

Suites et séries de fonctions (corrigé niveau 2).

Convergence simple et uniforme de suites de fonctions.

24. a. Pour x fixé dans $[0,1]$:

- si : $x \in [0,1[$, la suite $(u_n(x))$ converge vers -1 ,
- si : $x = 1$, la suite $(u_n(1))$ est constante égale à 0 et converge donc vers 0 .

Il y a donc convergence simple de (u_n) vers u , définie par : $\forall x \in [0,1[$, $u(x) = -1$, et : $u(1) = 0$.

Puisque toutes les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$ et que u ne l'est pas, il ne peut pas y avoir convergence uniforme de (u_n) sur $[0,1]$.

On peut d'ailleurs remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{[0,1]} |u_n - u| = \sup_{[0,1]} |u_n - u| = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} |u_n(x) - u(x)|$.

Il n'y a donc convergence uniforme de (u_n) , ni sur $[0,1]$, ni sur $[0,1[$.

Pour : $0 < a < 1$, en revanche : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, a]$, $|u_n(x) - u(x)| = \left| \frac{x^n - 1}{x^n + 1} + 1 \right| = \left| \frac{2 \cdot x^n}{x^n + 1} \right| \leq 2 \cdot a^n$.

On en déduit que : $\sup_{[0,a]} |u_n - u| \leq 2 \cdot a^n$, et (u_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers u .

b. Pour x fixé dans $[0,1]$, on a :

- si : $x = 0$, ou : $x = 1$, la suite $(u_n(x))$ est constante égale à 0 et converge donc vers 0 ,
- si : $x \in]0,1[$, la suite $(u_n(x))$ converge vers 0 , du fait du théorème des croissances comparées.

Donc la suite (u_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle (notée u).

On peut ensuite, pour n fixé non nul, étudier les variations de u_n et constater qu'elle reste négative et

atteint un minimum en : $x = e^{-\frac{1}{n}}$, où elle vaut $-\frac{1}{e}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{[0,1]} |u_n - u| = \frac{1}{e}$, et la suite ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

En revanche, sur $[0, a]$, avec : $0 < a < 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0$, $a \leq e^{-\frac{1}{n}}$, car la suite $(e^{-\frac{1}{n}})$ tend vers 1 .

Donc : $\forall n \geq n_0$, $\sup_{[0,a]} |u_n - u| = |u_n(a)|$, et la suite des sup tend vers 0 .

Il y a donc convergence uniforme de (u_n) sur $[0, a]$.

c. Pour x fixé :

- si : $x = 0$, la suite $(u_n(x))$ est constante égale à 0 et converge donc vers 0 ,
- si : $x > 0$, la suite $(n \cdot x)$ tend vers $+\infty$ et la suite $(u_n(x))$ tend vers $\frac{\pi}{2}$,
- si : $x < 0$, par imparité, la suite $(u_n(x))$ tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

La suite (u_n) converge donc simplement sur \mathbb{R} vers la fonction u , nulle en 0 et valant $\text{signe}(x) \cdot \frac{\pi}{2}$ sinon.

Toutes les fonctions u_n étant continues sur \mathbb{R} alors que la fonction limite ne l'est pas, il n'y a pas convergence uniforme de (u_n) vers u sur \mathbb{R} .

Soit ensuite : $a > 0$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a, +\infty)$, $|u_n(x) - u(x)| = \left| \frac{\pi}{2} - \arctan(n \cdot x) \right| = \arctan\left(\frac{1}{n \cdot x}\right) \leq \arctan\left(\frac{1}{n \cdot a}\right)$.

Donc : $\sup_{[a, +\infty)} |u_n - u| \leq \arctan\left(\frac{1}{n \cdot a}\right)$, et (u_n) converge uniformément sur $[a, +\infty)$ vers u .

Par imparité, on a le même résultat sur $(-\infty, -a]$.

25. Soit tout d'abord x fixé dans $[0,1]$.

• si : $x = 0$, la suite $(u_n(0))$, est constante égale à 0 donc converge (vers 0),

• si : $x \in]0,1[$, $\exists n_x \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_x$, $\frac{1}{n+1} \leq x$,

et la suite $(u_n(x))$ est constante nulle à partir du rang n_x , et converge donc vers 0.

La suite (u_n) converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle (notée u).

On peut ensuite remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{[0,1]} |u_n - u| = \sup_{[0,1]} |u_n| = \sup_{[0, \frac{1}{n+1}]} |u_n|$.

Puis sur l'intervalle restant, la fonction u_n est positive et atteint son maximum en $\frac{1}{2(n+1)}$, où elle vaut

$$\frac{(n+1)^{\alpha-2}}{4}, \text{ d'où : } \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{[0,1]} |u_n - u| = \frac{(n+1)^{\alpha-2}}{4}.$$

La suite converge donc uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si : $\alpha < 2$.

Remarque : quelque soit la valeur de α , la suite converge uniformément sur $[a,1]$, avec : $0 < a < 1$.

26. a. Pour x un réel fixé : $\exists n_x \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_x$, $x < n$, et : $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$,

et un développement limité montre que cette suite tend vers e^{-x} .

Donc la suite (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers $f : x \mapsto e^{-x}$.

b. Soit maintenant un entier n fixé : $n \geq 2$.

On peut tout d'abord remarquer que : $\forall x \in [0, n[$, $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$, donc : $f_n(x) \leq e^{-x}$.

Puis : $\forall x \in [0, n[$, $f(x) - f_n(x) = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = u_n(x)$, et : $u_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$.

Sur $[0, n[$, on a : $(u_n'(x) = 0) \Leftrightarrow (-x = (n-1) \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right))$.

Posons alors : $\forall x \in [0, n[$, $v_n(x) = x + (n-1) \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$, ce qui donne : $v_n'(x) = \frac{1-x}{n-x}$.

On constate que v_n' est positive sur $[0,1]$, nulle en 1 et négative sur $[1, n[$.

Donc v_n s'annule en 0, est croissante sur $[0,1]$ puis décroît strictement sur $[1, n[$ et tend vers $-\infty$ en n .

Donc v_n s'annule une seule fois sur $]0, n[$ en une valeur α_n , et u_n' s'annule une seule fois sur $]0, n[$ en

α_n , qui vérifie : $e^{-\alpha_n} = \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$.

u_n est alors :

- croissante sur $[0, \alpha_n]$ puisque : $f(0) - f_n(0) = 0$, et : $\forall x \in [0, n[$, $f(x) - f_n(x) \geq 0$, et :
- décroissante sur $[\alpha_n, n[$.

Finalement : $\forall x \in [0, n[$, $0 \leq f(x) - f_n(x) = u_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha_n} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)\right) = \frac{\alpha_n \cdot e^{-\alpha_n}}{n}$.

Et comme la fonction : $x \mapsto x \cdot e^{-x}$, est continue sur \mathbb{R}^+ , nulle en 0 et de limite nulle en $+\infty$, elle est

bornée sur \mathbb{R}^+ par une valeur K , d'où on déduit que : $\forall x \in [0, n[$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{K}{n}$.

Par ailleurs : $\forall x \in [n, +\infty)$, $|f(x) - f_n(x)| = e^{-x} \leq e^{-n}$, et on déduit que :

$$\forall n \geq 2, \sup_{[0, +\infty)} |f_n - f| \leq \max\left(\frac{K}{n}, e^{-n}\right) \leq \frac{K}{n} + e^{-n}.$$

En conclusion, la suite (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers P_n .

27. a. Notons : $\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], g_n(x) = x + \frac{x(1-x)}{n}$.

Alors g_n est de classe C^1 sur $[0,1]$ pour tout entier : $n \geq 1$, et :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], g_n'(x) = 1 + \frac{1-2x}{n} = \frac{(n+1)-2x}{n}.$$

Donc : $\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], g_n'(x) \geq \frac{(n+1)-2}{n} = \frac{n-1}{n} \geq 0$, et g_n est croissante sur $[0,1]$.

On en déduit que : $g_n([0,1]) = [g_n(0), g_n(1)] = [0,1]$.

Donc : $\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], g_n(x) \in [0,1]$, et $f_n(x)$ existe.

b. Pour : $x \in [0,1]$, fixé, la suite $\left(x + \frac{x(1-x)}{n}\right)$ tend vers x , et par continuité de f en x , la suite $(f_n(x))$

tend vers $f(x)$.

Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers f .

Enfin le théorème des accroissements finis garantit que :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], \exists c_{n,x} \in [0,1], f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{n} \cdot f'(c_{n,x}).$$

Notons alors M un majorant de $|f'|$ sur $[0,1]$ (qui existe puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$) et :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], |f_n(x) - f(x)| \leq M \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M}{n},$$

d'où on déduit que : $\forall n \geq 1, \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{n}$,

et la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f .

28. a. Puisque la suite (P_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers P_n , on peut affirmer que, pour : $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, il

existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, \sup_{\mathbb{R}} |P_n - f| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Donc : $\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - P_N(x)| \leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_N(x)| \leq 2\varepsilon = 1$.

Pour tout entier : $n \geq N$, la fonction $P_n - P_N$ étant alors polynomiale et bornée sur \mathbb{R} , elle est constante.

b. Notons alors : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = P_N + a_n$, où : $a_n \in \mathbb{R}$.

La suite $(P_n(0))$ converge puisque (P_n) convergeant uniformément, elle converge simplement sur \mathbb{R} .

Donc de l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = P_n(0) - P_N(0)$, on en déduit que la suite (a_n) converge vers une limite qu'on peut noter α .

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = P_N(x) + a_n$, et en passant à la limite, on en déduit que :

$$f(x) = P_N(x) + \alpha,$$

autrement dit, P_n est une fonction polynomiale.

29. Il suffit d'écrire :

$$\forall x \in I, |u_n(\varphi(x)) - u(\varphi(x))| \leq \sup_{y \in J} |u_n(y) - u(y)| = \sup_J |u_n - u|, \text{ d'où : } \sup_I |u_n \circ \varphi - u \circ \varphi| \leq \sup_J |u_n - u|.$$

Le théorème des gendarmes garantit alors que $(u_n \circ \varphi)$ converge bien uniformément sur I vers $u \circ \varphi$.

30. Notons M_f et M_g des majorants de $|f|$ et de $|g|$ sur I .

$$\text{Alors : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x)| \leq |f_n(x).g_n(x) - f(x).g_n(x)| + |f(x).g_n(x) - f(x).g(x)|.$$

$$\text{D'où : } |f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x)| \leq |g_n(x)| |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| |g_n(x) - g(x)|.$$

Puisque (g_n) converge uniformément sur I vers g , on sait que $(\sup_I |g_n - g|)$ tend vers 0 donc est une suite bornée : notons M un majorant de cette suite.

$$\text{Alors : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |g_n(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \leq \sup_I |g_n - g| + |g(x)| \leq M + M_g.$$

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x).g_n(x) - f(x).g(x)| \leq (M + M_g) \cdot \sup_I |f_n - f| + M_f \cdot \sup_I |g_n - g|,$$

$$\text{et donc : } \forall n \in \mathbb{N}, \sup_I |f_n.g_n - f.g| \leq (M + M_g) \cdot \sup_I |f_n - f| + M_f \cdot \sup_I |g_n - g|.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure à la convergence uniforme de $(f_n.g_n)$ sur I vers $f.g$.

Convergence simple, uniforme ou normale de séries de fonctions.

31. a. Pour x fixé, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées et donc converge.

$$\text{Puisque : } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, |u_n(x)| = \ln \left(1 + \frac{x}{n.(1+x)} \right) \sim_{+\infty} \frac{x}{(1+x)} \cdot \frac{1}{n}, \text{ la série n'est pas absolument convergente}$$

et il n'y a convergence normale de la série de fonctions sur aucun intervalle dans \mathbb{R}^+ (autre que $\{0\}$).

Enfin, le fait que le critère spécial s'applique pour tout x garantit que :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+, |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \ln \left(1 + \frac{x}{(n+1).(1+x)} \right) \leq \frac{x}{(n+1).(1+x)} \leq \frac{1}{n+1}, \text{ et :}$$

$$\sup_{\mathbb{R}^+} |R_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Il y a donc convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ .

b. Pour x fixé dans \mathbb{R}^{+*} ,

- si : $x = 1$, la série diverge grossièrement, puisque : $\forall n \geq 1, u_n(1) = \frac{1}{2}$,

- si : $x < 1$, alors : $|u_n(x)| = \frac{1}{x^n + x^{-n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{-n}} = x^n$, et la série converge,

- si : $x > 1$, alors : $|u_n(x)| = \frac{1}{x^n + x^{-n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$, et la série converge.

Donc il y a convergence simple sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Puisque les fonctions sont positives, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S(x) - S_n(x) = R_n(x)$, et : $u_{n+1}(x) \leq R_n(x)$.

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 1} u_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$, et : $\lim_{x \rightarrow 0} u_{n+1}(x) = +\infty$, il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur des intervalles ayant pour borne une de ces valeurs.

$$\text{Sur : } [a,b] \subset]0,1[, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,b], |u_n(x)| = \frac{1}{x^n + x^{-n}} \leq \frac{1}{x^{-n}} = x^n \leq b^n,$$

$$\text{et sur : } [a,+\infty) \subset]1,+\infty[, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,+\infty), |u_n(x)| = \frac{1}{x^n + x^{-n}} \leq \frac{1}{x^n} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

On en déduit la convergence normale et uniforme de la série sur les intervalles proposés.

c. Il est clairement nécessaire d'avoir : $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$, pour que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ puisse converger.

Donc on doit se restreindre à : $x > 0$.

$$\text{Pour } x \text{ fixé, } x > 0, \text{ alors : } n^2.u_n(x) = n^4 \cdot \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n, \text{ tend vers 0 (théorème des croissances comparées).}$$

Donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge et la série de fonctions converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On remarque ensuite que la fonction : $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$, est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Sur $[a, b] \subset]0, +\infty)$, on pose : $\alpha = \max\left(\left|\frac{1-a}{1+a}\right|, \left|\frac{1-b}{1+b}\right|\right)$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], |u_n(x)| \leq n^2 \cdot \alpha^n$.

On en déduit que la série de fonctions converge normalement (donc uniformément) sur $[a, b]$.

Puis, sur $]0, a]$ ou $[a, +\infty)$, il ne peut y avoir convergence normale car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 0} |u_n(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |u_n(x)| = n^2, \text{ donc : } \sup_{]0, a]} |u_n| \geq n^2, \text{ et : } \sup_{[a, +\infty)} |u_n| \geq n^2.$$

Enfin, pour : $x \in]0, a]$, (avec : $0 < a < 1$),

- $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est à termes positifs et :
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) \leq S(x) - S_n(x)$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = n^2$, et si $S - S_n$ est bornée sur $]0, a]$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 \leq \sup_{]0, a]} |S - S_n|$.

Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $]0, a]$.

Soit : $1 \leq a$, et supposons qu'il y ait convergence uniforme de (u_n) sur $[a, +\infty)$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |S - S_n|$ est bornée sur $[a, +\infty)$, et $(\sup_{[a, +\infty)} |S - S_n|)$ tend vers 0.

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| \leq |S_{n+1} - S| + |S - S_n| \leq \sup_{[a, +\infty)} |S - S_n| + \sup_{[a, +\infty)} |S - S_{n+1}|$.

On aurait donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty), |u_{n+1}(x)| \leq \sup_{[a, +\infty)} |S - S_n| + \sup_{[a, +\infty)} |S - S_{n+1}|$, et en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} |u_n(x)| = n^2 \leq \sup_{[a, +\infty)} |S - S_n| + \sup_{[a, +\infty)} |S - S_{n+1}|,$$

ce qui est impossible puisque la suite majorante tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc il n'y a pas convergence uniforme sur $[a, +\infty)$.

Convergence et sommes de séries de fonctions.

32. a. Soit x fixé dans \mathbb{R} .

- si : $x = 0$, la série est la série nulle et elle converge.
- si : $x \neq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées, car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{C}{n}\right),$$

et la suite tend vers 0 et est bien décroissante puisque \ln est croissant sur \mathbb{R}^+ .

Donc la suite de fonctions converge finalement simplement sur \mathbb{R} .

La convergence normale n'est obtenue sur aucun intervalle, car elle entraînerait la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ pour des valeurs de x non nulles.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}^*, |u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{C}{n}\right) \sim \frac{C}{n}$, ce qui interdit la convergence de $\sum_{n \geq 1} |u_n(x)|$.

Enfin pour n fixé non nul, on a vu que pour tout réel x la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ vérifie le critère spécial donc :

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{(n+1)(1+x^2)}\right) \leq \frac{x^2}{(n+1)(1+x^2)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{\mathbb{R}} |R_n| \leq \frac{1}{n+1}$,

et il y a convergence uniforme de la série sur \mathbb{R} .

b. On sait que la série de fonctions converge uniformément sur \mathbb{R} .

De plus, chaque fonction u_n a une limite finie en $+\infty$ qui vaut : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = (-1)^n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Enfin, la série des limites est convergente (toujours avec le critère spécial des séries alternées).

Donc par le théorème de la double limite, on peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Si on revient à des sommes partielles, on peut écrire :

$$\forall N \geq 1, S_{2.N} = \sum_{n=1}^{2.N} (-1)^n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{2.N} (-1)^n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{2.k+1}{2.k}\right) - \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{2.k}{2.k-1}\right),$$

$$\text{soit : } S_{2.N} = 2 \cdot \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{2.k-1}{2.k}\right) + \ln(2.N+1) = 2 \cdot \ln\left(\frac{(2.N)!}{2^{2.N} \cdot N!^2} \cdot \sqrt{N}\right) + \ln(2) + o_{+\infty}(1).$$

$$\text{En reprenant les intégrales de Wallis, on avait : } I_{2.N} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2.N}(t) \cdot dt = \frac{(2.N)!}{2^{2.N} \cdot N!^2} \cdot \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4.N}}.$$

$$\text{On en déduit que : } \frac{(2.N)!}{2^{2.N} \cdot N!^2} \cdot \sqrt{N} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \text{ puis que } (S_{2.N}) \text{ tend vers } \ln\left(\frac{2}{\pi}\right),$$

$$\text{soit finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2.N} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

33. a. On commence par poser : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, u_n(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}$.

On peut ici essayer de démontrer la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout $[a, +\infty)$, avec : $a > 0$.

$$\text{En effet : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty), 0 \leq u_n(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} \leq \prod_{k=0}^n \frac{1}{a+k} \leq \frac{1}{a} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{a+k} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n!}.$$

On en déduit bien la convergence normale de la série sur tout intervalle $[a, +\infty)$.

Donc S est définie sur \mathbb{R}^{+*} .

De plus, toutes les fonctions u_n sont continues sur \mathbb{R}^{+*} , donc la convergence normale sur tous les intervalles précédents garantit que S est continue sur $]0, +\infty[$.

b. Pour : $x > 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x+1) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+1+k} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x+k} = x \cdot \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k} = x \cdot u_{n+1}(x)$.

Donc, les séries étant toutes convergentes, on en déduit que :

$$\forall x > 0, S(x+1) = x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = x \cdot (S(x) - \frac{1}{x}) = x \cdot S(x) - 1.$$

c. Pour un équivalent en 0, on commence par écrire : $\forall x > 0, S(x) = \frac{S(x+1)+1}{x}$.

Comme S est continue sur \mathbb{R}^+ , $S(x+1)$ tend vers $S(1)$ quand x tend vers 0.

$$\text{Or : } S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1 - 1 = e - 1, \text{ donc : } S(x) \underset{0}{\sim} \frac{e}{x}.$$

$$\text{En } +\infty, \text{ on commence par écrire : } S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{x+k} \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot S_1(x).$$

Il suffit alors de démontrer que la nouvelle fonction S_1 qui apparaît tend vers 0 en $+\infty$.

Or cette nouvelle série converge normalement sur $[1, +\infty)$ (comme S), chaque fonction qui la constitue a une limite finie (nulle) en $+\infty$, et la série de ces limites converge.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} S_1(x) = 0, \text{ d'où : } S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot o_{+\infty}(1), \text{ et finalement : } S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

34. a. On pose : $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2.x}{n^2 - x^2}$.

Pour : $x \in]-2, +2[$, tous les termes $u_n(x)$ sont définis, pour : $n \geq 2$.

Pour l'étude de la convergence simple de la série, on distingue deux cas :

- si : $x = 0$, la série $\sum_{n \geq 2} u_n(0)$ est la série nulle et converge,

• si : $x \neq 0$, alors : $|u_n(x)| = \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \sim \frac{2|x|}{n^2}$, et la série $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ est absolument convergente.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge simplement sur $]-2, +2[$ et φ est définie sur cet intervalle.

Pour : $n \geq 2, \forall x \in [0, 1]$, on a de plus : $|u_n(x)| = \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \leq \frac{2}{n^2 - 1} = \alpha_n \sim \frac{2}{n^2}$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Comme de plus, toutes les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1]$, φ est également continue sur $[0, 1]$.

b. La convergence normale établie précédemment sur $[0, 1]$ permet d'écrire :

$$\int_0^1 \varphi(x).dx = \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).dx.$$

Puis : $\forall n \geq 2, \int_0^1 \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).dx = [-\ln(n-x) - \ln(n+x)]_0^1 = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Et la convergence de cette série télescopique donne finalement :

$$\int_0^1 \varphi(x).dx = 0 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

35. a. Pour tout x réel (ou complexe), on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

b. On peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2.\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.\cos(x))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x), \text{ avec : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(2.\cos(x))^n}{n!}.$$

c. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $[0, 2.\pi]$.

Puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 2.\pi], |u_n(x)| \leq \frac{2^n}{n!} = \alpha_n$,

et la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ converge car elle correspond au développement en série de e^2 .

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0, 2.\pi]$.

On peut donc écrire : $\int_0^{2.\pi} e^{2.\cos(x)}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2.\pi} \frac{(2.\cos(x))^n}{n!}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \int_0^{2.\pi} \cos(x)^n .dx$.

Puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{2.\pi} \cos(x)^n .dx = \int_0^\pi \cos(x)^n .dx + \int_\pi^{2.\pi} \cos(x)^n .dx = (1 + (-1)^n) \cdot \int_0^\pi \cos(x)^n .dx$.

• Si n est impair, l'intégrale est nulle.

• Si n est pair, posons : $n = 2.p, p \in \mathbb{N}$.

On peut alors écrire : $\int_0^{2.\pi} \cos(x)^n .dx = 2 \cdot \int_0^\pi \cos(x)^{2.p} .dx = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{2.p} .dx$.

On reconnaît une intégrale de Wallis, et :

$$\int_0^{2.\pi} \cos(x)^n .dx = 4 \cdot \frac{(2.p)!}{2^{2.p} (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ d'où : } \frac{2^n}{n!} \cdot \int_0^{2.\pi} \cos(x)^n .dx = \frac{2^{2.p}}{(2.p)!} \cdot \frac{(2.p)!}{2^{2.p} (p!)^2} \cdot 2.\pi = \frac{2.\pi}{(p!)^2}.$$

Finalement : $\int_0^{2.\pi} e^{2.\cos(x)}.dx = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \int_0^{2.\pi} \cos(x)^n .dx = 2.\pi \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p!)^2}$.

36. On commence par poser : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$.

- Pour x réel strictement positif fixé la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées et donc converge (le terme général est alterné et décroît en valeur absolue vers 0).

De plus : $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty), |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$,

d'où : $\sup_{[a, +\infty)} |R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$.

Donc la série converge uniformément $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $[a, +\infty)$ et les fonctions u_n étant continues sur $]0, +\infty)$, on en déduit la continuité de ζ_2 sur $]0, +\infty)$.

- Toutes les fonctions u_n sont de plus de classe C^1 sur $]0, +\infty)$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \ln(n)}{n^x}.$$

Considérons alors, pour x fixé, la fonction ψ_x définie par : $\forall t > 0, t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$, de classe C^1 sur \mathbb{R}^{**} .

Sa dérivée vaut : $\forall t > 0, \psi_x'(t) = \frac{1 - x \cdot \ln(t)}{t^{x+1}}$, et ψ_x est croissante sur $]0, e^{\frac{1}{x}}[$, décroissante sur $]e^{\frac{1}{x}}, +\infty)$.

Donc la suite $(|u_n'(x)|)$ est décroissante dès que : $n \geq e^{\frac{1}{x}}$.

Soit maintenant : $a > 0$, et : $n \geq n_a = \left\lceil e^{\frac{1}{a}} \right\rceil + 1$.

Alors : $\forall x \in [a, +\infty)$, on a : $e^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{a}}$, et donc :

$\forall x \in [a, +\infty), \forall n \geq n_a = \left\lceil e^{\frac{1}{a}} \right\rceil + 1$, la suite $(|u_n'(x)|)_{n \geq n_a}$ est décroissante et la série $\sum_{n \geq n_a} u_n'(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

Donc : $\forall n \geq n_a, \forall x \in [a, +\infty), |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x) \right| \leq |u_{n+1}'(x)| \leq \frac{\ln(n)}{(n+1)^a}$,

où on a noté r_n le reste d'ordre n de cette série alternée.

Enfin : $\forall n \geq n_a, \sup_{[a, +\infty)} |r_n| \leq \frac{\ln(n)}{(n+1)^a}$, et il y a convergence uniforme de la série des dérivées sur $[a, +\infty)$.

On en déduit que ζ_2 est de classe C^1 sur $]0, +\infty)$, et : $\forall x > 0, \zeta_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \ln(n)}{n^x}$.

37. a. Raisonnons par analyse-synthèse.

Si f existe, alors pour : $x > 0$, fixé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(x+n)^2} = f(x+n+1) + f(x+n), \text{ d'où :}$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot (f(x+n+1) + f(x+n)) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot f(x+n+1) + \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot f(x+n),$$

donc : $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} \cdot f(x+n) + \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot f(x+n) = (-1)^N \cdot f(x+N) + f(x)$.

On en déduit que : $\forall N \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} - (-1)^N \cdot f(x+N)$.

Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$ est absolument convergente car : $\left| \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \right| \sim \frac{1}{n^2}$, et f est supposée avoir une limite nulle en $+\infty$.

$$\text{Donc : } f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} - (-1)^N \cdot f(x+N) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}.$$

Il n'y a donc qu'une seule fonction qui puisse répondre au problème.

Réciproquement, la fonction que l'on vient de trouver est bien définie sur \mathbb{R}^{**} et est telle que :

$$\bullet \forall x > 0, f(x+1) + f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+1+n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2},$$

$$\bullet \text{ si on pose : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}, \text{ alors :}$$

- la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty)$ car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, |u_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^2} = \alpha_n, \text{ et } \sum_{n \geq 0} \alpha_n \text{ converge,}$$

- chaque fonction u_n a pour limite 0 en $+\infty$,

- la série de ces limites est évidemment convergente,

$$\text{donc on en déduit que : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0.$$

Conclusion : la fonction trouvée répond effectivement au problème qui admet donc une unique solution.

b. La convergence normale sur $[1, +\infty)$ obtenue au-dessus s'obtient de la même façon sur tout intervalle $[a, +\infty)$ avec : $a > 0$.

De plus, toutes les fonctions u_n sont continues sur \mathbb{R}^+ .

Donc la somme f de la série de fonctions est encore continue sur \mathbb{R}^{**} .

$$\text{Enfin : } \forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x^2} - f(x+1),$$

$$\text{et comme par continuité : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = f(1), \text{ on en déduit que : } f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}, \text{ et : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$38. a. \bullet \text{ Pour : } x > 1, \text{ on a : } \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^{-n} + x^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n},$$

et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge (l'autre est une série géométrique convergente).

$$\bullet \text{ Pour : } 0 < x < 1, \text{ la série est également convergente (même argument) car : } \frac{x^n}{1+x^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} x^n.$$

• Pour : $x = 0$, la série est la série nulle donc elle converge.

$$\bullet \text{ Pour : } x = 1, \text{ la série diverge grossièrement car son terme général vaut constamment } \frac{1}{2}.$$

Donc : $D = [0, 1[\cup]1, +\infty)$.

$$\text{Pour } x \text{ non nul dans } D, \text{ on peut écrire : } S\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{-n}}{1+x^{-2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n} \cdot x^{-n}}{x^{2n} \cdot (1+x^{-2n})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} = S(x).$$

$$b. \text{ Posons : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Les fonctions u_n sont définies et de classe C^1 sur $[0, +\infty)$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, u_n'(x) = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot (1 - x^{2n})}{(1 + x^{2n})^2}.$$

Donc toutes les fonctions u_n sont croissantes sur $[0, 1[$, et leur somme (même infinie) S est encore

croissante sur $[0,1[$.

En composant avec la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$, et à l'aide de la relation obtenue dans la question a., on en

déduit que S est décroissante sur $]1,+\infty)$.

Ensuite, pour : $0 < a < 1$, la suite (u_n) converge normalement sur $[0, a]$, car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, a], |u_n(x)| \leq x^n \leq a^n = \alpha_n, \text{ et la série } \sum_{n \geq 0} \alpha_n \text{ converge.}$$

De plus toutes les fonctions u_n sont continues sur \mathbb{R}^+ , donc S est continue sur $[0,1[$.

$$\text{En particulier : } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} S(y) = S(0) = 0.$$

Enfin étant croissante sur $[0,1[$, la fonction S admet une limite (finie ou infinie) en 1 et comme :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \geq \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{1+x^{2n}},$$

la limite de S en 1 ne peut être réelle car si c'était le cas (en la notant alors L), on aurait :

$$\forall N \in \mathbb{N}, L = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{N+1}{2},$$

ce qui est impossible.

$$\text{Conclusion : } \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty, \text{ et : } \lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} S\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 1^-} S(y) = +\infty.$$