Y)=e-(e-1)+(e-1-1)=e-1$.

c. Puisque : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $n.P(Z=n)=\frac{1}{n+1}$, la variable aléatoire $Z$ n'admet pas d'espérance.

16. Il est clair que puisque la bactérie peut être ratée à chaque tir, il se peut que la bactérie soit touchée $r$ fois au terme d'un nombre de tirs aussi grand qu'on veut (mais au minimum égal à $r$) et qu'elle puisse même ne jamais mourir.
On a donc : $X(\Omega)=\{r, r+1, \ldots\}\cup\{+\infty\}$.
Pour : $n\geq r$, l'événement $(X=n)$ correspond au fait que la bactérie a été touchée $r-1$ fois au cours des $n-1$ premiers tirs et qu'elle soit touchée une dernière fois au $n^{\text{ième}}$ tir.
Le premier événement (qu'on pourrait formaliser à l'aide d'une autre variable aléatoire) correspond à l'obtention de $r-1$ succès dans la répétition $n-1$ fois d'une expérience de Bernoulli donc sa probabilité est donnée par une loi binomiale.
Le second (indépendant du premier) est une simple expérience de Bernoulli.
On peut donc écrire : $P(X=n)=\left(\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}.(1-p)^{n-r}\right).p=\binom{n-1}{r-1}p^r.(1-p)^{n-r}$.

On peut alors remarquer que : $\sum_{n=r}^{+\infty}P(X=n)=\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n-1}{r-1}p^r.(1-p)^{n-r}=\frac{p^r}{(r-1)!}.\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+r-1)!}{k!}.(1-p)^k$.

La dernière somme est donnée par la dérivée $(r-1)^{\text{ième}}$ de : $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, qui vaut :

$\forall\ x \in ]-1,+1[, \dfrac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(k+r-1)!}{k!}.x^k$ .

Donc : $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} P(X=n) = \dfrac{p^r}{(r-1)!}.\dfrac{(r-1)!}{(1-(1-p))^r} = 1$.

Comme enfin $\{(X=n), n \geq r\} \cup \{X=+\infty\}$, constitue un système complet d'événements, on en déduit que : $P(X=+\infty) = 1-1 = 0$ ,

et la bactérie meurt presque sûrement.

On peut également remarquer que : $r=1$, redonne la loi géométrique.

Enfin la série : $\displaystyle\sum_{n\geq r} n.P(X=n)$ converge car : $n.P(X=n) \underset{+\infty}{\sim} n^{r+1}.p^r.(1-p)^{n-r}$ ,

et la théorème des croissances comparées montre que cette dernière quantité tend vers 0 en +∞

Donc $X$ admet une espérance et :

$$E(X) = \sum_{n=r}^{+\infty} n.P(X=n) = \sum_{n=r}^{+\infty} n.\binom{n-1}{r-1} p^r.(1-p)^{n-r} = \frac{p^r}{(r-1)!}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+r)!}{k!}.(1-p)^k = \frac{p^r}{(r-1)!}.\frac{r!}{(1-p)^{r+1}} = \frac{r}{p},$$

à l'aide à nouveau d'une dérivée $r$ ième cette fois.

17. a. L'événement $(X > n)$ correspond à la situation où il est nécessaire d'acheter strictement plus de $n$ paquets pour obtenir la collection complète.

C'est donc exactement la même chose que le fait qu'il manque au moins une figurine dans la collection au bout de $n$ achats.

b. Ces trois probabilités valent 1 puisque pour obtenir la collection complète il faut au moins acheter 4 paquets de lessive.

c. Pour : $n \geq 1$, fixé, notons $A_i$ l'événement : « au $n$ ième achat, il manque au moins la figurine numéro $i$ ».

Alors : $(X > n) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

En application de la formule proposée, on identifie :

- il y a 4 événements $A_i$ qu'on peut interpréter comme suit : lors des $n$ ième premiers achats, on n'a donc obtenu que des figurines de numéros distincts de $i$.

Les combinaisons possibles de numéros de figurines lors de ces $n$ achats correspondent aux $n$-uplets de nombre choisis entre 1 et 4, et les $n$-uplets correspondant à $A_i$ sont au nombre de $3^n$.

L'indépendance des achats et l'équiprobabilité de trouver n'importe quelle figurine dans n'importe quel paquet fait qu'on obtient $P(A_i)$ à l'aide d'une probabilité uniforme sur l'univers qu'on vient de décrire,

et : $P(A_i) = \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

- il y a 6 événements $A_i \cap A_j$, pour tous les couples d'indices distincts entre 1 et 4.

On les interprète alors en disant que lors des $n$ ième premiers achats, on n'a obtenu que des figurines de numéros distincts de $i$ et de $j$, et avec des remarques similaires aux précédentes :

$P(A_i \cap A_j) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

- il y a 4 événements $A_i \cap A_j \cap A_k$, pour tous les triplets d'indices distincts entre 1 et 4.

Cette fois, il est équivalent de dire que lors des $n$ ième premiers achats, on n'a obtenu que des figurines de numéros distincts de $i$, de $j$ et de $k$, donc dont le numéro est le 4ième restant.

On en déduit que : $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{1}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

- enfin l'événement $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ est impossible car il correspond à obtenir des figurines dont le numéro est distinct de 1, 2, 3 et 4, qui sont les seuls possibles.

Finalement on a : $P(X > n) = 4.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 6.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n - 0$.

d. Puisque $X$ est à valeurs dans ℕ*, on peut utiliser la deuxième expression de l'espérance.

En effet, la série $\sum_{n\geq 0} P(X>n)$ converge comme somme de trois séries géométriques convergentes et :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geq n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n)=P(X>0)+\sum_{n=1}^{+\infty}P(X>n).$$

Enfin :

- $P(X>0)=1$, car l'événement est certain et :
- $E(X)=1+4.\frac{3}{4}.4-6.\frac{1}{2}.2+4.\frac{1}{4}.\frac{4}{3}=\frac{25}{3}$.

e. L'égalité proposée découle de la définition d'une probabilité si on ne considère que 2 événements.
Pour 3 événements $A,B,C$ on peut alors appliquer cette égalité à $A\cap B$ et $C$ et obtenir :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

On peut alors appliquer le même procédé pour 4 événements et obtenir le résultat proposé.

**Fonction de répartition.**

18. Puisque $((X=0),(X=1))$ forme un système complet d'événements, on a :

$1=P(X=0)+P(X=1)$, et donc : $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$,et $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Donc sa fonction de répartition $F_X$ vérifie :

- $\forall\ x<0$, $F_x(x)=P(X\leq x)=0$,
- $\forall\ 0\leq x<1$, $F_x(x)=P(X\leq x)=P(X=0)=\frac{1}{2}$, car : $(X\leq x)\Leftrightarrow(X=0)$,
- $\forall\ 1\leq x$, $F_x(x)=P(X\leq x)=P(X\leq 1)=1$.

19. a. Si on note $X_1$, $X_2$ les variables aléatoires donnant les résultats des dés 1 et 2, alors :

- $X=\max(X_1,X_2)$,
- $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$,
- et : $\forall\ x\in\{1,2,3,4,5,6\}$, $F_X(x)=P(X\leq x)=P((X_1\leq x)\cap(X_2\leq x))$.

Par indépendance des lancers, on en déduit que : $F_X(x)=P(X_1\leq x).P(X_2\leq x)$.
Comme enfin, les deux variables suivent la même loi $\mathscr{U}$(6), on en déduit que :

- $\forall\ x<1$, $F_x(x)=P(X\leq x)=0$,
- $\forall\ 1\leq k\leq 5$, $\forall\ k\leq x<k+1$, $F_X(x)=P(X\leq x)=P(X\leq k)=(P(X_1\leq k))^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2$,
- $\forall\ 6\leq x$, $F_x(x)=P(X\leq x)=P(X\leq 6)=1$.

b. Il suffit ensuite d'écrire : $\forall\ 1\leq k\leq 6$, $(X\leq k)=(X=k)\cup(X\leq k-1)$,
et par incompatibilité : $F_X(k)=P(X=k)+F_X(k-1)$, puis :

$$P(X=k)=F_X(k)-F_X(k-1)=\frac{k^2}{n^2}-\frac{(k-1)^2}{n^2}=\frac{2.k-1}{n^2}.$$

20. a. Notons $X_i$ les $N$ variables aléatoires donnant le résultat de chaque jeton tiré de l'urne numéro $i$.
Pour : $x\in\mathbb{R}$, on peut écrire : $\forall\ \omega\in\Omega$, $(X(\omega)\leq x)\Leftrightarrow(\max_{1\leq i\leq N}(X_i(\omega))\leq x)\Leftrightarrow(\forall\ 1\leq i\leq n,\ X_i(\omega)\leq x)$.

Donc : $F_X(x)=P(X\leq x)=P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leq x))=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leq x)$, puisque les tirages semblent indépendants.

Donc :

- $\forall\ x<1$, $\forall\ 1\leq i\leq N$, $P(X_i\leq x)=P(X_i\leq 0)=0$, et : $F_X(x)=0$,
- $\forall\ 1\leq k<n-1$, $\forall\ k\leq x<k+1$, $\forall\ 1\leq i\leq N$, $P(X_i\leq x)=P(X_i\leq k)=\frac{k}{n}$, et : $F_X(x)=\left(\frac{k}{n}\right)^N$,
- $\forall\ n\leq x$, $\forall\ 1\leq i\leq N$, $P(X_i\leq x)=P(X_i\leq n)=1$, et : $F_X(x)=1$.

b. On constate de plus que : $X(\Omega) = \mathbb{N}_n$.

Puis : $\forall\ k \in \mathbb{N}_n$, $(X \le k) = (X = k) \cup (X < k) = (X = k) \cup (X \le k-1)$,

car $X$ est à valeurs entières et l'union étant disjointe, on en déduit que :

$$P(X = k) = P(X \le k) - P(X \le k-1) = F_X(k) - F_X(k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N.$$

c. Puisque $X$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle admet une espérance et :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k.P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k.\left(\left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N\right).$$

On en déduit que : $E(X) = \frac{1}{n^N}.\left(\sum_{k=1}^{n} k^{N+1} - \sum_{k=1}^{n} k.(k-1)^N\right) = \frac{1}{n^N}.\left(\sum_{k=1}^{n} k^{N+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1).k^N\right)$, et :

$E(X) = \frac{1}{n^N}.\left(n^{N+1} - \sum_{k=1}^{n-1} k^N\right) = n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^N$, cette dernière somme n'ayant pas d'expression « simple ».

**Lois usuelles, modélisations, approximations.**

21. a. $X$ suit ici la loi uniforme sur {1, …, 6} $\mathcal{U}(6)$, les résultats étant équiprobable (dé équilibré).

b. Ici la probabilité à chaque tirage d'obtenir une boule Rouge est constante égale à : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Il s'agit donc d'une succession de 8 épreuves de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à $\frac{1}{3}$.

$X$ suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8, \frac{1}{3}\right)$.

c. Ici il s'agit d'une expérience où on attend « le premier succès », donc $X$ suit la loi géométrique de paramètre : $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, soit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$.

d. Le placement de chaque boule est une épreuve de Bernoulli avec probabilité de succès égale à $\frac{1}{3}$, et indépendant des autres placements.

On veut estimer le nombre de succès : $X$ suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$)

e. Puisque les cartes sont mélangées au hasard, la place de la Dame de Cœur est équiprobable parmi toutes les places possibles et donc $X$ suit la loi uniforme sur {1, …, 32}, soit $\mathcal{U}(32)$.

f. Cette situation est totalement identique à la précédente (on aurait pu imaginer que les cartes étaient tirées une à une du paquet (ou du sac) et étalées ensuite sur la table).

$X$ suit donc loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$, soit $\mathcal{U}$(n).

g. Il s'agit ici d'une expérience où on attend « le premier succès » et $X$ suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$, soit $\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$.

h. Ici il s'agit d'une succession de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre : $p = \frac{1}{r}$, et $X$ suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{r}\right)$.

22. On commence par écrire : $(2.X < X^2 + 1) = (X^2 - 2.X + 1 > 0) = ((X-1)^2 > 0) = (X \ne 1)$.

Donc par complémentarité : $P(2.X < X^2 + 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - e^{-\lambda}.\frac{\lambda^1}{1!} = 1 - \lambda.e^{-\lambda}$.

Puis : $(X\ \ pair) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = 2.n)$,

et comme cette réunion est disjointe, on en déduit par incompatibilité :

$$P(X\ \ pair)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=2.n)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!}=e^{-\lambda}.ch(\lambda)=\frac{1}{2}.(1-e^{-2.\lambda}).$$

23. a. Il est immédiat par récurrence que : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=\frac{2^n}{n!}.P(X=0)$.

Comme de plus la somme des probabilités doit valoir 1, on a donc :

$1=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)=P(X=0).\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}=P(X=0).e^2$, soit : $P(X=0)=e^{-2}$, et finalement :

$\forall\ n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=\frac{2^n}{n!}.e^{-2}$.

$X$ suit donc la loi de Poisson $\mathscr{P}(2)$.

On en déduit que : $E(X)=V(X)=2$.

b. La suite $(P(X=n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire double, d'équation caractéristique : $3.r^2-4.r+1=0$, qui a pour racines 1 et $\frac{1}{3}$.

Donc : $\exists\ (A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ P(X=n)=A.1^n+B.\left(\frac{1}{3}\right)^n=A+\frac{B}{3^n}$.

Puisque la série $\sum_{n\geq 1}P(X=n)$, doit être convergente, on a : $A=0$, et de somme 1, on a alors :

$1=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B}{3^n}=B.\frac{1}{3}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{B}{2}$, et : $B=2$.

Finalement : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=\frac{2}{3}.\frac{1}{3^{n-1}}$, et $X$ suit la loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

En particulier : $E(X)=\frac{3}{2}$, et : $V(X)=\frac{3}{4}$.

24. a. L'ensemble des valeurs prises par $Y$ est $\mathbb{N}$.

Puis $(Y=0)$ est égal à l'union disjointe $\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2.k+1)$, et donc :

$$P(Y=0)=P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2.k+1)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=2.k+1)=\sum_{k=0}^{+\infty}p.(1-p)^{2.k}=p.\frac{1}{1-(1-p)^2}=\frac{1}{2-p}.$$

D'autre part : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ (Y=n)=(X=2.n)$, et donc :

$P(Y=n)=P(X=2.n)=p.(1-p)^{2.n-1}$.

Enfin, la série $\sum_{n\geq 0}n.P(Y=n)$ converge car : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ n.p.(1-p)^{2.n-1}=o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et :

$$E(Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}n.P(Y=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}n.p.(1-p)^{2.n-1}=p.(1-p).\sum_{n=1}^{+\infty}n.((1-p)^2)^{n-1}=\frac{p.(1-p)}{(1-(1-p)^2)^2}=\frac{1-p}{p.(2-p)^2}.$$

b. L'ensemble des valeurs prises par $Y$ est encore $\mathbb{N}$, et comme dans la question précédente :

$P(Y=0)=P\left((X=0)\cup\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2.k+1)\right)=P(X=0)+\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=2.k+1)$, et donc :

$$P(Y=0)=e^{-\lambda}+\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.k+1}}{(2.k+1)!}=e^{-\lambda}+e^{-\lambda}.sh(\lambda)=\frac{1+2.e^{-\lambda}-e^{-2.\lambda}}{2}.$$

D'autre part : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ P(Y=n)=P(X=2.n)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!}$.

Enfin, on a : $n^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} n.P(Y=n)$ converge, et $Y$ admet une espérance.

De plus : $E(Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n.P(Y=n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!} = \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda}{2}.\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2.n).\dfrac{\lambda^{2.n-1}}{(2.n)!} = \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda}{2}.ch'(\lambda) = \dfrac{\lambda.(1-e^{-2.\lambda})}{4}$.

25. a. La série converge puisque : $\forall\ x \in\ ]-1,+1[$, $n.(n-1).(n-2).x^{n-3} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

De plus : $\forall\ x \in\ ]-1,+1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n.(n-1).(n-2).x^{n-3} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n.(n-1).(n-2).x^{n-3} = \dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$,

puisqu'une série entière est de classe $C^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées successives s'y obtiennent par dérivation terme à terme.

b. La loi de $X$ est assez simple, c'est la loi du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes, soit la loi géométrique.

Donc : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = q^{n-1}.p$, où on a noté : $q = 1-p$.

En notant $S_k$ l'événement : « A se réalise au $k$ ième essai », on peut aussi dire que :

$(X=n) = \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$,

d'où le même résultat par indépendance des essais car : $P(S_k) = p$.

Dans ce cas, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n.P(X=n)$ converge, donc $X$ admet une espérance, et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.p.q^{n-1} = p.\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

c. On a : $Y(\Omega) = \mathbb{N} - \{0,1\}$, et la loi de $Y$ peut s'obtenir avec la formule des probabilités totales :

- pour : $n=1$, $P(Y=1) = P(Y=n) = 0$, et :
- $\forall\ n \geq 2$, $P(Y=n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} P_{(X=k)}(Y=n).P(X=k)$.

Or : $1 \leq k \leq n-1$, $P_{(X=k)}(Y=n)$ correspond à la probabilité d'obtenir un succès au n ième essai après le $k$ ième, ce qui est identique à obtenir un succès au $(n-k)$ ième essai en repartant du début, soit :

$P_{(X=k)}(Y=n) = P(X = x-k)$,

et donc : $P(Y=n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p.q^{n-k-1}.p.q^{k-1} = p^2.\sum\limits_{k=1}^{n-1} q^{n-2} = (n-1).p^2.q^{n-2}$.

On peut également écrire : $(Y=n) = (S_1 \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n) \cup \ldots \cup (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap S_{n-1} \cap S_n)$,

et les événements de cette réunion étant deux à deux incompatibles, on obtient le même résultat en utilisant à nouveau l'indépendance des lancers.

Puis la série $\sum\limits_{n\geq 1} n.P(Y=n)$ converge donc $Y$ admet une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).p^2.q^{n-2} = p^2.\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}..$$

d. On constate évidemment que : $E(X) < E(Y)$.

26. Le nombre d'enfants dans une famille peut ainsi varier de 1 à $+\infty$.

De plus, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X=n)$ correspond au fait d'avoir un garçon (le $n$ ième) et $n-1$ filles (tous les enfants précédents).

$X$ suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et : $P(X=n) = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Dans une famille qui comporte $n$ enfants, la proportion de garçons est $\frac{1}{n}$ (soit le nombre de garçons divisé par le nombre total d'enfants).

Si cette valeur correspond à la variable aléatoire $Y$, on a donc : $Y = \frac{1}{X}$.

Enfin $E(Y)$ existe si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}.P(X = n)$ est absolument convergente par le théorème de transfert, ce qui est le cas.

Donc $Y$ admet une espérance qui vaut : $E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \approx 0.7$.

27. La poule peut pondre autant d'œufs qu'on veut, donc : $N(\Omega) = \mathbb{N}$, et chaque œuf peut ou pas éclore.
Donc : $K(\Omega) = \mathbb{N}$.
On utilise ensuite le système complet d'événements $((N = n), n \geq 1)$.
Puis : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $(K = k) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((N = n) \cap (K = k))$,
et par incompatibilité : $P(K = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((N = n) \cap (K = k)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n).P_{(N=n)}(K = k)$.
Or :
- si : $n < k$, $P_{(N=n)}(K = k) = 0$,

car on ne peut avoir plus de poussins que d'œufs pondus,
- si : $n \geq k$, $P_{(N=n)}(K = k) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$,

car on compte le nombre de succès dans la répétition d'une même expérience de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
Donc : $P(K = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!}.\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}.p^k}{k!}.\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n.(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}.(\lambda.p)^k}{k!}.\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda.(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$.
On reconnaît alors (au besoin avec une translation d'indice) une série exponentielle et :
$\forall\ k \in \mathbb{N}$, $P(K = k) = \frac{e^{-\lambda}.(\lambda.p)^k}{k!}.e^{\lambda.(1-p)} = e^{-\lambda.p}.\frac{(\lambda.p)^k}{k!}$.
Donc $K$ suit loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda.p)$.

**Couple et famille de variables aléatoires.**

28. a. On a d'une par : $Z(a) = (1,3)$, $Z(b) = (1,1)$ et : $Z(c) = (2,3)$.
Donc : $Z(\Omega) = \{(1,1), (1,3), (2,3)\}$.
D'autre part : $X(\Omega) = \{1,2\}$, et : $Y(\Omega) = \{1,3\}$, et : $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3)\}$.
On a donc : $X(\Omega) \times Y(\Omega) \neq Z(\Omega)$.
b. On a évidemment : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
D'autre part, on a obligatoirement : $Y \leq X$,
et la liste des éléments de $Z(\Omega)$ est :
(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).
On a à nouveau : $X(\Omega) \times Y(\Omega) \neq Z(\Omega)$.

29. a. Il y a 4 couples de valeurs possibles pour ( $X, Y$ ), et :
$P((U,V) = (0,0)) = P((X = 0) \cap (Y = 0)) = P(X = 0).P(Y = 0) = (1-p)^2$,
$P((U,V) = (1,1)) = P((X = 1) \cap (Y = 0)) = P(X = 1).P(Y = 0) = p.(1-p)$,
$P((U,V) = (1,-1)) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) = P(X = 0).P(Y = 1) = p.(1-p)$,
$P((U,V) = (2,0)) = P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1).P(Y = 1) = p^2$,

en utilisant l'indépendance de $X$ et de $Y$.

b. On calcule ensuite : $E(U.V)=0.(1-p)^2+1.p.(1-p)-1.p.(1-p)+0.p^2=0$,

d'où : $\mathrm{cov}(U,V)=E(U.V)-E(U).E(V)=0-p^2=-p^2\neq 0$,

donc $U$ et $V$ ne sont pas indépendantes.

30. a. L'univers « naturel » de cette expérience est : $\Omega == \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, qu'on munit d'une probabilité uniforme.

Les valeurs prises par $X$ sont : $X(\Omega)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et :

- $(X=1)=\{(1,1), (12), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (6,1), (5,1), (4,1), (3,1), (2,1)\}$, donc : $P(X=1)=\frac{11}{36}$.
- $(X=2)=\{(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (6,2), (5,2), (4,2), (3,2)\}$, donc : $P(X=2)=\frac{9}{36}$,
- de même : $P(X=3)=\frac{7}{36}$, $P(X=4)=\frac{5}{36}$, $P(X=5)=\frac{3}{36}$, et : $P(X=6)=\frac{1}{36}$.

Ensuite : $E(X)=1.\frac{11}{36}+2.\frac{9}{36}+3.\frac{7}{36}+4.\frac{5}{36}+5.\frac{3}{36}+6.\frac{1}{36}=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}=2.25$.

b. La loi de : $S=X+Y$, s'obtient comme précédemment par dénombrement et :

- $S(\Omega)=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, et :
- $P(S=2)=P(S=12)=\frac{1}{36}$, $P(S=3)=P(S=11)=\frac{2}{36}$, $P(S=4)=P(S=10)=\frac{3}{36}$,

  $P(S=5)=P(S=9)=\frac{4}{36}$, $P(S=6)=P(S=8)=\frac{5}{36}$, et enfin : $P(S=7)=\frac{6}{36}$.

Enfin : $E(S)=E(X+Y)=(2+12).\frac{1}{36}+(3+11).\frac{2}{36}+(4+10).\frac{3}{36}+(5+9).\frac{4}{36}+(6+8).\frac{5}{36}+7.\frac{6}{36}$,

et : $E(S)=7$.

On en déduit par linéarité que : $E(Y)=E(X+Y)-E(X)=7-\frac{9}{4}=\frac{19}{4}=4.75$.

c. En notant : $Z=X.Y$, on a : $Z(\Omega)=\{1, 2, ,3 ,4, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 9, 15, 18, 16, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

On en déduit la loi de $Z$ par dénombrement avec par exemple :

- $(Z=1)=(X=1,Y=1)=\{(1,1)\}$, et : $card(Z=2)=1$, et : $P(Z=1)=\frac{1}{36}$,
- $(Z=12)=(X=2,Y=6)\cup(X=3,Y=4)=\{(2,6), (6,2), (3,4), (4,3)\}$, et : $P(Z=12)=\frac{4}{36}$.

De même :

$$P(Z=2)=P(Z=3)=P(Z=5)=P(Z=8)=P(Z=10)=P(Z=12)=P(Z=15)=P(Z=18)$$
$$=P(Z=20)=P(Z=14)=P(Z=30)=\frac{2}{36},$$

et : $P(Z=9)=P(Z=16)=P(Z=25)=\frac{1}{36}$,

Puis enfin : $P(Z=4)=\frac{3}{36}$.

Ensuite : $E(Z)=(1+9+16+25).\frac{1}{36}+(2+3+5+8+10+12+15+18+20+14+30).\frac{2}{36}+3.\frac{4}{36}$,

et : $E(Z)=E(X.Y)=\frac{337}{36}$.

Enfin : $\mathrm{cov}(X,Y)=E(X.Y)-E(X).E(X)=\frac{337}{36}-\frac{9}{4}.\frac{19}{4}=-\frac{191}{144}\neq 0$.

On en déduit que les variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

31. a. On commence par préciser que : $Z(\Omega) = \{0,...,n-1\}$.

Puis : $\forall\ 1 \le k \le n-1,\ (Z = k) = \left(\bigcup_{p=1}^{n-k} (X = p) \cap (Y = k+p)\right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{n-k} (X = k+p) \cap (Y = p)\right)$,

et par incompatibilité et indépendance :

$$P(Z = k) = \left(\sum_{p=1}^{n-k} P(X = p).P(Y = k+p)\right) + \left(\sum_{p=1}^{n-k} P(X = k+p).P(Y = p)\right) = 2.\frac{n-k}{n^2}.$$

D'autre part : $(Z = 0) = \bigcup_{p=1}^{n} (X = p) \cap (Y = p)$, et pour les même raisons : $P(Z = 0) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Donc : $E(Z) = 0.P(Z = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} k.P(Z = k) = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k.(n-k) = \frac{2}{n^2}.\left(n.\frac{n.(n-1)}{2} - \frac{n.(n-1).(2.n-1)}{6}\right)$,

et après simplification : $E(Z) = \frac{n^2-1}{3.n}$.

De même : $E(Z^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2.P(Z = k) = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2.(n-k) = \frac{2}{n^2}.\left(n.\frac{n.(n-1).(2.n-1)}{6} - \frac{n^2.(n-1)^2}{4}\right) = \frac{n^2-1}{6}$.

Enfin : $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{n^2-1}{6} - \left(\frac{n^2-1}{3.n}\right)^2 = \frac{(n^2-1).(n^2+2)}{18.n^2}$.

b. On constate à nouveau que : $S(\Omega) = \{2,...,2.n\}$,

puis on écrit encore : $\forall\ 2 \le k \le 2.n,\ (Z = k) = \bigcup_{p=1}^{2.n} (X = p) \cap (Y = k-p)$.

En utilisant l'incompatibilité puis l'indépendance, on distingue alors deux cas :

- si : $2 \le k \le n+1$, alors : $P(Z = k) = \sum_{p=1}^{k-1} P(X = p).P(Y = k-p) = \frac{k-1}{n^2}$,
- si : $n+1 \le k \le 2.n$, alors : $P(Z = k) = \sum_{p=k-n}^{n} P(X = p).P(Y = k-p) = \frac{2.n-k+1}{n^2}$.

D'où : $E(S) = \sum_{k=2}^{2.n} k.P(S = k) = \sum_{k=2}^{n} k.\frac{k-1}{n^2} + (n+1).\frac{1}{n} + \sum_{k=n+2}^{2.n} k.\frac{2.n-k+1}{n^2}$.

On effectue dans la deuxième somme le changement d'indice : $k' = 2.n - k + 2$, et elle devient :

$\sum_{k=2}^{n} \frac{(2.n-k'+2).(k'-1)}{n^2}$.

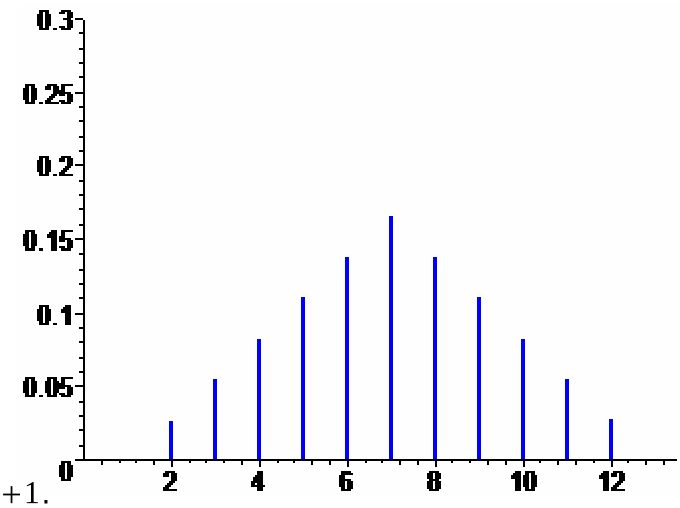
En rassemblant, on obtient :

$E(S) = (2.n+2).\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2} + (n+1).\frac{1}{n}$,

et donc : $E(S) = \frac{2.n+2}{n^2}.\frac{n.(n-1)}{2} + (n+1).\frac{1}{n} = n+1$

Le diagramme ci-contre donne la loi de probabilité de $S$ (pour : $n = 6$).

On comprend assez le nom de « loi triangulaire » et la moyenne (vu la symétrie de la représentation) apparaît clairement comme valant 7, soit dans le cas général $n+1$.




c. C'est l'espérance de $S$ donc cette moyenne vaut $n+1$.

32. a. Notons tout d'abord que $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que pour un entier $n$ non nul, $(X = n)$ correspond à : $F_1 \cap ... \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$, donc par indépendance : $P(X = n) = P(F_1)...P(F_{n-1}).P(\overline{F_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$X$ est une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

De même, $(Y=n)$ correspond à : $\overline{F_1}\cap\ldots\cap\overline{F_{n-1}}\cap F_n$, et : $P(Y=n)=P(\overline{F_1})\ldots P(\overline{F_{n-1}}).P(F_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

b. Le couple ( $X,Y$ ) prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^{*2}$ et plus précisément, pour : $(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}$, on a :

- si : $i=j$, alors $P(X=i,Y=j)=0$, puisqu'on ne peut obtenir Pile et Face au même tirage.
- si : $i\geq 2$, et : $j\geq 2$, on a encore : $P(X=i,Y=j)=0$, car on a obtenu Pile ou Face au 1er tirage,
- si : $i=1$, et : $j\geq 2$, alors : $(X=i,Y=j)=\overline{F_1}\cap\ldots\cap\overline{F_{j-1}}\cap F_j$, et :

$$P(X=i,Y=j)=P(\overline{F_1})\ldots P(\overline{F_{j-1}}).P(F_j)=\left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

- de même si : $j=1$, $i\geq 2$, on a : $P(X=i,Y=j)=P(F_1)\ldots P(F_{i-1}).P(\overline{F_i})=\left(\frac{1}{2}\right)^i$.

c. Les variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes, puisque :

$P(X=1,Y=1)=0$, et : $P(X=1).P(Y=1)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq 0$.

d. $Z$ prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Puis :

- si : $k=2$, alors : $P(Z=k)=P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=0$, et :
- si : $k\geq 3$, $P(Z=k)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}(X=i,Y=k-i)\right)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i,Y=k-i)$, par incompatibilité et :

$P(Z=k)=P(X=1,Y=k-1)+P(X=k-1,Y=1)$, puisque ce sont les deux seuls termes non nuls.

De plus on a : $1\neq k-1$, donc : $P(Z=k)=\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^{k-2}}$.

33. a. Notons que tous les termes sont bien positifs.

De plus : $\forall\ j\geq 1$, la série $\sum_{i\geq 1}p_{i,j}$ converge car : $p_{i,j}=\frac{1}{i.(i+1).j.(j+1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{j.(j+1)}.\frac{1}{i^2}$,

terme général d'une série de Riemann convergente.

Puis : $\forall\ j\geq 1$, $S_j=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{i,j}=\frac{1}{j.(j+1)}.\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i.(i+1)}=\frac{1}{j.(j+1)}.1=\frac{1}{j.(j+1)}$ (série télescopique classique),

puis : $\sum_{j=1}^{+\infty}S_j=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j.(j+1)}=1$.

et $((i,j),\ p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définit bien la loi de probabilité d'un couple ( $X,Y$ ) de variables aléatoires discrètes.

b. La loi de X s'obtient par :

$$\forall\ i\geq 1,\ P(X=i)=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=i,Y=j)=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{i.(i+1).j.(j+1)}=\frac{1}{i.(i+1)}.\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j.(j+1)}=\frac{1}{i.(i+1)}.$$

De façon identique (ou par symétrie) : $\forall\ j\geq 1$, $P(Y=j)=\frac{1}{j.(j+1)}$.

c. Puisqu'on a alors : $\forall\ i\geq 1$, $\forall\ j\geq 1$, $P(X=i,Y=j)=\frac{1}{i.(i+1).j.(j+1)}=P(X=i).P(Y=j)$,

les variables $X$ et $Y$ sont bien indépendantes.

34. a. On remarque tout d'abord que tous les $a_{i,j}$ sont positifs, puis que :

- si : $j=0$ , $S_0=\sum_{i=0}^{+\infty}a_{i,j}=0$, et que :

• $\forall\ j \geq 1,\ S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} (1-p)^{j-2}.p^2 = (j-1).(1-p)^{j-2}.p^2$.

De plus la série $\sum_{j\geq 0} S_j$ converge car : $(j-1).(1-p)^{j-2}.p^2 = o_{+\infty}\left(\frac{1}{j^2}\right)$, et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} S_j = \sum_{j=1}^{+\infty} (j-1).(1-p)^{j-2}.p^2 = p^2.\sum_{k=0}^{+\infty} k.(1-p)^{k-1} = p^2.\sum_{k=1}^{+\infty} k.(1-p)^{k-1} = p^2.\frac{1}{(1-(1-p))^2} = 1.$$

Donc $((i,j), a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est bien la loi d'un couple $(X, Y)$ de variables aléatoires discrètes.

b. $X$ prend ses valeurs dans ℕ et sa loi s'obtient par :

$$\forall\ i \geq 1,\ P(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} (1-p)^{j-2}.p^2 = p^2.\frac{(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)} = p.(1-p)^{i-1}.$$

$Y$ prend ses valeurs dans ℕ / {0,1} et :

$$\forall\ j \geq 2,\ P(Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^{j-1} (1-p)^{j-2}.p^2 = (j-1).(1-p)^{j-2}.p^2.$$

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes car :

$P(X = 2, Y = 2) = a_{2,2} = 0$, et : $P(X = 2).P(Y = 2) = p.(1-p).p^2 \neq 0$.

c. Soit donc : $j \geq 2$.

Alors :

• $P_{(Y=j)}(X = i) = \frac{P(X = i, Y = j)}{P(Y = j)} = \frac{(1-p)^{j-2}.p^2}{(j-1).(1-p)^{j-2}.p^2} = \frac{1}{j-1}$, si : $1 \leq i \leq j-1$, et :

• $P_{(Y=j)}(X = i) = \frac{P(X = i, Y = j)}{P(Y = j)} = 0$, sinon.

Un peu comme une restriction de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}_{j-1}$.

35. Tout d'abord : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Puis : $\forall\ n \geq 2,\ (Z = n) = ((Y = 0) \cap (X = n-1)) \cup ((Y = 1) \cap (X = n-2))$,

et par incompatibilité puis indépendance :

$$P(Z = n) = P(Y = 0).P(X = n-1) + P(Y = 1).P(X = n-2) = \frac{1}{2}.e^{-\lambda}.\left(\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\right).$$

D'autre part : $P(Z = 1) = (X = 0) \cap (Y = 0)$, et à nouveau par indépendance : $P(Z = 1) = \frac{1}{2}.e^{-\lambda}$.

On constate alors que : $n^3.P(Z = n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, par croissances comparées, et $Z$ admet une espérance.

Ensuite : $E(Z) = 1.P(Z = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} n.P(Z = n) = \frac{1}{2}.e^{-\lambda}.\left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n.\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} n.\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\right)$.

On écrit alors : $\forall\ n \geq 2,\ n.\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = (n-1+1).\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda.\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$,

et de même : $\forall\ n \geq 2,\ n.\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda.\frac{\lambda^{n-2}}{(n-3)!} + 2.\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}$,

la première simplification étant valable pour : $n \geq 3$, (et le terme correspondant s'annule pour : $n = 2$).

D'où : $E(Z) = \frac{1}{2}.e^{-\lambda}.\left(1 + \lambda.\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda.\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-3}}{(n-3)!} + 2.\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\right)$,

soit : $E(Z) = \frac{1}{2}.e^{-\lambda}.(1 + \lambda.e^{\lambda} + (e^{\lambda} - 1) + \lambda.e^{\lambda} + 2.e^{\lambda}) = \frac{2.\lambda + 3}{2}$.

Pour la même raison, $Z$ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance, et :

$$E(Z^2) = 1^2.P(Z = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2.P(Z = n) = \frac{1}{2}.e^{-\lambda}.\left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2.\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2.\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\right).$$

On utilise alors : $n^2=(n-1).(n-2)+2.(n-1)$, et : $n^2=(n-2).(n-3)+5.(n-2)+4$, afin de sommer les séries et en réindexant (et changeant les valeurs initiales de sommation au besoin) :

- $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2.\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-3)!}+2.\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}=(\lambda^2+2.\lambda).e^{\lambda}$,
- $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2.\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}=\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-4)!}+5.\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-3)!}+4.\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}=(\lambda^2+5.\lambda+4).e^{\lambda}$,

d'où : $E(Z^2)=\frac{1}{2}.e^{-\lambda}+\frac{2.\lambda^2+7.\lambda+4}{2}$.

Enfin : $V(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{1}{2}.e^{-\lambda}+\frac{2.\lambda^2+7.\lambda+4}{2}-\left(\frac{2.\lambda+3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.e^{-\lambda}+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}$.

36. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{G}(p)$ avec : $p\in\,]0,1[$.

a. Puisque : $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, on a tout d'abord : $S(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Puis : $\forall\ n\geq 2$, $(S=n)=\bigcup_{k=1}^{n-1}(X=k)\cap(Y=n-k)$,

et par incompatibilité puis indépendance : $P(S=n)=\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k).P(Y=n-k)$.

Donc : $\forall\ n\geq 2$, $P(S=n)=\sum_{k=1}^{n-1}p.(1-p)^{k-1}.p.(1-p)^{n-k-1}=(n-1).p^2.(1-p)^{n-2}$.

b. On a immédiatement : $n.P(S=n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$,

avec le théorème des croissances comparées, donc $S$ admet une espérance, et :

$$E(S)=\sum_{n=2}^{+\infty}n.P(S=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}n.(n-1).p^2.(1-p)^{n-2}=p^2.\sum_{n=2}^{+\infty}n.(n-1).(1-p)^{n-2},$$

et à l'aide de la dérivée seconde de : $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, on en déduit que :

$$E(S)=p^2.\frac{2}{(1-(1-p))^3}=\frac{2}{p}.$$

Pour les mêmes raisons qu'au-dessus, $S$ admet un moment d'ordre 2 donc une variance.

Puis : $E(S^2)=\sum_{n=2}^{+\infty}n^2.P(S=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1-1).n.(n-1).p^2.(1-p)^{n-2}$.

A l'aide cette fois d'une dérivée troisième :

$$E(S^2)=p^2.\left(\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1).n.(n-1).(1-p)^{n-2}-\sum_{n=2}^{+\infty}n.(n-1).(1-p)^{n-2}\right),$$

et donc : $E(S^2)=p^2.\left(\frac{6}{(1-(1-p))^4}-\frac{2}{(1-(1-p))^3}\right)=2.\frac{3-p}{p^2}$.

Enfin : $V(S)=E(S^2)-(E(S))^2=2.\frac{3-p}{p^2}-\frac{4}{p^2}=2.\frac{1-p}{p^2}$.

37. a. On a : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $P(X>n)=P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}(X=k)\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)$,

par incompatibilité et donc : $P(X>n)=p.(1-p)^n.\frac{1}{1-(1-p)}=(1-p)^n$.

b. On commence par noter que : $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

Puis : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $(Z=n)=((X=n)\cap(Y>n))\cup((X=n)\cap(Y=n))\cup((X>n)\cap(Y=n))$,

et à nouveau par incompatibilité, puis indépendance, on en déduit que :

$P(Z=n)=P(X=n).P(Y>n)+P(X=n).P(Y=n)+P(X>n).P(Y=n)$.

Le résultat obtenu en a. pour $X$ vaut pour $Y$, et donc par indépendance :

$P(Z=n) = p.(1-p)^{n-1}.(1-q)^n + p.(1-p)^{n-1}.q.(1-q)^{n-1} + (1-p)^n.q.(1-q)^{n-1}$,

d'où : $P(Z=n) = (1-p)^{n-1}.(1-q)^{n-1}.[p.(1-q)+p.q+q.(1-p)] = ((1-p).(1-q))^{n-1}.(p+q-p.q)$.

Il suffit de remarquer enfin que : $1-(1-p).(1-q) = 1-(1-p-p+p.q) = p+q-p.q$,

pour en déduire que la loi de $Z$ est bien géométrique, de paramètre : $r = p+q-p.q$.

38. a. Toutes les valeurs proposées sont bien positives et la série $\sum_{n\geq 0} P(X=n)$ converge comme série géométrique et a pour somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} p.(1-p)^k = p.\frac{1}{1-(1-p)} = 1$.

On peut calculer l'espérance de $X$ par un calcul direct ou en remarquant que si l'on pose : $Y = X+1$, alors :

- $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=n) = P(X=n-1) = p.(1-p)^{n-1}$,

et la loi de $Y$ est la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

Donc $Y$ (et donc $X$) admet une espérance et : $E(X) = E(Y-1) = E(Y)-1 = \frac{1}{p}-1$.

b. On a tout d'abord : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, puis :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ (Z=n) = \bigcup_{k=0}^{n}((X=k)\cap(Y=n-k))$,

et par incompatibilité puis indépendance :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k).P(Y=n-k) = p^2.\sum_{k=0}^{n}(1-p)^k.(1-p)^{n-k} = p^2.(n+1).(1-p)^n$.

c. Enfin, pour : $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle cherchée se définit par :

$\forall$ k $\in \mathbb{N}$, $P_{(Z=n)}(X=k) = \frac{P((X=k)\cap(Z=n))}{P(X=n)}$,

et on distingue deux cas :

- si : $k > n$, alors : $P((X=k)\cap(Z=n)) = 0$, car : $X \leq Z$, et dans ce cas : $P_{(Z=n)}(X=k) = 0$.
- si : $k \leq n$, alors : $P((X=k)\cap(Z=n)) = P((X=k)\cap(Y=n-k)) = P(X=k).P(Y=n-k)$,

et donc : $P_{(Z=n)}(X=k) = \frac{p.(1-p)^k.p.(1-p)^{n-k}}{p^2.(n+1).(1-p)^n} = \frac{1}{n+1}$.

On constate que cette loi conditionnelle est la loi uniforme sur $\{0, 1, ..., n\}$.

39. a. La loi de $X$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n+1, \frac{1}{2}\right)$, puisque cela correspond au nombre de succès (ici cela correspond à obtenir Face) dans la répétition indépendante d'une même expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

De même la loi de $Y$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$,

b. $X$ variant de 0 à $n+1$ et $Y$ de 0 à $n$, et étant deux variables aléatoires indépendantes, on a tout d'abord : $(X-Y)(\Omega) = \{-n, ..., -1, 0, 1, ..., n+1\}$.

Puis : $\forall\ p \in (X-Y)(\Omega),\ (X-Y=p) = \bigcup_{k=0}^{n+1}((X=k)\cap(Y=k-p))$,

et par incompatibilité et indépendance :

$\forall\ p \in (X-Y)(\Omega),\ P(X-Y=p) = \sum_{k=0}^{n+1} P(X=k).P(Y=k-p)$.

On distingue alors plusieurs cas pour évaluer les probabilités qui apparaissent :

• si : $p \geq 1$, alors $k$ peut varier entre 1 et $n+1$ pour que : $0 \leq k-p \leq n$, et :

$$P(X-Y=p) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} . \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} . \binom{n}{k-p} . \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2.n+1} . \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} . \binom{n}{n+p-k}.$$

On examine alors le coefficient de $x^{n+p}$ dans : $(1+x)^{2.n+1} = (1+x)^{n+1}.(1+x)^{n}$, et :

- dans l'expression de gauche, on obtient $\binom{2.n+1}{n+p}$,
- dans l'expression de droite : $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} . \binom{n}{n+p-k}$.

En effet, $x^{n+p}$ peut s'écrire $x^{p}.x^{n}$ (ce qui correspond à : $k=p$), $x^{p+1}.x^{n-1}$ (pour : $k=p+1$), etc… jusqu'à $x^{n+1}.x^{p-1}$ (pour : $k=n+1$).

Donc on vient d'obtenir : $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} . \binom{n}{n+p-k} = \binom{2.n+1}{n+p}$, et donc :

$$\forall\ 0 \leq p \leq n+1,\ P(X-Y=p) = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \binom{2.n+1}{n+p}.$$

• si : $p \leq 0$, alors $k$ peut varier entre 0 et $n+p$ pour que : $0 \leq k-p \leq n$, et :

$$P(X-Y=p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2.n+1} . \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+1}{k} . \binom{n}{n+p-k} = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \binom{2.n+1}{n},$$

En examinant à nouveau le coefficient de $x^{n+p}$ dans : $(1+x)^{2.n+1} = (1+x)^{n+1}.(1+x)^{n}$, obtient toujours :

- dans l'expression de gauche, on obtient $\binom{2.n+1}{n+p}$,
- dans l'expression de droite : $\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+1}{k} . \binom{n}{n+p-k}$, car :

$x^{n+p}$ peut s'écrire $x^{0}.x^{n+p}$ (pour : $k=0$), $x^{1}.x^{n+p-1}$ (pour : $k=1$), jusqu'à $x^{n+p}.x^{0}$ (pour : $k=n+p$).

Donc à nouveau : $\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+1}{k} . \binom{n}{n+p-k} = \binom{2.n+1}{n+p}$,

et à nouveau : $\forall\ -n \leq p \leq -1,\ P(X-Y=p) = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \binom{2.n+1}{n+p}$.

c. La première probabilité est immédiate :

$$P(X=Y) = P(X-Y=0) = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \binom{2.n+1}{n} = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \binom{2.n+1}{(2.n+1)-n} = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \binom{2.n+1}{n+1}.$$

Pour la deuxième on obtient, à nouveau par incompatibilité :

$$P(X>Y) = P(X-Y>0) = \sum_{p=1}^{n+1} P(X-Y=p) = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \sum_{p=1}^{n+1} \binom{2.n+1}{n+p}.$$

On remarque ensuite que :

$$P(X<Y) = P(X-Y<0) = \sum_{p=1}^{n} P(X-Y=-p) = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \sum_{p=1}^{n} \binom{2.n+1}{n-p} = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \sum_{p=1}^{n} \binom{2.n+1}{(2.n+1)-(n-p)},$$

d'où : $P(X<Y) = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \sum_{p=1}^{n} \binom{2.n+1}{n+p+1} = \frac{1}{2^{2.n+1}} . \sum_{k=2}^{n+1} \binom{2.n+1}{n+k} = P(X>Y) - \frac{1}{2^{2.n+1}} . \binom{2.n+1}{n+1}$.

Enfin : $P(X-Y<0) + P(X-Y=0) + P(X-Y>0) = 1$,

donc : $2.P(X-Y>0) - P(X-Y=0) + P(X-Y=0) = 1$,

soit : $P(X>Y) = P(X-Y>0) = \frac{1}{2}$.

40. On commence par noter que $X$ et $Y$ admettent une espérance ainsi que $U^2$ et $V^2$, car :

$U^2 = \alpha^2.X^2 + 2..\beta.X + \beta^2$, avec une expression similaire pour $V^2$.

Donc $U$ et $V$ admettent aussi une espérance et : $\text{cov}(U,V) = E(U).E(V) - E(U.V)$.

Or :

- $E(U) = \alpha.E(X) + \beta$, $E(V) = \gamma.E(Y) + \delta$, et :
- $E(U.V) = E(\alpha.\gamma.X.Y + \alpha.\delta.X + \beta.\gamma.Y + \beta.\delta) = \alpha.\gamma.E(X.Y) + \alpha.\delta.E(X) + \beta.\gamma.E(Y) + \beta.\delta$, soit :
- $\text{cov}(U,V) = \alpha.\gamma.(E(X).E(Y) - E(X).E(Y)) = \alpha.\gamma.\text{cov}(X,Y)$.

Puis : $V(U) = V(\alpha.X + \beta) = V(\alpha.X) = \alpha^2.V(X)$, soit : $\sigma(U) = |\alpha|.\sigma(X)$, et de même : $\sigma(V) = |\gamma|.\sigma(Y)$.

On doit alors supposer que α et γ sont non nuls pour pouvoir parler de $\rho(U,V)$.

Et finalement : $\rho(U,V) = \dfrac{\alpha.\gamma.\text{cov}(X,Y)}{|\alpha|.\sigma(X).|\gamma|.\sigma(Y)} = \pm\rho(X,Y)$, le signe étant celui de α.γ.

41. Pour chaque tirage tous les numéros ont la même probabilité de sortir et $X_i$ suit donc la loi uniforme sur $\mathbb{N}_N$ pour tout entier $i$.

Donc : $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$, $E(X_i) = \dfrac{N+1}{2}$, et : $V(X_i) = \dfrac{N^2-1}{12}$.

Par linéarité de l'espérance on a donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n.\dfrac{N+1}{2}$.

Puis les variables $X_i$ étant mutuellement indépendantes : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n.\dfrac{N^2-1}{12}$.

42. Par linéarité de l'espérance on a : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n.m$.

Puis : $V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2.\sum_{1\le i<j\le n} \text{cov}(X_i, X_j) = n.v + 2.\dfrac{n.(n-1)}{2}.v = n^2.v$.

**Fonctions génératrices.**

43. Au travail donc…

- Si $X$ suit la loi uniforme $\mathscr{U}(n)$, on a :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}.t^k = \dfrac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} t^k = \dfrac{1}{n}.\dfrac{1-t^n}{1-t}.t$, la dernière égalité étant valable pour : $t \neq 1$.

- Si $X$ suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, on a :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (1-p).t^0 + p.t^1 + = (1-p) + p.t$.

- Si $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, on a :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}.t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(p.t)^k.(1-p)^{n-k} = (1-p+p.t)^n$.

- Si $X$ suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, on a :

$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p.(1-p)^{n-1}.t^n = p.t.\dfrac{1}{1-(1-p).t}$, et cette série a pour rayon de convergence : $R = \dfrac{1}{1-p}$, la fonction étant elle définie sur $\left]-\dfrac{1}{1-p}, +\dfrac{1}{1-p}\right[$.

- Si $X$ suit la loi de Poisson $\mathscr{P}$(λ), on a :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}.t^n = e^{-\lambda}.\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\lambda.t)^n}{n!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda.t} = e^{(\lambda-1).t}$.

44. Tout d'abord, si $X$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, alors :

$\forall$ t $\in$ ℝ, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}.t^k = (p.t + (1-p))^n$.

De même si $Y$ suit la loi $\mathscr{B}(m, p)$, alors : $\forall$ t $\in$ ℝ, $G_Y(t) = (p.t + (1-p))^m$.

Puis $X$ et $Y$ étant indépendantes, on a : $\forall$ t $\in$ ℝ, $G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t) = (p.t + (1-p))^{n+m}$,

et $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n+m, p)$.

45. a. Vérifier la cohérence de cette définition revient à vérifier qu'on définit bien ainsi une variable aléatoire discrète.

Or toutes les valeurs prises sont positives et : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2.n}}{(2.n)!} = \frac{1}{ch(x)}.ch(x) = 1$.

Donc on vient bien de définir ainsi la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

La fonction génératrice cherchée est donnée par la série entière : $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n.P(X = n) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n.x^{2.n}}{(2.n)!}$.

Or : $\forall$ t $\in$ ℝ*, $\forall$ $n \in$ ℕ, $\left|\frac{t^{n+1}.P(X = n+1)}{t^n.P(X = n)}\right| = |t|.\left|\frac{x^{2.n+2}}{(2.n+2)!}.\frac{(2.n)!}{x^{2.n}}\right| = |t|.\frac{x^2}{(2.n+2).(2.n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

et la règle de d'Alembert garantit que le rayon de convergence de la série entière est donc : $R = +\infty$.

Ensuite : $\forall$ t $\in$ ℝ, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.P(X = n) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n.x^{2.n}}{(2.n)!}$, et donc :

- si : $t \geq 0$, $G_X(t) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x.\sqrt{t})^{2.n}}{(2.n)!} = \frac{ch(x.\sqrt{t})}{ch(x)}$, et :
- si : $t < 0$, $G_X(t) = \frac{1}{ch(x)}.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.(x.\sqrt{-t})^{2.n}}{(2.n)!} = \frac{\cos(x.\sqrt{-t})}{ch(x)}$.

b. Comme série entière, $G_X$ est de classe C$^\infty$ sur ℝ, donc $X$ et $X^2$ admettent une espérance.

De plus :

$\forall\ t > 0$, $G_X'(t) = \frac{sh(x.\sqrt{t})}{ch(x)}.\frac{x}{2.\sqrt{t}}$, d'où : $E(X) = G_X'(1) = \frac{x.sh(x)}{2.ch(x)}$, et :

$\forall\ t > 0$, $G_X''(t) = \frac{ch(x.\sqrt{t})}{ch(x)}.\frac{x^2}{4.t} - \frac{sh(x.\sqrt{t})}{ch(x)}.\frac{x}{4.t^{\frac{3}{2}}}$, et : $G_X''(1) = \frac{x^2}{4} - \frac{sh(x)}{ch(x)}.\frac{x}{4}$

On peut alors retrouver : $G_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).P(X = n) = E(X.(X-1)) = E(X^2) - E(X)$, soit :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{sh(x)}{ch(x)}.\frac{x}{4}\right) + \frac{x.sh(x)}{2.ch(x)} - \left(\frac{x.sh(x)}{2.ch(x)}\right)^2,$$

soit après simplification : $V(X) = \frac{x.(x + sh(x).ch(x))}{4.ch^2(x)}$.

**Résultats asymptotiques.**

46. Chaque passager a une probabilité de présence de 0.95 au départ de l'avion.

On a donc une succession de 94 expériences de Bernoulli de paramètre 0.95, soit une variable aléatoire $X$ donnant le nombre de passagers présents au départ de l'avion qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(94, 0.95).

La probabilité qu'il y ait un problème au départ (trop de personnes présentes) correspond donc à :

$$P(X \geq 91) = \sum_{n=91}^{94} P(X = n) = \sum_{n=91}^{94} \binom{94}{n}.0.95^n.(1-0.95)^{94-n} \approx 0.3028.$$

Si d'autre part, on considère la variable aléatoire $Y$ donnant le nombre de passagers absents au départ de l'avion, soit : $Y = 94 - X$, cette variable $Y$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}$(94,0.05).

On peut alors approcher cette loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre : $\lambda = 94.(1-0.95) = 4.7$, car on a : $N = 94$, éléments concernés (valeur assez grande) et un produit : $N.p = 4.7$, (donc assez faible).

Dans ce cas, la probabilité qu'il y ait un problème (pas assez d'absents au départ) est donc :

$$P(Y \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{3} e^{-4.7}.\frac{4.7^k}{k!} \approx 0.3097.$$

La loi de Poisson proposée semble donc une bonne approximation ici de la loi binomiale précédente.

47. La loi de $X_n$ est ici clairement la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$ puisque le fait de remettre la boule tirée après chaque étape fait qu'on a affaire ici à une succession de $n$ expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre : $p_n = \frac{1}{n}$.

Or lorsque $n$ tend vers $+\infty$, et puisque : $n.p_n = 1$, on peut approcher cette loi par la loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$.

En particulier on a : $P(X_n = k) \approx e^{-1}.\frac{1^k}{k!}$, et donc : $P(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{e.k!}$.

*Remarque :* en fait, on a : $P(X_n = k) = \binom{n}{k}.\left(\frac{1}{n}\right)^k.\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}.(n-1)^{-k}.\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$,

et la formule de Stirling donne :

$$P(X_n = k) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}}{k!.(n-k)^{n-k}.e^{-(n-k)}.\sqrt{2.\pi.(n-k)}}.(n-1)^{-k}.\frac{1}{e} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e.k!}.\frac{1}{e^k}.\frac{(n-k)^k}{n^k}.\left(\frac{n-k}{n}\right)^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e.k!}.\frac{e^k}{e^k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e.k!}.$$

48. On a par linéarité de l'espérance : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}.E(X_n) = \frac{1}{n}.n.p = p$.

Par ailleurs : $V(Y_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.V(X_n) = \frac{1}{n^2}.n.p.(1-p) = \frac{p.(1-p)}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne alors : $\forall\ \varepsilon > 0$, $P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$, soit ici :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $P(|Y_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p.(1-p)}{n.\varepsilon^2}$.

Or si on étudie la fonction : $p \mapsto p.(1-p)$, sur [0,1], on constate qu'elle y reste positive et qu'elle atteint son maximum en : $p = \frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$, ce qui entraîne bien : $P(|Y_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4.n.\varepsilon^2}$.

49. a. Notons tout d'abord que $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$, et :

$E(X) = n.\frac{1}{6} = \frac{n}{6}$, et : $V(X) = n.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{5.n}{36}$.

Puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $P\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$,

soit pour : $\varepsilon = \frac{n}{100}$, $P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \frac{n}{100}\right) \leq \frac{5.n}{36}.\frac{10000}{n^2} = \frac{5.10^4}{36.n}$.

b. On constate ensuite que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \frac{n}{100}\right) = \left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right)$.

Donc : $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) = 1 - P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \frac{n}{100}\right) \geq 1 - \frac{5.10^4}{36.n}$.

Enfin, $\frac{X}{n}$ correspond à la fréquence d'apparition du 1 au cours ce des $n$ lancers et si donc on veut que cette fréquence soit dans l'intervalle $\left]\frac{1}{6}-\frac{1}{100},\frac{1}{6}+\frac{1}{100}\right[$ avec un risque d'erreur inférieur à 0.05, cela correspond à une probabilité de 0.95 de trouver $\frac{X}{n}$ dans cet intervalle, ce qui est garantit dès que :

$1-\frac{5.10^4}{36.n} \geq 0.95$, soit : $n \geq \frac{5.10^4}{36.0.05} > 27777$, ou encore : $n \geq 27778$.

50. a. Le résultat demandé est immédiat puisqu'il s'agit de la loi faible des grands nombres, en remarquant simplement que : $v=\sigma^2$, où σ est l'écart-type commun à toutes les variables aléatoires $X_k$.

b. Il suffit donc de trouver $N$ tel que : $\frac{10^{-1}}{N.(10^{-2})^2} \leq 10^{-3}$, soit : $\frac{10^{-1}.10^3}{10^{-4}} = 10^6 \leq N$, et : $N=10^6$, convient.