Séries entières (corrigé niveau 3).

Calcul de rayons de convergence.

42. a. Pour cette première série, on utilise un développement limité de $\arctan$.

Soit : $h \mapsto \arctan(1+h)$, qui a pour dérivée : $\dfrac{1}{1+(1+h)^2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1+h+o_0(h)} = \dfrac{1}{2}.(1-h+o_0(h))$,

et en primitivant : $\arctan(1+h) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{h}{2} + o_0(h)$,

d'où : $\arctan\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - \dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(1 - \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2.n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit que : $a_n = \arctan\left(\dfrac{n}{n+1}\right) - \dfrac{\pi}{4} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2.n}$, et : $R = 1$.

- De plus, en +1, la série est divergente du fait de l'équivalent (qui est de signe constant).
- En -1, puisque la suite $((-1)^n.a_n)$ est alternée , et par composition de fonctions monotones, la suite $(|a_n|)$ décroît vers 0, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n.a_n$ vérifie donc le critère spécial des séries alternées et elle converge.

b. On commence par noter : $\forall\ z \in \mathbb{C}^*,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^{-(\ln(n))^a}.z^n$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e^{+(\ln(n))^a - (\ln(n+1))^a}.|z|$.

Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (\ln(n+1))^a = \left(\ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)^a = (\ln(n))^a.\left(1 + \dfrac{1}{n.\ln(n)} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\ln(n)}\right)\right)^a$,

puis : $(\ln(n+1))^a = (\ln(n))^a + a.\dfrac{(\ln(n))^{a-1}}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{(\ln(n))^{a-1}}{n}\right)$,

et donc : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \exp\left(-a.\dfrac{(\ln(n))^{a-1}}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{(\ln(n))^{a-1}}{n}\right)\right).|z|$.

Pour toute valeur de a, on constate que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $|z|$ (avec le théorème des croissances comparées) et on en déduit que : $R = 1$.

- Si de plus : $a \leq 0$, la série diverge grossièrement en ± 1 car le terme général de la série tend en valeur absolue vers 1.
- Si : $0 < a$:
  - en -1, la série est alternée et vérifie le critère spécial donc la série est convergente.
  - en +1, on distingue encore deux sous-cas :
    - si : $0 < a \leq 1$, et la série diverge car :
      $\forall$ n $\geq$ 3, $a.\ln(\ln(n)) \leq \ln(\ln(n))$,
      d'où : $(\ln(n))^a \leq (\ln(n))$, et : $e^{-(\ln(n))^a} \geq e^{-\ln(n)} = \dfrac{1}{n}$,
    - si : $1 < a$, et la série converge car : $n^2.e^{-(\ln(n))^a} = \exp(-(\ln(n))^a + 2.\ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c. Si on note : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{a+(-1)^n}}$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^{a+1}} \leq a_n \leq \dfrac{1}{n^{a-1}}$,

donc : $R = 1$, car c'est le rayon de convergence des deux séries entières encadrantes.

- De plus, en -1, la série est à termes positifs, et pour n impair, on a : $a_n.(-1)^n = \dfrac{1}{n^{a-1}}$.

On distingue alors deux cas suivant la valeur de a :

- si : $a \leq 2$, alors en minorant par la somme des termes d'indices impairs :

$$\forall\ N \in \mathbb{N},\ S_{2.N+1} = \sum_{k=1}^{2.N+1} a_k.(-1)^k \geq \sum_{p=0}^{N} a_{2.p+1}.(-1)^{2.p+1} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2.p+1)^{a-1}},$$

et la quantité qui minore tend vers +∞ en +∞ : la série diverge,

- si : $2 < a$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^{a-1}}$, et la série majorante converge.

• En +1 :

- si : $a \leq 1$, alors la suite des termes impairs de la série (qui valent : $a_n = -\frac{1}{n^{a-1}}$), ne tend pas vers 0, donc la série diverge,

- si : $1 < a \leq 2$, alors :

$$\forall\ N \in \mathbb{N},\ S_{2.N+1} = \sum_{k=1}^{2.N+1} a_k = \sum_{p=0}^{N} a_{2.p+1} + \sum_{p=1}^{N} a_{2.p} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2.p+1)^{a-1}} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2.p)^{a+1}} = I_N + A_N,$$

et la suite (A_N) converge alors que la suite (I_N) diverge, ce qui montre la divergence de ($S_{2.N+1}$) et donc la divergence de la série,

- si : $2 < a$: alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \frac{1}{n^{a-1}}$,

et comme la série majorante converge, la série converge.

d. On commence ici par transformer le coefficient générique de la série entière :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2).dx = \frac{1}{2}.\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}.dt = \frac{(-1)^n}{2}.\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+n.\pi}}.du.$$

On a alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+n.\pi}}.du$,

et comme : $\forall\ u \in [0,\pi],\ \frac{\sin(u)}{\sqrt{\pi+n.\pi}} \leq \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+n.\pi}} \leq \frac{\sin(u)}{\sqrt{n.\pi}}$, puis : $\int_0^{\pi} \sin(u).du = 2$,

on en déduit que : $\frac{1}{\sqrt{(n+1).\pi}} \leq |a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n.\pi}}$.

De plus le rayon de convergence des deux séries entières encadrantes vaut 1, donc : $R = 1$

Puis :

• en +1, la série est convergente car la suite des sommes partielles converge vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2.\sqrt{u}}.du$.

Cette intégrale est bien convergente, car la fonction sous l'intégrale est définie et continue sur]0,+∞), se prolonge par continuité en 0 et une intégration par parties sur l'intervalle [1,+∞), montre sa convergence en +∞.

• en -1 la série est divergente car son terme général vérifie alors :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (-1)^n.a_n = |a_n| \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1).\pi}}.$$

43. a. • Pour la première série, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{\cos(n)}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1}$, donc : $R \geq 1$.

Puis : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ n_k \in \mathbb{N},\ 2.k.\pi - \frac{\pi}{4} \leq n_k \leq 2.k.\pi + \frac{\pi}{4}$,

puisque la longueur de l'intervalle $\left[2.k.\pi - \frac{\pi}{4}, 2.k.\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ vaut : $\frac{\pi}{2} \geq 1$.

Donc il existe une infinité d'entiers n_k tels que : $\cos(n_k) \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $\forall\ 1 < |x|,\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \left|\frac{\cos(n_k)}{n_k^2+1}\right|.|x|^{n_k} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{|x|^{n_k}}{n_k^2+1}$,

et la suite $\left(\frac{\cos(n)}{n^2+1}.x^n\right)$ ne peut tendre vers 0 puisqu'une suite extraite tend vers +∞ avec le théorème des croissances comparées.
Donc : $R \le 1$, et finalement : $R = 1$.
• Pour la deuxième série, des arguments similaires montrent que : $R = 1$.
b. Evidemment, il y a absolue convergence en ± 1.

Transformation d'Abel et application aux séries entières.

44. a. Cette propriété peut se montrer évidemment par récurrence sur p.

• l'égalité est immédiate pour : $p = 1$, car : $\sum_{k=1}^{p} u_k.v_k = u_1.v_1 = u_1.\sigma_1$,

• si on la suppose vraie pour un entier : $p \ge 1$, alors :

$$u_{p+1}.\sigma_{p+1} + \sum_{k=1}^{p+1-1}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k = \left(\sum_{k=1}^{p-1}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k\right) + (u_p - u_{p+1}).\sigma_p + u_{p+1}.\sigma_{p+1}, \text{ et donc :}$$

$$u_{p+1}.\sigma_{p+1} + \sum_{k=1}^{p}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k = \left(\sum_{k=1}^{p-1}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k + u_p.\sigma_p\right) + u_{p+1}.(\sigma_{p+1} - \sigma_p) = \sum_{k=1}^{p} u_k.v_k + u_{p+1}.v_{p+1},$$

d'où le résultat voulu au rang $p+1$.

b. On reprend l'égalité précédente, et :

• en notant M un majorant de ($|\sigma_p|$), alors :

$\forall\ p \ge 1$, $|u_k - u_{k+1}|.|\sigma_k| = (u_k - u_{k+1}).|\sigma_k| \le (u_k - u_{k+1}).M$,

donc la série $\sum_{k\ge1}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k$ est absolument convergente, car son terme général en valeur absolue est majoré par le terme général d'une série télescopique convergente,

• la suite ($u_p.\sigma_p$) tend vers 0 comme produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée.

Donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{p} u_k.v_k\right)$ est la somme de deux suites convergentes et converge.

c. La règle de d'Alembert donne immédiatement le rayon de convergence de la première série qui vaut 1.
Puis :

• pour : $z = 1$, la série converge si et seulement si : $\alpha > 1$,

• pour : $|z| = 1$, et : $z \ne 1$, on doit avoir : $\alpha > 0$, pour que la série converge (sinon le terme général ne tend pas vers 0) et si cette condition est remplie, alors en notant : $z = e^{i.\theta}$, on constate que :

- $\forall\ n \ge 1$, $\frac{z^n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}.z^n$,

- la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est réelle, décroissante qui tend vers 0, et :

- $\forall\ p \ge 1$, $\left|\sum_{k=1}^{p} z^k\right| = \left|z.\frac{1-z^p}{1-z}\right| \le \frac{2}{|1-z|}$.

Dans ce cas, la transformation d'Abel montre que la série est toujours convergente.
La série entière converge donc sur tout le bord du disque de convergence, sauf pour : $z = 1$.

Pour la deuxième série, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \le \frac{1}{n}$, donc : $R \ge 1$.

Puis : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\exists\ n_k \in \mathbb{N}$, $2.k.\pi - \frac{\pi}{4} \le n_k \le 2.k.\pi + \frac{\pi}{4}$,

puisque la longueur de l'intervalle $\left[2.k.\pi - \frac{\pi}{4}, 2.k.\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ vaut : $\frac{\pi}{2} \ge 1$.

Donc il existe une infinité d'entiers n_k tels que : $\cos(n_k) \geq \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et on en déduit que :

$$\forall\ 1 < |x|,\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \left|\frac{\cos(n_k)}{n_k}\right|.|x|^{n_k} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{|x|^{n_k}}{n_k},$$

et la suite $\left(\dfrac{\cos(n)}{n}.x^n\right)$ ne peut tendre vers 0 puisqu'une suite extraite tend vers +∞ avec le théorème des croissances comparées.

Donc : $R \leq 1$, et finalement : $R = 1$.

Enfin : $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, on peut poser : $z = e^{i.\theta}$, et :

- la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est réelle, décroissante et tend vers 0,
- $\forall\ p \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \cos(k).z^k = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{p} e^{i.k}.e^{i.k.\theta} + \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{p} e^{-i.k}.e^{i.k.\theta} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{p} e^{i.k.(\theta+1)} + \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{p} e^{i.k.(\theta-1)}$, d'où :

  - si : $\theta \neq \pm 1\ (2.\pi)$, alors :

$$\forall\ p \geq 1,\ \left|\sum_{k=1}^{p} \cos(k).z^k\right| \leq \frac{1}{2}.\left|e^{i.(\theta+1)}.\frac{1 - e^{i.p.(\theta+1)}}{1 - e^{i.(\theta+1)}}\right| + \frac{1}{2}.\left|e^{i.(\theta-1)}.\frac{1 - e^{i.p.(\theta-1)}}{1 - e^{i.(\theta-1)}}\right| \leq \frac{1}{\left|1 - e^{i.(\theta+1)}\right|} + \frac{1}{\left|1 - e^{i.(\theta-1)}\right|},$$

  et la transformation d'Abel donne la convergence de la série,

  - si : $\theta = 1\ (2.\pi)$, alors : $\forall\ p \geq 1$, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{p} e^{i.k.(\theta+1)}\right| = \left|e^{i.(\theta+1)}.\frac{1 - e^{i.p.(\theta+1)}}{1 - e^{i.(\theta+1)}}\right| \leq \frac{2}{\left|1 - e^{i.(\theta+1)}\right|}$,

  et la première somme partielle est bornée, alors que la deuxième vaut p et tend vers +∞.
  Dans ce cas, la série est donc divergente.
  - si : $\theta = -1\ (2.\pi)$, on constate la même chose, les deux sommes partielles étant inversées.

Donc la série converge sur tout le bord du disque de convergence, sauf pour : $z = e^{\pm i}$.

45. a. La suite (S_n) converge vers : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S(1) = 0$, donc est bornée (par M) et :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0,1[,\ |S_n.x^n| \leq M.x^n,$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} S_n.x^n$ est convergente.

Puis on utilise la même technique que la transformation d'Abel.

En effet, pour : $N \in \mathbb{N}^*$, et : $x \in [0,1[$, on peut écrire :

$$(1-x).\sum_{n=0}^{N} S_n.x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n.x^n - \sum_{n=0}^{N} S_n.x^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} S_n.x^n - \sum_{n=1}^{N+1} S_{n-1}.x^n = S_0 + \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_n).x^n - S_N.x^{N+1},$$

et : $\displaystyle(1-x).\sum_{n=0}^{N} S_n.x^n = S_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n.x^n - S_N.x^{N+1} = \sum_{n=0}^{N} a_n.x^n - S_N.x^{N+1}$,

car : $S_0 = a_0$.

Or : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N.x^{N+1} = 0$, car : $|x| < 1$, et (S_n) est bornée donc en faisant tendre N vers +∞ :

$$(1-x).\sum_{n=0}^{+\infty} S_n.x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n = S(x).$$

b. Puisque (S_n) converge vers 0, il existe : $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall\ n \geq n_0$, $|S_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$,

et : $\forall\ x \in [0,1[$, $\displaystyle |S(x)| = (1-x).\left|\sum_{n=0}^{+\infty} S_n.x^n\right| \leq (1-x).\sum_{n=0}^{+\infty} |S_n|.x^n = (1-x).\sum_{n=0}^{n_0} |S_n|.x^n + (1-x).\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |S_n|.x^n$.

Puis pour ces valeurs de x : $(1-x).\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|S_n|.x^n \leq \frac{\varepsilon}{2}.(1-x).\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}x^n = \frac{\varepsilon}{2}.(1-x).\frac{x^{n_0}}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}.x^{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc on a bien pour ce n_0 : $\forall\ x \in [0,1[$, $|S(x)| \leq (1-x).\sum_{n=0}^{n_0}|S_n| + \frac{\varepsilon}{2}$.

c. La quantité en facteur de $1-x$ étant constante, on peut trouver : $\alpha > 0$, tel que :

$$\forall\ x \in [0,1[,\ (1-\alpha \leq x < 1) \Rightarrow ((1-x).\sum_{n=0}^{n_0}|S_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}),$$

et donc : $\forall\ x \in [0,1[$, $(1-\alpha \leq x < 1) \Rightarrow (|S(x)| \leq \varepsilon)$,

ce qui montre que : $\lim_{x\to 1^-} S(x) = 0 = S(1)$, autrement dit S est continue en 1.

d. Dans le cas où : $S(1) \neq 0$, on pose : $f = S - S(0)$, et f est une fonction qui vérifie les hypothèses de la première partie de l'exercice.
Donc f est continue en 1, donc S aussi et on a encore : $\lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$.

Produit de Cauchy.

46. a. On peut évoquer la continuité d'une fonction de variable complexe (ou la simple continuité dans le cas réel) ou dire que :

$$\forall\ 0 \leq |z| < r < R,\ |f(z) - f(0)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.z^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.|z|^n = |z|.\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.|z|^{n-1} \leq |z|.\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.r^{n-1} = C.|z|,$$

en exploitant l'absolue convergence de toutes les séries qui sont apparues.

Puis : $\exists\ \alpha = \frac{1}{C+1} > 0$, $\forall\ 0 \leq |z| \leq \alpha$, $|f(z) - f(0)| \leq C.\frac{1}{C+1} < 1$.

Et comme : $f(0) = 1$, on en déduit que : $\forall\ 0 \leq |z| \leq \alpha$, $f(z) \neq 0$.

b. Par récurrence forte.

- b_0 existe et est unique,
- si jusqu'à : $n \geq 0$, les termes $b_0,\ldots,b_n$ existent et sont uniques alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k.b_{n+1-k} = a_0.b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k.b_{n+1-k} = b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k}.b_k,$$

et il est clair qu'il existe un unique b_{n+1} tel que : $\sum_{k=0}^{n+1} a_k.b_{n+1-k} = 0$, qui est : $b_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k}.b_k$.

c. Puisque r est dans le disque ouvert de convergence, la suite $(a_n.r^n)$ est bornée et :

$\exists M > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|a_n.r^n| \leq M$.

Montrons alors l'autre inégalité à nouveau par récurrence forte.

- Elle est vérifiée pour : $n = 0$, car : $|b_0.r^0| = 1 \leq (M+1)^1 = M+1$.
- Supposons-la vérifiée jusqu'à un rang : $n \geq 0$.

Alors : $|b_{n+1}.r^{n+1}| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n+1-k}.b_k.r^{n+1}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}|a_{n+1-k}.r^{n+1-k}|.|b_k.r^k| \leq \sum_{k=0}^{n} M.(M+1)^k = M.\frac{(M+1)^{n+1}-1}{(M+1)-1}$,

soit : $|b_{n+1}.r^{n+1}| \leq (M+1)^{n+1} - 1 \leq (M+1)^{n+1}$,

ce qui termine la récurrence.

d. Posons : $\rho = \min\left(\frac{r}{M+1}, \alpha, R\right) > 0$.

Alors : $\forall\ |z| < \rho$,

- la série : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n$, et absolument convergente car : $|z| < R$,
- la série : $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.z^n$, est absolument convergente car :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left|b_n.z^n\right| = \left|b_n.r^n\right|.\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq (M+1)^n.\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$, et : $\frac{|z|}{\rho} < 1$.

Donc le produit de Cauchy de ces deux séries converge et en le notant $h(z)$, on a : $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.z^n$,

avec : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k}$.

On a ainsi : $c_0 = a_0.b_0 = 1$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = 0$, par construction de (b_n).

Autrement dit : $\forall\ |z| < \rho$, $f(z).g(z) = 1$,

et donc : $\forall\ |z| < \rho$, $\frac{1}{f(z)} = g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.z^n$,

ce qui prouve bien que $\frac{1}{f}$ se développe en série entière en 0.

e. La fonction $f\ :\ z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}$, se développe en série entière avec un rayon de convergence infini car :

$\forall\ z \in \mathbb{C}^*$, $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, et : $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$.

De plus la fonction proposée se prolonge par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$.

Donc $\frac{1}{f}$ se développe en série entière S avec un rayon de convergence : $R > 0$.

Si de plus on avait : $R > 2.\pi$, alors S serait définie sur un disque de rayon strictement supérieur à $2.\pi$.
Donc la fonction φ de ℝ dans ℂ donnée par : $\varphi(t) = S(i.t)$, serait définie sur un intervalle I autour de $2.\pi$, et serait continue sur cet intervalle comme série entière.

En particulier, on aurait : $\lim_{t \to 2.\pi^-} S(i.t) = S(2.i.\pi) \in \mathbb{C}$.

Mais on aurait de plus : $\forall\ 0 < t < 2.\pi$, $S(i.t) = \frac{1}{f(i.t)} = \frac{i.t}{e^{i.t} - 1} = i.t.\frac{e^{-i.t} - 1}{2.(1 - \cos(t))} = -\frac{i.t}{2}.\left(1 + \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}\right)$.

Or : $\lim_{t \to 2.\pi^-} \left|\frac{i.t}{2}\right| = \pi$, et : $\lim_{t \to 2.\pi^-} \left|\frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}\right| = +\infty$, donc le produit ne peut tendre vers une limite finie en $2.\pi$.

Conclusion : on a bien : $0 < R \leq 2.\pi$.

47. a. La fonction : $x \mapsto e^{x^2}$, est définie et continue sur ℝ donc admet des primitives sur ℝ.
Donc f est définie sur ℝ.

Par ailleurs : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.x^{2.n}$,

et la convergence de cette série est absolue pour tout réel x.

De même : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.x^{2.n}$,

et par primitivation terme à terme : $\int_0^x e^{t^2}.dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.\frac{x^{2.n+1}}{2.n+1}$,

la convergence étant à nouveau absolue pour tout réel x puisque tout x est dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière.
On peut donc former le produit de Cauchy de ces deux séries qui vaut :

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.x^{2.n+1}$, avec : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.\left(\frac{1}{k!}.\frac{1}{2.k+1}\right) = \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2.k+1}.\binom{n}{k} = \frac{(-1)^n}{n!}.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2.k+1}.\binom{n}{k}$,

puisque la série entière produit est une fonction impaire.

b. Puisque f est dérivable, on peut calculer :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2.x.f(x) + 1$,

et f est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy : $y' + 2.x.y - 1 = 0$, et : $y(0) = 0$.

Cherchons maintenant une série entière solution de ce même problème de Cauchy, et pour cela, soit :

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, (série entière de rayon de convergence : $R > 0$).

Alors S est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$, et : $\forall\ x \in\ ]-R,+R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1}$,

et S est solution du problème de Cauchy sur $]-R,+R[$, si et seulement si :

$\forall\ x \in\ ]-R,+R[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1} + 2.x.\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n - 1 = 0$, et : $a_0 = 0$,

soit encore : $a_0 = 0$, et : $\forall\ x \in\ ]-R,+R[,\ a_1 - 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2).a_{n+2} + 2.a_n).x^{n+1} = 0$.

Or une série entière est nulle (sur un intervalle non réduit à 0) si et seulement si tous ses coefficients sont nuls et le problème est donc équivalent à :

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{2}{n+2}.a_n$,

ou encore à : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_{2.n} = 0$, et : $a_{2.n+1} = (-1)^n.\frac{2^{2.n}.n!}{(2.n+1)!}$,

et enfin à : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{2^{2.n}.n!}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}$.

Le rayon de convergence de cette dernière série entière étant infini, S est définie sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Cauchy garantit que S et f coïncident sur $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{2^{2.n}.n!}{(2.n+1)!}..x^{2.n+1}$.

c. Par unicité du développement d'une fonction en série entière sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{(-1)^n}{n!}.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2.k+1}.\binom{n}{k} = (-1)^n.\frac{2^{2.n}.n!}{(2.n+1)!}$,

et donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2.k+1}.\binom{n}{k} = \frac{2^{2.n}.n!^2}{(2.n+1)!} = \frac{4^n}{(2.n+1).\left(\frac{(2.n)!}{n!.n!}\right)} = \frac{4^n}{(2.n+1).\binom{2.n}{n}}$.

Propriétés de sommes de séries entières.

48. a. Si : $|x| < R$, alors le produit de Cauchy de $f(x)$ par elle-même s'écrit :

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n\right)$, avec : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{p+q=n} u_p.u_q = u_{n+1}$.

Donc : $(f(x))^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}.x^n\right)$, et : $x.(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}.x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.x^n = f(x) - u_0 = f(x) - 1$.

Donc $f(x)$ est racine de ($x.t^2 - t + 1$).

Or le discriminant de ce trinôme vaut : $\Delta = 1 - 4.x$, et comme $f(x)$ est réel, on a donc :

$\Delta \geq 0$, soit : $x \leq \frac{1}{4}$.

On en déduit que : $R \leq \frac{1}{4}$, et on n'a évidemment pas démontré que R est non nul.

b. Le trinôme précédent, pour : $x \le \dfrac{1}{4}$, a deux racines qui sont : $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4.x}}{2.x}$.

La seule de ces deux expressions qui a une limite finie en 0 est : $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4.x}}{2.x}$,

car : $\sqrt{1-4.x} = 1 - 2.x + o_0(x)$.

On prolonge en 0 la fonction g ainsi définie en posant : $g(0) = 1$.

c. On peut alors utiliser les développement en série entière connus et :

$$\forall\ x \in \left]-\frac{1}{4},+\frac{1}{4}\right[,\ \sqrt{1-4.x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)...\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right).\frac{(-4.x)^n}{n!} = 1 - 2.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2.n-2)!}{(n-1)!.n!}.x^n,$$

d'où : $\forall\ x \in \left]-\frac{1}{4},+\frac{1}{4}\right[$, avec : $x \neq 0$, on déduit que :

$$g(x) = \frac{1}{2.x}.\left(1 - 1 + 2.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2.n-2)!}{(n-1)!.n!}.x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2.n-2)!}{(n-1)!.n!}.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{(n+1)!.n!}.x^n,$$

et l'égalité est encore vérifiée pour : $x = 0$.

Notons maintenant, on note : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{(2.n)!}{(n+1)!.n!}$.

La quantité $g(x)$ vérifie : $x.(g(x))^2 = g(x) - 1$.

Or $x.(g(x))^2$ se développe en série entière sur $\left]-\frac{1}{4},+\frac{1}{4}\right[$ par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes et :

$$\forall\ x \in \left]-\frac{1}{4},+\frac{1}{4}\right[,\ x.(g(x))^2 = x.\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} v_p.v_q\right).x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} v_p.v_q\right).x^{n+1},$$

et comme cette série est encore égale à : $g(x) - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.x^n - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}.x^{n+1}$,

on en déduit par unicité du développement en série entière que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sum_{p+q=n} v_p.v_q$.

d. Comme de plus : $v_0 = 1$, les suites (u_n) et (v_n) vérifient les mêmes relations.

Il est alors immédiat par récurrence forte que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$, d'où : $u_n = \dfrac{(2.n)!}{(n+1)!.n!}$.

Enfin, avec la formule de Stirling : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(2.n)^{2.n}.e^{-2.n}.\sqrt{2.\pi.2.n}}{(n+1)^{n+1}.e^{-n-1}.\sqrt{2.\pi.(n+1)}.n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi}.n^{\frac{3}{2}}}$,

et comme : $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e.n}$, on conclut que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi}.n^{\frac{3}{2}}}$.

49. a. Le rayon de convergence de la série entière s'obtient classiquement avec la règle de d'Alembert (les coefficients sont non nuls à partir de : $n = 2$) et : $R = 1$.

Par ailleurs, il y a divergence grossière en ± 1 et l'ensemble de définition de f est]-1,+1[.

Puis : $\forall\ x \in$ [0,1[, $(1-x).f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n).x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n).x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n).x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n-1).x^n$,

et : $\forall\ x \in$ [0,1[, $(1-x).f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n).x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n-1).x^n = -\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right).x^n = -\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right).x^n$.

b. On peut alors écrire :

$$\forall\ x \in [0,1[,\ h(x) = f(x) + \ln(1-x) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right).x^n - x.$$

On pose alors : $\forall\ n \geq 2,\ a_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$,

et : $\forall\ n \geq 2,\ a_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} = -\frac{1}{2.n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

h est donc une série entière de rayon de convergence 1 et la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} a_n.x^n$ converge normalement sur [0,1] car : $\forall\ n \geq 2,\ \forall\ x \in$ [0,1], $\left|a_n.x^n\right| \leq \left|a_n\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2.n^2}$.

Comme tous les monômes constituant h sont des fonctions continues sur [0,1], h est donc continue sur [0,1].

Comme de plus : $\forall\ x \in$]0,1[, $\frac{f(x)}{-\ln(1-x)} = 1-\frac{h(x)}{\ln(1-x)}$,

on en déduit que : $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) \in \mathbb{R}$, puis : $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{-\ln(1-x)} = 1+0 = 1$,

et enfin : $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

Utilisation de développements en série entière.

50. Notons : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(3.n+1)^2.x^n$.

Cette série entière a un rayon de convergence égal à 1, obtenu avec la règle de d'Alembert.

Puis : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(9.n^2+6.n+1).x^n = 9.\sum_{n=0}^{+\infty} n.(n-1).x^n + 15.\sum_{n=0}^{+\infty} n.x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,

puisque les trois séries convergent.

On écrit ensuite : $S(x) = 9.x^2.\sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).x^{n-2} + 15.x.\sum_{n=1}^{+\infty} n.x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 9.x^2.\frac{2}{(1-x)^3} + 15.x.\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$,

à l'aide de dérivées.

Enfin : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $S(x) = \frac{18.x^2+15.x.(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{4.x^2+13.x+1}{(1-x)^3}$.

On résout alors : $4.x^2+13.x+1 = 0$, soit : $x = \frac{-13\pm\sqrt{153}}{8}$, mais :

$\frac{-13-\sqrt{153}}{8} < -1$, et : $-1 < \frac{-13+12}{8} = -\frac{1}{8} \leq \frac{-13+\sqrt{153}}{8} \leq \frac{-13+13}{8} = 0$.

Conclusion : l'équation initiale admet une unique solution qui est $\frac{-13+\sqrt{153}}{8}$.

51. On commence par écrire : $\forall\ x \in$]0,1], $S(x) = \frac{1}{x^x} = e^{-x.\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.(x.\ln(x))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

La fonction S ainsi que toutes les fonctions u_n sont définies, continues sur]0,1], et prolongeables par continuité en 0, avec : $S(0) = 1$, $u_0(0) = 1$, et : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$*, $u_n(0) = 0$.

L'intégrale proposée est alors convergente puisque S est continue sur]0,1] et prolongeable en 0.
On va considérer dans la suite que toutes les fonctions font référence à ces prolongements et l'égalité au-dessus est alors valable sur le segment [0,1].
Par ailleurs, la fonction $u\ :\ x \mapsto x.\ln(x)$, (prolongée en 0 à la valeur 0) est continue sur [0,1], dérivable sur]0,1], de dérivée : $\forall\ x \in$]0,1], $u'(x) = \ln(x)+1$.

On en déduit que : $\forall\ x \in$ [0,1], $\left|u(x)\right| \leq \left|u\left(e^{-1}\right)\right| = \frac{1}{e}$, et : $\forall\ x \in$ [0,1], $\left|u_n(x)\right| \leq \frac{1}{n!}.e^{-n}$,

et la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur [0,1].

Donc : $\int_0^1 \frac{1}{x^x}.dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.\int_0^1 (x.\ln(x))^n.dx$.

Enfin : $\forall\ n \geq 1$, $\int_0^1 (x.\ln(x))^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}.(\ln(x))^n\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}.\int_0^1 x^n.(\ln(x))^{n-1}.dx = -\frac{n}{n+1}.\int_0^1 x^n.(\ln(x))^{n-1}.dx$,

et par récurrence : $\forall\ n \geq 1$, $\int_0^1 (x.\ln(x))^n.dx = (-1)^n.\frac{n!}{(n+1)^n}.\int_0^1 x^n.dx = (-1)^n.\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$,

cette égalité étant encore valable pour : $n = 0$, comme le montre un calcul direct.

Donc : $\int_0^1 \frac{1}{x^x}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.(-1)^n.\frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Remarque : on aurait pu aussi utiliser le théorème de convergence dominée.

52. a. Soit x fixé dans]-1,1[.

La fonction $\varphi_x\ :\ t \mapsto \frac{\ln(1+x^2.\sin^2(t))}{\sin^2(t)}$, est définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ - {0} et a pour limite x^2 en 0.

On peut donc la prolonger en posant : $\varphi_x(0) = x^2$, et elle est alors continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

b. Pour : $x \in$]-1,+1[, on a : $\forall$ t $\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|x^2.\sin^2(t)\right| < 1$,

et on peut écrire : $\ln(1+x^2.\sin^2(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.(x^2.\sin^2(t))^n$,

puis : $\frac{\ln(1+x^2.\sin^2(t))}{\sin^2(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.x^{2.n}.\sin^{2.n-2}(t)$.

Soit donc : $\varphi_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.\sin^{2.n-2}(t).x^{2.n}$, égalité qui est encore vraie pour : $t = 0$.

On peut alors noter (toujours pour x fixé dans]-1,1[) : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\sin^{2.n-2}(t).x^{2.n}$.

On remarque alors que la série de fonctions (de t) $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement que $[0,\frac{\pi}{2}]$, car :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall$ t $\in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|u_n(t)\right| \leq \frac{x^{2.n}}{n} \leq (x^2)^n$, et la série (numérique) $\sum_{n\geq 1}(x^2)^n$ converge.

Donc on peut écrire : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x^2.\sin^2(t))}{\sin^2(t)}.dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.x^{2.n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2.n-2}(t).dt$.

On utilise alors les intégrales de Wallis pour écrire : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2.n-2}(t).dt = \frac{(2.n-2)!}{2^{2.n-2}.(n-1)!^2}.\frac{\pi}{2}$, et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x^2.\sin^2(t))}{\sin^2(t)}.dt = \pi.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.x^{2.n}.\frac{(2.n-2)!}{2^{2.n-1}.(n-1)!^2} = \pi.\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{(2.n-2)!}{2^{2.n-1}.n!.(n-1)!}.x^{2.n}.$$

Enfin : $\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)...\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right).\frac{x^{2.n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{(2.n-2)!}{2^{2.n-1}.(n-1)!.n!}.x^{2.n}$,

et donc on a bien : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x^2.\sin^2(t))}{\sin^2(t)}.dt = \pi.(\sqrt{1+x^2}-1)$.

53. a. On va montrer par récurrence forte que : $\forall\ n \geq 2$, $\frac{n}{2} \leq u_n \leq n^2$.

On calcule : $u_2 = u_0 + 1 = 1$, et : $u_3 = u_1 + 2 = 2$, donc on a bien :

- $\frac{2}{2} \leq u_2 = 1 \leq 2^2$, et :
- $\frac{3}{2} \leq u_3 = 2 \leq 3^2$.

Supposons la double inégalité vérifiée jusqu'à : $n \geq 3$.
Alors : $u_{n+1} = u_{n-1} + n$, et :

- $u_{n+1} \geq \frac{n-1}{2} + n = \frac{n+1}{2} + n - 1 \geq \frac{n+1}{2}$, et :
- $u_{n+1} \leq (n-1)^2 + n = n^2 - n + 1 \leq (n+1)^2$.

Comme le rayon de convergence des deux séries entières encadrantes vaut 1, celui de S vaut aussi 1.
De plus, la minoration qu'on a établie montre qu'il y a divergence grossière en ± 1.
L'intervalle de définition de S est donc]-1,+1[.

b. Si on multiplie les égalités définissant (u_n) pas x^{n+2}, pour : $x \in$]-1,+1[, et si on les somme pour n variant de 0 à +∞, on obtient :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}.x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).x^{n+2}$,

puisque toutes les séries convergent et :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n.x^n = x^2.\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.x^n + x^2.\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).x^n$,

soit, puisque : $u_0 = u_1 = 0$, la relation : $S(x) = x^2.S(x) + x^2.\frac{1}{(1-x)^2}$,

et donc enfin : $S(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2.(1-x^2)}$.

c. On décompose alors en éléments simples : $\frac{x^2}{(1-x)^2.(1-x^2)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{(1-x)^3} + \frac{d}{1+x}$,

et on détermine les quatre constantes en recomposant la fraction ce qui donne :

$a = \frac{1}{8}, b = -\frac{3}{4}, c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{8}$.

On développe ensuite en série à l'aide de la série géométrique et de ses dérivées :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $\frac{x^2}{(1-x)^2.(1-x^2)} = \frac{1}{8}.\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{3}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).x^n + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2).(n+1).x^n + \frac{1}{8}.\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.x^n$,

et par unicité du développement de S en série entière :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{8} - \frac{3}{4}.(n+1) + \frac{1}{4}.(n+2).(n+1) + \frac{1}{8}.(-1)^n = \frac{2.n^2 - 1 + (-1)^n}{8}$.

54. a. C'est quasiment la définition de a_n, car si n représente des euros, le nombre de couples solutions correspond au nombre de façons de décomposer ces n euros en n_1 fois 1 euro plus n_2 fois 2.

b. Pour n fixé, n_1 et n_2 sont des entiers entre 0 et n, donc le nombre de triplets solutions est majoré par $n+1$, puisque chaque valeur de n_1 correspondant à un couple solution ne génère qu'une seule possibilité pour n_2.
Comme de plus le couple $(n,0)$ fournit une solution, on a donc : $1 \leq a_n \leq n+1$, et le rayon de convergence de S vaut 1 car les deux séries encadrantes ont même rayon de convergence égal à 1.
De plus, S diverge grossièrement en ± 1 avec la minoration précédente, donc S est définie sur]-1,+1[.

c. Si on considère le produit des deux séries absolument convergentes :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2.n}\right)$, on obtient une série entière : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n.x^n$.

Notons alors : $\forall\ x\in$]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n.x^n$, et : $\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2.n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n.x^n$,

autrement dit :

- $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=1$,
- $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\beta_n=1$, si n est pair, et : $\beta_n=0$, n est impair.

Alors : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.\beta_{n-k}=\sum_{p+q=n}\alpha_p.\beta_q$.

De plus, le produit $\alpha_p.\beta_q$ est non nul (et dans ce cas vaut 1) si et seulement si α_p et β_q sont tous deux non nuls, autrement dit si q est pair avec : $p+q=1$.

Autrement dit u_n compte le nombre de couples solutions de l'équation : $n=n_1+2.n_2$, et : $u_n=a_n$.

Finalement : $\forall\ x\in$]-1,+1[, $S(x)=f(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2.n}\right)$.

d. On a donc : $\forall\ x\in$]-1,+1[, $S(x)=\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}.\frac{1}{1+x}$.

La décomposition théorique de S est : $S(x)=\frac{a'}{1-x}+\frac{a''}{(1-x)^2}+\frac{b}{1+x}$,

et en recomposant la fraction par exemple, on obtient : $a'=b=\frac{1}{4}$, $a''=\frac{1}{2}$.

Il suffit alors d'écrire : $\forall\ x\in$]-1,+1[, $S(x)=\frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+\frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1).x^n+\frac{1}{4}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.x^n$.

Par unicité du développement en série entière, on en déduit finalement que :

$\forall$ n $\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{1}{4}+\frac{n+1}{2}+\frac{(-1)^n}{4}=\frac{2.n+3+(-1)^n}{4}$.

Calcul de sommes de séries entières.

55. a. Pour cette première série entière, on remarque que : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2.n}\le\frac{2^{(-1)^n}}{n}\le\frac{2}{n}$.

Comme le rayon de convergence des séries encadrantes vaut 1, celle aussi le rayon de la série étudiée.
Puis pour x dans]-1,+1[, et en revenant à des sommes partielles :

$\forall\ N\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2.N}\frac{2^{(-1)^k}}{k}.x^k=\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{2.k}.x^{2.k}+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2.(2.k+1)}.x^{2.k+1}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.(x^2)^k+\frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(2.k+1)}.x^{2.k+1}$,

et en rajoutant les termes d'indices pairs dans la deuxième somme :

$\sum_{k=1}^{2.N}\frac{2^{(-1)^k}}{k}.x^k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.(x^2)^k+\frac{1}{2}.\sum_{p=1}^{2.N}\frac{1}{p}.x^p-\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2.k}.x^{2.k}=\frac{3}{4}.\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.(x^2)^k+\frac{1}{2}.\sum_{p=1}^{2.N}\frac{1}{p}.x^p$.

Si maintenant, on fait tendre N vers +∞, on obtient, en notant S la série entière :

$\forall\ |x|<1$, $S(x)=\frac{3}{4}.\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}.(x^2)^k+\frac{1}{2}.\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}.x^p=-\frac{3}{4}.\ln(1-x^2)-\frac{1}{2}.\ln(1-x)=-\frac{3}{4}.\ln(1+x)-\frac{5}{4}.\ln(1-x)$.

b. La règle de d'Alembert donne immédiatement le rayon de convergence de cette deuxième série entière qui est +∞.
Puis :

- $\forall\ x\in\mathbb{R}^+$, on peut poser : $x=u^2$, et : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{x^n}{(2.n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{u^{2.n}}{(2.n)!}=\cos(u)=\cos(\sqrt{x})$,
- $\forall\ x\in\mathbb{R}^-$, on peut poser : $x=-u^2$, et : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{x^n}{(2.n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2.n}}{(2.n)!}=ch(u)=ch(\sqrt{-x})$.

c. Pour cette série, la règle de d'Alembert donne encore le rayon de convergence qui vaut 1.

Puis : $\forall\ n \geq 2$, $\dfrac{1}{n^2+n-2} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{n+2}$, et :

$\forall\ x \in]-1,+1[$, $x \neq 0$, $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{4.n+1}{n^2+n-2}.x^n = \dfrac{1}{3}.\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n-1} - \dfrac{1}{3}.\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2} = \dfrac{x}{3}.\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{x^2}.\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n+2}$,

et : $S(x) = -\dfrac{x}{3}.\ln(1-x) - \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{x^2}.\sum_{n=4}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\dfrac{x}{3}.\ln(1-x) - \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{x^2}.\left(-\ln(1-x) - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right)$.

d. Puisque : $\forall\ n \geq 1$, $\dfrac{1}{n} \leq n^{(-1)^n} \leq n$,

et comme les deux séries encadrantes correspondent à des séries entières de rayon de convergence égal à 1, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière proposée vaut : $R = 1$.
De plus, il y a divergence grossière en ± 1 puisque la suite des termes d'indices pairs tend vers $+\infty$ en valeur absolue.

Puis : $\forall\ |x| < 1$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n}.x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} (2.k)^{(-1)^{2.k}}.x^{2.k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (2.k+1)^{(-1)^{2.k+1}}.x^{2.k+1}$,

et : $\forall\ |x| < 1$, $S(x) = 2.x^2.\sum_{k=1}^{+\infty} k.(x^2)^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2.k+1}}{2.k+1}$

Enfin :

- $\forall\ |u| < 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k.u^{k-1} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{1-u}\right) = \dfrac{1}{(1-u)^2}$, et :
- $\forall\ |u| < 1$, $\dfrac{d}{du}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^{2.k+1}}{2.k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u^{2.k} = \dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-u} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1+u}$,

d'où : $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^{2.k+1}}{2.k+1} = 0 + \dfrac{1}{2}.\ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right)$,

et donc : $\forall\ |x| < 1$, $S(x) = 2.x^2.\dfrac{1}{(1-x^2)^2} + \dfrac{1}{2}.\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

56. On va montrer que : $R_b = \max(1, R_a)$.

Tout d'abord : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|b_n| = \dfrac{|a_n|}{1+|a_n|} \leq \dfrac{1+|a_n|}{1+|a_n|} = 1$,

donc R_b est supérieur au rayon de convergence de la série géométrique, soit : $R_b \geq 1$.

D'autre part : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|b_n| = \dfrac{|a_n|}{1+|a_n|} \leq |a_n|$,

donc : $R_a \leq R_b$.

- Si maintenant : $R_b > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 0} b_n.x^n$ converge en 1 puisque 1 est dans l'intervalle ouvert de convergence, et en particulier, la suite (b_n) tend vers 0.

Donc : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_0$, $|b_n| \leq \dfrac{1}{2}$.

Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|b_n|.(1+|a_n|) = |a_n|$, donc : $|a_n| = \dfrac{|b_n|}{1-|b_n|}$,

et puisque la suite (b_n) tend vers 0, la suite (a_n) aussi, et on en déduit que : $b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.

Dans ce cas : $R_a = R_b$, ce qui entraîne : $R_a > 1$, et on a bien : $R_b = R_a = \max(1, R_a)$.

- Si par ailleurs : $R_b = 1$, alors avec ce qu'on a montré au dessus : $R_a \leq R_b = 1$,

et à nouveau : $R_b = 1 = \max(1, R_a)$.

57. a. Pour : $x \in [0,1]$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{n^2}.(x^n + (1-x)^n)\right| \le \frac{1}{n^2}.(|x|^n + |1-x|^n) \le \frac{2}{n^2}$,

et $f(x)$ existe, comme somme d'une série convergente.

On vient même de montrer que la série de fonctions qui définit f converge normalement sur [0,1], et la continuité de toutes les fonctions constituant cette série entraîne la continuité de f sur [0,1].

Pour : $x > 1$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + (1-x)^n = x^n.\left(1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^n\right)$.

Or : $\left|\frac{1-x}{x}\right| = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} < 1$,

d'où on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x}\right)^n = 0$, et : $\left|\frac{1}{n^2}.(x^n + (1-x)^n)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{n^2}$,

ce qui entraîne la divergence grossière de la série dans ce cas.

De même, pour : $x < 0$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + (1-x)^n = (1-x)^n.\left(1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^n\right)$,

et : $\left|\frac{x}{1-x}\right| = \frac{-x}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x} < 1$, d'où : $\left|\frac{1}{n^2}.(x^n + (1-x)^n)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|1-x|^n}{n^2}$,

ce qui entraîne encore la divergence grossière de la série.

Finalement, f est définie et continue sur le segment [0,1].

b. Notons : $\forall\ x \in [-1,+1]$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Alors S est définie sur [-1,+1], continue sur [-1,+1] (par convergence normale) et dérivable sur]-1,+1[comme série entière.

De plus : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

Par ailleurs pour : $x \in [0,1]$, on a : $1-x \in [0,1]$, et on peut écrire : $f(x) = S(x) + S(1-x)$.

Par opérations, f est donc dérivable sur]0,1[, et : $\forall\ x \in]0,1[$, $f'(x) = S'(x) - S'(1-x)$.

c. Puisque de plus : $\forall\ x \in]-1,+1[$, et : $x \neq 0$, on a : $S'(x) = \frac{1}{x}.\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$,

on en déduit que : $\forall\ x \in]0,1[$, $f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x}$.

En primitivant, on a donc : $\forall\ x \in]0,1[$, $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{x}\left(-\frac{\ln(1-\mathbf{t})}{t} + \frac{\ln(t)}{1-t}\right).dt$.

De plus : $\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\ln(1-t)}{t}.dt = [\ln(1-t).\ln(t)]_{\frac{1}{2}}^{x} + \int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{\ln(t)}{1-t}.dt$,

donc : $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1-x).\ln(x) - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = C - \ln(1-x).\ln(x)$, avec : $C \in \mathbb{R}$.

Enfin, f étant continue sur [0,1] : $f(0) = \lim\limits_{x\to0} f(x) = C - \lim\limits_{x\to0}(\ln(1-x).\ln(x))$.

Puis : $\ln(1-x).\ln(x) \underset{0}{\sim} x.\ln(x)$, et donc : $f(0) = C - 0 = C = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On en conclut que : $\forall\ x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) - \ln(1-x).\ln(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x).\ln(x)$.

Autour des fonctions sinus et cosinus et de l'exponentielle complexe.

58. a. La règle de d'Alembert appliquée à ces deux séries donne immédiatement un rayon de convergence égal à $+\infty$.

On constate ensuite que : ∀ t ∈ ℝ, $C(t)+i.S(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.t)^n}{n!}$.

Donc par produit de Cauchy (puisque les deux séries sont absolument convergentes) :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ |C(t)+i.S(t)|^2=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.t)^n}{n!}\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i.t)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.t^n,$$

avec : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{k!}.\frac{(-i)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{i^n}{n!}.\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.\binom{n}{k}=\frac{i^n}{n!}.(1-1)^n$, et donc :

- si : $n=0$, $a_0=1$,
- si : $n\neq 0$, $a_n=0$.

On en déduit que : ∀ t ∈ ℝ, $|C(t)+i.S(t)|=1$.

b. Comme séries entières de rayon de convergence infini, C et S sont évidemment de classe C^∞ sur ℝ.
De plus :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ C'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n.t^{2.n-1}}{(2.n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}.t^{2.n+1}}{(2.n+1)!}=-S(t),\ \text{et : } S'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n.t^{2.n}}{(2.n)!}=C(t).$$

c. Immédiatement : $C(0)=1$, et : $S(0)=0$.

d. Puisque C est continue sur ℝ et de valeur 1 en 0, C reste positive sur un voisinage de 0.

De plus $C(2)$ est la somme d'une série alternée, et : $C(2)=1-\frac{4}{2!}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.4^n}{(2.n)!}=-1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.4^n}{(2.n)!}$.

Or la série qui apparaît est alternée et vérifie le critère spécial puisque :

$$\forall\ n\geq 2,\ \left|\frac{4^{n+1}}{(2.n+2)!}.\frac{(2.n)!}{4^n}\right|=\frac{4}{(2.n+2).(2.n+1)}\leq\frac{4}{30}\leq 1.$$

Donc sa somme est positive (signe du premier terme) et : $0\leq\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n.4^n}{(2.n)!}\leq\frac{4^2}{4!}=\frac{16}{24}$.

On en déduit que : $C(2)\leq -1+\frac{16}{24}=-\frac{1}{3}<0$.

Il existe donc des réels strictement positifs vérifiant : $C(x)<0$, et : $Z=\{x>0,\ C(x)<0\}$, est non vide.

Il admet donc une borne inférieure α telle que : $\alpha\geq 0$.

e. On sait qu'il existe : $x_0>0$, tel que la fonction C reste positive sur $[0,x_0[$.

Donc : $Z=\{x>0,\ C(x)<0\}\subset[x_0,+\infty)$, et : $0<x_0<\alpha$.

Puisque α est une borne inférieure, on sait que : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ \exists\ x_n\in Z,\ \alpha\leq x_n<\alpha+\frac{1}{n}$.

La suite (x_n) tend alors vers α et : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ C(x_n)<0$.

En faisant tendre n vers +∞ et avec la continuité de C, on en déduit que : $C(\alpha)\leq 0$.

Mais si de plus on suppose que : $C(\alpha)<0$, alors par continuité, C resterait strictement négative sur un intervalle autour de α, on pourrait donc trouver : $0<x'<\alpha$, avec : $C(x')<0$, et α ne serait pas la borne inférieure de Z.

Donc : $C(\alpha)=0$.

Enfin C restant positive sur $[0,\alpha]$, S' est positive sur cet intervalle et S y est croissante.

Comme de plus : $|C(\alpha)+i.S(\alpha)|=1$, on en déduit que : $|S(\alpha)|=1$.

Finalement : $S(0)\leq S(\alpha)$, entraîne : $S(\alpha)=1$.

f. Comme produit de Cauchy, on a : $(C(\alpha)+i.S(\alpha))^2=i^2=-1=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.\alpha)^n}{n!}\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.\alpha)^n}{n!}\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2.i.\alpha)^n}{n!}\right)$,

du fait des propriétés de la fonction $\exp$, ou en le redémontrant.

Pour cela, on pose : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.\alpha)^n}{n!}\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.\alpha)^n}{n!}\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)$, et :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(i.\alpha)^k}{k!}.\frac{(i.\alpha)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(i.\alpha)^n}{n!}.\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!.(n-k)!} = \frac{(i.\alpha)^n}{n!}.2^n = \frac{(i.2.\alpha)^n}{n!}$.

Donc : $C(2.\alpha) + i.S(2.\alpha) = -1$, d'où : $C(2.\alpha) = -1$, et : $S(2.\alpha) = 0$.

Toujours avec un produit de Cauchy, on a :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $C(t+2.\alpha) + i.S(t+2.\alpha) = (C(2.\alpha) + i.S(2.\alpha)).(C(t) + i.S(t)) = -(C(t) + i.S(t))$,

donc : $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $C(t+2.\alpha) = -C(t)$, et : $S(t+2.\alpha) = -S(t)$,

puis : $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $C(t+4.\alpha) = -C(t+2.\alpha) = +C(t)$,

avec le même résultat pour S, et C et S sont $4.\alpha-$périodiques.

De plus, C est paire et S est impaire, donc :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $S(2.\alpha - t) = -S(t-2.\alpha) = -S(t+2.\alpha) = S(t)$.

De proche en proche, on en déduit que :

- C est strictement positive sur $[0,\alpha[$, donc S est strictement croissante sur $[0,\alpha]$, de 0 à 1 puis elle décroît strictement sur $[\alpha,2.\alpha]$ de 1 à 0.
- C est donc strictement décroissante sur $[0,2.\alpha]$ de 1 à -1,
- on en déduit les variations de C et de S sur $[-2.\alpha,0]$, puis sur $[2.\alpha,4.\alpha]$ par $4.\alpha-$périodicité.

g. Soit enfin z un complexe de module 1 : $z = a + i.b$, avec : $a^2 + b^2 = 1$.

Puisque : $a \in$ [-1,+1], il existe un unique θ dans $[\alpha,2.\alpha]$ tel que : $a = C(\theta)$,

et la seule autre valeur dans $[2.\alpha,4.\alpha]$ qui vérifie cette égalité est $4.\alpha - \theta$.

En effet, on a bien :

- $C(4.\alpha - \theta) = C(-\theta) = C(\theta)$,
- θ' dans $[2.\alpha,4.\alpha]$ a cette propriété, alors : $C(4.\alpha - \theta') = C(-\theta') = C(\theta') = C(\theta)$,

d'où par unicité de θ : $4.\alpha - \theta' = \theta$, et : $\theta' = 4.\alpha - \theta$.

Ensuite, b et $S(\theta)$ vérifient tous deux : $b^2 = S(\theta)^2 = 1 - a^2$, donc : $b = \pm S(\theta)$.

Or : $S(2.\pi - \theta) = -S(\theta)$.

Donc il existe bien une unique valeur θ_0 entre 0 et $4.\alpha$ (la valeur θ précédente ou $4.\alpha - \theta$), qui vérifie à la fois : $a = C(\theta_0)$, et : $b = S(\theta_0)$, soit finalement : $z = C(\theta_0) + i.S(\theta_0)$.

Développements en série entière.

59. a. En posant : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, $f(x) = e^{a.\arcsin(x)}$, la fonction f est définie, de classe C^2 sur]-1,+1|, et :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $f'(x) = a.\frac{e^{a.\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$, puis : $f''(x) = a^2.\frac{e^{a.\arcsin(x)}}{(1-x^2)} + .a.x\frac{e^{a.\arcsin(x)}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, c'est-à-dire :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $(1-x^2).f''(x) = a^2.f(x) + x.f'(x)$,

et f est solution sur]-1,+1[de l'équation différentielle : $(1-x^2).y'' - x.y' - a^2.y = 0$.

On cherche alors les séries entières solutions de cette équation différentielle en posant :

$\forall\ x \in]-R,+R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.x^n$, (avec R supposé a priori non nul),

qui est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$, ses dérivées s'obtenant en dérivant terme à terme, et S est solution de (E) sur $]-R,+R[$, si et seulement si :

$\forall\ x \in]-R,+R[,\ (1-x^2).\sum_{n=2}^{+\infty} u_n.n.(n-1).x^{n-2} - x.\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.n..x^{n-1} - a^2.\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.n..x^n = 0$.

Après développement et translation d'indice, c'est équivalent à :

$\forall\ x \in]-R,+R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2).(n+1).u_{n+2} - (n^2 + 2.n + a^2).u_n].x^n = 0$.

Une série entière est nulle sur un intervalle autour de 0 si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, ce qui permet d'écrire que c'est encore équivalent à :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{(n^2 + 2.n + a^2)}{(n+2).(n+1)}.u_n$.

Cette relation de récurrence détermine entièrement S en fonction de ses deux premiers coefficients.
La règle de d'Alembert montre alors que la série entière donnée par les termes de rangs pairs a un rayon de convergence égal à :

- $R_p = 1$, si : $u_0 \neq 0$,
- $R_p = +\infty$, si : $u_0 = 0$.

De même, pour la série entière donnée par les termes de rangs impairs :

- $R_i = 1$, si : $u_1 \neq 0$,
- $R_i = +\infty$, si : $u_1 = 0$.

Donc une telle série entière est converge toujours sur]-1,+1[.
Enfin, le théorème de Cauchy sur les équations différentielles linéaires du second ordre (voir chapitre correspondant) montre qu'il existe une unique solution sur]-1,+1[vérifiant de plus :

- $y(0) = 1$,
- $y'(0) = a$.

Or f est dans ce cas, ainsi que la série entière correspondant à : $u_0 = 1$, $u_1 = a$.
Conclusion : par unicité, f coïncide avec cette série entière particulière sur]-1,+1[.

Remarque : si on prend pour a la valeur 1, on obtient :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{(n+1)}{(n+2)}.u_n$, et :

$\forall\ x \in$]-1,+1[, $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2.p)!}{2^{2.p}.(p!)^2}.x^{2.p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2.p}.(p!)^2}{(2.p+1)!}.x^{2.p+1}$.

b. On pose ici : $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x.\sin^2(t)).dt$, et il est nécessaire que : $x \geq -1$, pour que la fonction sous l'intégrale soit au moins définie sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On travaille donc avec : $x \in$]-1,+1[(intervalle ouvert).

Puis : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\forall$ t $\in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\ln(1 + x.\sin^2(t)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.\frac{(x.\sin^2(t))^n}{n}$.

Pour x fixé, si on note alors u_n les fonctions (de la variable t) qui apparaissent dans la série, on constate que cette série de fonctions converge normalement sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, car :

$\forall$ t $\in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|u_n(t)| \leq |x|^n = \alpha_n$,

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \alpha_n$ converge.

Donc on peut intervertir somme et intégrale et : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}.x^{2.n}}{n}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2.n}(t).dt$,

et avec les formules de Wallis : $f(x) = \dfrac{\pi}{2}.\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\frac{(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}.x^{2.n}$.

60. a. Toutes les dérivées de f étant positives sur l'intervalle $]-a,+a[$, elles y sont croissantes.

b. Soit donc : $x \in \mathbb{R}$, tel que : $|x| < r < a$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n sur $[0, x]$ (ou $[x,0]$), s'écrit :

$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}.f^{(n+1)}(t).dt$, et avec le changement de variable : $t = x.u$, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \int_0^1 \frac{(x-x.u)^n}{n!}.f^{(n+1)}(x.u).x.du = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-u)^n.f^{(n+1)}(x.u).du$$

c. On en déduit que : $\forall\ 0 < r < a$, si : $|x| < r$, alors on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n!}.\left| \int_0^1 (1-u)^n.f^{(n+1)}(x.u).du \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-u)^n.f^{(n+1)}(r.u).du,$$

puisque $f^{(n+1)}$ est positive et croissante, et qu'on a : $|x| < r$.

Or on a aussi : $f(r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.r^k + \frac{r^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-u)^n.f^{(n+1)}(r.u).du$, donc :

$$\int_0^1 (1-u)^n.f^{(n+1)}(r.u).du = \frac{n!}{r^{n+1}}.\left[f(r) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.r^k \right] \le \frac{n!}{r^{n+1}}.f(r),$$

puisque tous les termes de la somme sont positifs.

Finalement : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k \right| \le \frac{x^{n+1}}{n!}.\frac{n!}{r^{n+1}} f(r) = \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}.f(r)$

d. Il est clair alors que pour x fixé dans $]-a,+a[$, on peut trouver r tel que : $|x| < r$.

Il suffit alors de faire tendre n vers +∞ dans l'inégalité précédente pour constater que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k \right| = 0, \text{ et donc : } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k.$$

La fonction f est bien développable en série entière en 0 sur $]-a,+a[$.

e. Ce résultat est presque immédiat par récurrence puisque :

- il est vrai pour : $n = 0$, avec : $P_0 = X$,
- si on le suppose vrai pour un entier n donné, alors :
  $\tan^{(n+1)} = (1 + \tan^2).P_n'(\tan)$,

qui fournit : $P_{n+1} = (1 + X^2).P_n'$, soit un polynôme de parité égale à celle de l'entier $n+2$ et à coefficients positifs.

f. On constate alors que toutes les dérivées d'ordres impairs de la tangente s'annulent en 0 et que $\tan$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Comme les coefficients des polynômes P_n sont positifs, les dérivées de $\tan$ sont positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

L'étude précédente montre alors que $\tan$ est développable en série entière sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, et que :

$$\forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}.x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2.n+1)}(0)}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1}.$$

g. Enfin, la fonction $\tan$ étant impaire, on peut écrire aussi :

$$\forall\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right],\ \tan(x) = -\tan(-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2.n+1)}(0)}{(2.n+1)!}.(-x)^{2.n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2.n+1)}(0)}{(2.n+1)!}.x^{2.n+1},$$

ce qui prouve finalement que $\tan$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

61. a. Soit x fixé dans ℝ.

Si x est nul, la série converge (c'est la série nulle) et si x est non nul, alors : $sh(a^n.x) \underset{+\infty}{\sim} a^n.x$, qui est le terme général d'une série géométrique absolument convergente.

Notons ensuite : $\forall\ n \in$ ℕ, $\forall\ x \in$ ℝ, $u_n(x) = sh(a^n.x)$.

Les fonctions u_n sont toutes de classe C^∞ sur ℝ, et :

- $\forall\ A \in$ ℝ$^+$, $\forall\ p \in$ ℕ, $\forall\ x \in [-A,+A]$, $|u_n^{(2.p)}(x)| = a^{n.2.p}.|sh(a^n.x)| \le sh(a^n.A) = \alpha_n \underset{+\infty}{\sim} a^n.A$,

et la série $\sum_{n\ge0} u_n^{(2.p)}$ converge normalement sur $[-A,+A]$,

- de même : $\forall\ A \in$ ℝ$^+$, $\forall\ p \in$ ℕ, $\forall\ x \in [-A,+A]$,

$$\left|u_n^{(2.p+1)}(x)\right| = a^{n.(2.p+1)}.\left|ch(a^n.x)\right| \leq a^{n.2.p}.a^n.ch(a^n.A) \leq a^n.ch(A) = \alpha_n,$$

et la série $\sum_{n\geq 0} u_n^{(2.p+1)}$ converge également normalement sur $[-A,+A]$.

Donc f est de classe C$^\infty$ sur ℝ, et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme.

En particulier : $\forall\ p \in$ ℕ, $f^{(2.p)}(0) = 0$, et : $f^{(2.p+1)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a^{2.p+1})^n = \dfrac{a}{1-a^{2.p+1}}$.

b. Pour : $x \in$ ℝ$^{+}$*, et : $p \geq 1$, l'égalité de Taylor avec reste intégral sur $[0,x]$ à l'ordre $2.p$ donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(2.k+1)}(0)}{(2.k+1)!}.x^{2.k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2.p-1}}{(2.p-1)!}.f^{(2.p)}(t).dt.$$

Or : ∀ t ∈ $[0,x]$, $0 \leq f^{(2.p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a^{2.p})^n.sh(a^n.t) \leq sh(x).\sum_{n=0}^{+\infty}(a^{2.p})^n = sh(x).\dfrac{1}{1-a^{2.p}}$.

Donc : $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2.p-1}}{(2.p-1)!}.f^{(2.p)}(t).dt \leq \frac{sh(x)}{1-a^{2.p}}.\int_0^x \frac{(x-t)^{2.p-1}}{(2.p-1)!}.dt \leq \frac{sh(x)}{1-a^{2.p}}.\frac{x^{2.p}}{(2.p-1)!}$.

Il est alors clair que, lorsque p tend vers +∞, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2.p-1}}{(2.p-1)!}.f^{(2.p)}(t).dt$ tend vers 0.

Donc f coïncide avec sa série de Taylor en 0, pour tout réel x positif.

c. f étant impaire, l'égalité valable sur ℝ$^+$ reste valable sur ℝ$^-$.

Donc f est développable en série entière sur ℝ et :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a}{1-a^{2.n+1}}.\frac{x^{2.n+1}}{(2.n+1)!}.$$

62. a. Pour x dans]-1,+1[, toutes les fonctions constituant la série sont définies en x, et :

$$\frac{1}{n.(n+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

ce qui garantit la convergence de la série, et la fonction S est définie au moins sur]-1,+1[.

b. Comme : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\forall\ n \geq 1$, on a : $\left|\dfrac{x}{n}\right| < 1$,

on en déduit : $\dfrac{1}{n.(n+x)} = \dfrac{1}{n^2}.\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-1} = \dfrac{1}{n^2}.\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k.\left(\frac{.x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k.x^k}{n^{k+2}}$.

On en déduit que : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k.x^k}{n^{k+2}}\right)$.

c. Pour : $x \in$]-1,+1[, et : $N \in$ ℕ*, $S_N(x)$ est la somme de N séries convergentes qu'on peut ainsi réécrire en :

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k.x^k}{1^{k+2}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k.x^k}{2^{k+2}} + \ldots + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k.x^k}{N^{k+2}},$$

et regrouper en : $S_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k.x^k}{1^{k+2}} + \frac{(-1)^k.x^k}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{(-1)^k.x^k}{N^{k+2}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^k.x^k}{n^{k+2}}\right)$.

d. On fixe x dans]-1,+1[.

Alors : $\forall\ k \in$ ℕ, $\left|(-1)^k x^k.\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}}\right| = |x|^k.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}} \leq |x|^k.\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \zeta(2).|x|^k$,

où ζ est la fonction de Riemann.

La série de terme général : $a_k = (-1)^k x^k.\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}}$, est donc absolument convergente, par comparaison à une série géométrique convergente.

Or cette série n'est autre que la série qui définit $\sigma(x)$ donc $\sigma(x)$ existe pour tout : $x \in$]-1,+1[.

Puis pour : $k \geq 0$, et par décroissance sur ℝ⁺* de la fonction : $t \mapsto \frac{1}{t^{k+2}}$, on a la majoration classique :

$$\forall\ N \geq 2,\ 0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^{k+2}},$$

et comme : $\int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^{k+2}} = \left[\frac{t^{-k-1}}{-k-1}\right]_N^{+\infty} = \frac{1}{(k+1).N^{k+1}}$,

on en déduit que : $\forall\ N \geq 2,\ 0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}} \leq \frac{1}{(k+1).N^{k+1}}$.

On peut alors écrire, en regroupant deux séries convergentes :

$$\forall\ N \geq 2,\ \sigma(x) - S_N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left((-1)^k.x^k.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}}\right) - \sum_{k=0}^{+\infty}\left((-1)^k.x^k.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{k+2}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left((-1)^k.x^k.\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}}\right),$$

et : $\forall\ N \geq 2,\ |\sigma(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k.x^k.\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}}\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}}\right).|x|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^k}{(k+1).N^{k+1}}$.

e. Toujours pour x fixé dans]-1,+1[, on pose : $\forall\ k \geq 0$, $\forall\ t \in$ [2,+∞), $u_k(t) = \frac{|x|^k}{(k+1).t^{k+1}}$.

Alors :

- la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge normalement sur [2,+∞), car : $\forall\ k \geq 0$, $|u_k(h)| = |x|^k = \alpha_k$,
- chaque fonction u_k a une limite finie nulle en +∞,
- la série de ces limites converge.

Donc on peut intervertir limite et somme et :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^k}{(k+1).N^{k+1}} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(N) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}u_k(N) = 0.$$

On en conclut que : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \sigma(x)$.

f. On se souvient également que pour : $x \in$]-1,+1[, la suite $(S_N(x))$ est la suite des sommes partielles de la série $S(x)$, donc : $\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = S(x)$.

Par unicité d'une limite, on en déduit que :

$$\forall\ x \in\ ]-1,+1[,\ S(x) = \sigma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k.x^k.\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+2}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k.\zeta(k+2).x^k.$$

On vient bien de démontrer que S est développable en série entière sur]-1,+1[.