T.D. 7 – Intégration sur un intervalle quelconque

1. Justifier l'existence des intégrales suivantes et établir les résultats fournis :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t = n! \quad (n \in \mathbb{N}) \ ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+ixy)} = \frac{\pi}{1+|y|} \quad (y \in \mathbb{R})$$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = 4(\ln 2 - 1) \ ; \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que la fonction $t \mapsto \sqrt{P(t)} - t^2 - t - 1$ soit intégrable sur $[a, +\infty[$ pour un certain réel positif a.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, justifier l'existence de

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{(3+t^2)^n}.$$

Calculer I_1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
Étudier la nature de la suite (I_n) et celle de la série $\sum I_n$.

4. Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continue et telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ soit convergente. Montrer que, pour a et b réels strictement positifs,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

On pourra établir, pour $0 < \varepsilon < X$,

$$\int_\varepsilon^X \frac{f(at)-f(bt)}{t}\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_{aX}^{bX} \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

5. Montrer que : $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \sim \frac{e^{-n}}{n}$. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t}\mathrm{d}t \sim \frac{1}{n}$.

6. *Une autre expression de la constante d'Euler*

a) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,n] \quad 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k \ ;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,n] \quad 0 \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

b) On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 \left[1 - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{et} \quad J_n = \int_1^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} J_n = \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t}\mathrm{d}t.$$

c) Montrer que

$$I_n - J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

d) En déduire

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\mathrm{d}t = \gamma \textit{ (la constante d'Euler !)}.$$

7. f étant une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(t)}{1+n^2t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}f(0).$$

8. À l'aide du développement en série de $\dfrac{1}{1-x^2}$, calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

9. Montrer que $S:t\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Prouver l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}S(t)\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

10. Montrer que $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\left(1+x\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
Calculer sa dérivée et en déduire la valeur de $F(x)$.

11. Montrer que la fonction $f:x\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2/2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera. En déduire la valeur de $f(x)$.

12. © *Intégrale de Dirichlet* : on pose, pour $x\in\mathbb{R}^+$,

$$f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

a) Justifier la définition et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ *(pour la continuité en* 0*, on pourra faire apparaître* $f(x)$ *comme somme d'une série alternée).*

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser f' sur cet intervalle.

c) En déduire la valeur de $f(x)$, pour tout $x\geq 0$.

d) En déduire enfin :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

13. *Transformation de Laplace* : pour tout α réel, on note E_α le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, continues sur $\mathbb{R}^+$ et telles que $t\mapsto f(t)\,e^{-\alpha t}$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F_\alpha=\displaystyle\bigcap_{\beta>\alpha}E_\beta$.

a) Montrer que, si $\alpha<\delta$, alors $E_\alpha\subset E_\delta$. En déduire que $E_\alpha\subset F_\alpha$.
Prouver que, si $f\in F_\alpha$ et si $p>\alpha$, alors $e^{-pt}f(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

b) Montrer que, à toute fonction f de F_α, on peut associer la fonction $L(f)$ définie sur $]\alpha,+\infty[$ par

$$L(f)(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\,e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

c) On note $u:t\mapsto t$ et, pour $\gamma\in\mathbb{C}$, $e_\gamma:t\mapsto e^{\gamma t}$; préciser pour u, u^n $(n\in\mathbb{N})$, e_γ les réels α pour lesquels cette fonction est élément de E_α ; déterminer $L(u)$ et $L(e_\gamma)$.

d) Soit $f\in F_\alpha$; montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u^nf:t\mapsto t^nf(t)$ appartient à F_α.
En déduire que $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha,+\infty[$, avec : $\forall r\in\mathbb{N}\quad D^r(L(f))=(-1)^rL(u^rf)$.

e) Pour $r\in\mathbb{N}$, déterminer $L(e_\gamma u^r)$.

f) Soit $f\in F_\alpha$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et dont la dérivée f' appartient à F_α ; montrer que

$$\forall p>\alpha\quad L(f')(p)=pL(f)(p)-f(0).$$