Espaces vectoriels normés.

Exercices 2017-2018

Niveau 1.

Normes générales.

1. Soit (E, $\|.\|$) un **K**-espace vectoriel normé, et soient x et y des éléments de E.

   Montrer que : $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$.

2. Soient (E, $\|.\|$) un espace vectoriel normé, x et y des vecteurs de E non nuls et : $a \in [0,1[$.

   Montrer que si : $\dfrac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq a$, alors : $\dfrac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \dfrac{a}{1-a}$.

3. Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels, $\|.\|$ une norme sur F, et : $u \in \mathscr{L}$(E,F).

   Pour : $x \in$ E, on note : $N(x) = \|u(x)\|$.

   Montrer que N est une norme sur E si et seulement si u est injective.

4. Soient $a_1,\ldots,a_n$ des réels et N définie de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbb{R}$ par :

   $\forall\ x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{K}^n,\ N(x) = a_1.|x_1| + \ldots + a_n.|x_n|$.

   Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que N soit une norme sur $\mathbf{K}^n$.

5. Soit : E = $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

   Montrer que l'application N définie par : $\forall\ f \in$ E, $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|.dt$, est une norme sur E.

6. Soit : $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, telle que : $Sp(A) \subset]0,+\infty)$.

   Montrer que l'application N définie par : $\forall\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $N(X) = \sqrt{{}^tX.A.X}$, est une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Suites et comparaisons de normes.

7. On définit (f_n) dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

   - $\forall\ x \in \left[0,\dfrac{1}{n}\right]$, $f_n(x) = n - n^2.x$, et :
   - $\forall\ x \in \left[\dfrac{1}{n},1\right]$, $f_n(x) = 0$.

   a. Justifier que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, puis calculer $N_1(f_n)$, $N_2(f_n)$ et $N_\infty(f_n)$.

   b. Trouver des constantes α, α' et α'' strictement positives telles que : $\forall\ f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$,
   - $N_1(f) \leq \alpha.N_\infty(f)$,
   - $N_2(f) \leq \alpha'.N_\infty(f)$,
   - $N_1(f) \leq \alpha''.N_2(f)$.

   c. Montrer avec la question a qu'il n'est pas possible de trouver β, β', β'' strictement positives telles que : $\beta.N_\infty(f) \leq N_1(f)$, $\beta'.N_\infty(f) \leq N_2(f)$, ou : $\beta''.N_2(f) \leq N_1(f)$.

8. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des suites réelles bornées (u_n), telles que : $u_0 = 0$.

   Pour : $u \in$ E, on pose : $N_\infty(u) = \sup_{n\geq 0}|u_n|$, et : $N(u) = \sup_{n\geq 0}|u_{n+1} - u_n|$.

   a. Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.

   b. Montrer que : $N \leq 2.N_\infty$.

   c. Peut-on trouver une inégalité du même type mais en inversant les rôles de N_∞ et de N ?

On pourra pour cela envisager une famille de séries dont la somme est constante égale à 1.

9. Soit : E = { $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, $f(0)=0$ }, et pour : $f \in$ E, on note :
   - $N(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$, et :
   - $N'(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)|$.

   a. Justifier que N et N' sont des normes sur E.
   b. Montrer que : $N \le N'$.
   c. A l'aide de fonctions simples, montrer qu'une inégalité dans l'autre sens n'est pas possible.

10. Dans **K**[X], on note :
    - $\forall\ P \in$ **K**[X}, $P\neq 0$, $N_\infty(P)=\max\limits_{0\le k\le \deg(P)}|a_k|$, $N(P)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}|a_k|.2^{-k}$, et :
    - $N(0)=N_\infty(0)=0$.

    a. Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur **K**[X].
    b. Montrer qu'on peut trouver : $\alpha>0$, telle que : $N\le \alpha.N_\infty$.
    c. Trouver une suite simple qui converge vers 0 pour N et pas pour N_∞ et en déduire qu'on ne peut pas trouver : $\beta>0$, tel que : $\beta.N_\infty \le N$.

11. Soit E un espace vectoriel normé par $\|\ .\ \|$ de dimension finie.

    Pour : $u \in \mathscr{L}$(E), tel que : $\forall\ x\in$ E, $\|u(x)\|\le\|x\|$, pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{1}{n+1}.\sum\limits_{k=0}^{n}u^k$.

    a. Simplifier $v_n o(u-id_E)$.
    b. Montrer que : $\ker(u-id_E)\oplus \mathrm{Im}(u-id_E)=E$.
    c. En déduire que : $\forall\ x \in$ E, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x)=p(x)$,

    où p est la projection de E sur $\ker(u-id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-id_E)$.
    d. A-t-on : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = p$?

    On pourra utiliser une base de E, la norme infinie attachée à cette base et une norme dans $\mathscr{L}$(E) déduite de cette norme infinie.

Suites et normes dans $\mathscr{M}_n$(K).

12. On définit la suite (X_n) d'éléments de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par :
    - $X_0=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, et :
    - $\forall\ n\ge 0$, $X_{n+1}=A.X_n$, où : $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

    Montrer que (X_n) converge.

13. On note : E = $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour : $n\ge 1$, et pour : $A \in$ E, on note : $N(A)=n.\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|$.

    a. Calculer $N\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
    b. Montrer que N est une norme dans le cas général.
    c. Montrer que : $\forall\ (A,B)\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(A.B)\le N(A).N(B)$.

d. Ce résultat est-il toujours vrai si on remplace N par N' définie par : $\forall\ A \in$ E, $N'(A) = \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|$?

14. Pour une matrice : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note : $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
    a. Que représente $\|A\|$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?
    b. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
    c. Montrer que : $\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, on a : $\|A.B\| \le \|A\|.\|B\|$.
    d. Montrer que si on note N_∞ la norme infinie dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors :
    $\forall\ (A,X) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\times\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $N_\infty(A.X) \le \|A\|.N_\infty(X)$.
    e. En déduire que : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall\ \lambda \in Sp(A)$, $|\lambda| \le \|A\|$.

15. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
    On suppose que la suite (M^n) converge vers une matrice A.
    a. Montrer que $(M^{2.n})$ converge aussi vers A.
    b. En déduire que : $A = A^2$.

16. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
    a. En utilisant une norme d'algèbre, montrer que si $((A.B)^p)$ tend vers 0, alors $((B.A)^p)$ tend aussi vers 0.
    b. Montrer que si A et B commutent, si (A^p) tend vers P, et (B^p) vers Q, alors P et Q commutent.
    c. Si (A_p) est une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A et si la suite (A_p^{-1}) converge vers B, alors A est inversible et : $A = B$.
    d. Est-il possible de trouver une suite (A_p) de matrices inversibles qui converge vers une matrice A et telle que la suite (A_p^{-1}) diverge ?

Topologie.

17. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ou fermés ?
    a. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
    b. $\bigcup\limits_{n\in N} \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
    c. $[0,1]\times[0,1]\times[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^3$.
    d. un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$.

18. On note : E = $\mathbb{R}^2$, et : $\forall\ (x,y) \in$ E^2, $\|(x,y)\| = |x| + \sqrt{x^2+y^2}$.
    a. Montrer que $\|\ .\ \|$ est bien une norme sur E.
    b. Représenter la boule de centre O et de rayon 1 pour cette norme.

19. Pour A et B deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, on note : $A+B = \{a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$.
    Montrer que $A+B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

20. a. Montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie, tout hyperplan est fermé.
    b. En déduire que les ensembles suivants sont fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
    - l'espace vectoriel des matrices de trace nulle,
    - les espaces vectoriels de matrices triangulaires supérieures ou triangulaires inférieures,
    - l'espace vectoriel des matrices diagonales,
    - les espaces vectoriels de matrices symétriques ou de matrices antisymétriques.

21. Soit : E = $C^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme N_∞.
    On note : $F = \{f \in$ E, $\forall\ x \in [0,1],\ f(x) \ge 0\}$, et : $\Omega = \{f \in$ E, $\forall\ x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$.

Montrer que F est fermé dans E et Ω est ouvert dans E.

22. Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et F une partie fermée non vide de E.
    a. Montrer que : $d(x,F) = \inf\{\|x-y\|, y \in F\}$, existe pour tout : $x \in$ E.
    b. Montrer que : $\forall\ x \in$ E, $(d(x,F) = 0) \Leftrightarrow (x \in F)$

23. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées (u_n).
    On note alors : $\forall\ u \in$ E, $u = (u_n)$, $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 0}|u_n|$.
    a. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E.
    b. Montrer que la suite constante égale à 1 notée **1** est intérieure à : $F = \{(u_n) \in$ E, $\forall\ n \geq 0,\ u_n \geq 0\}$.

Continuité, applications lipschitziennes.

24. Soit (E, $\|.\|$) un espace vectoriel normé, et : $x \in$ E, non nul.
    On note f l'application de E dans ℝ définie par :
    $\forall\ x \in$ E, $f(x) = \|x-a\|$, si : $\|x\| \leq \|a\|$, et : $f(x) = 0$, sinon.
    a. Montrer que f est continue en a.
    b. Montrer que f n'est pas continue en $-a$.

25. Soit f une application d'un intervalle I de ℝ dans ℝ, de classe C^1.
    a. Montrer que si : $\exists\ k \in$ ℝ, $\forall\ x \in$ I, $|f'(x)| \leq k$, alors f est k-lipschitzienne.
    b. Montrer que f définie sur $ℝ^+$ par : $\forall\ x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$,
    est k-lipschitzienne pour une certaine valeur k et trouver la plus petite valeur k possible.

26. Soit (E, $\|.\|$) un espace vectoriel normé, et soit : $x \in$ E.
    Montrer que l'application définie sur E par : $x \mapsto \|x\|.a$, est lipschitzienne.

__Niveau 2.__

Normes générales.

27. Soit : E = $C^0([0,1],ℝ)$.
    Montrer que l'application N définie par : $\forall\ f \in$ E, $N(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]}|x.f(x)|$, est une norme sur E.

28. Soit A une partie non vide de ℝ.
    Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que : $P \mapsto \|P\|_A = \sup\limits_{t\in A}|P(t)|$, définisse une norme sur ℝ[X] ?

29. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions continues de [0,1] dans ℝ.
    A quelle condition l'application N : $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \|x_1.f_1 + \ldots + x_n.f_n\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]}|x_1.f_1(t) + \ldots + x_n.f_n(t)|$,
    définit-elle une norme sur $ℝ^n$?

30. Soit : $A \in O(n)$.
    Montrer que : $\|A\|_1 \leq n.\sqrt{n}$, où : $\|A\|_1 = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|$.

Suites et comparaison de normes.

31. On note E l'ensemble des suites réelles bornées.
    a. Vérifier que E muni des lois habituelles constitue bien un ℝ-espace vectoriel.
    b. Vérifier que N_∞ définie sur E par : $\forall\ u = (u_n) \in$ E, $N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in N}|u_n|$, est une norme sur E.

c. Pour : $u \in$ E, on note par ailleurs : $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.e^{-n}$.

Montrer que N_1 définit une autre norme sur E.

d. Montrer qu'on peut trouver : $\alpha > 0$, tel que : $N_1 \leq \alpha.N_\infty$.

e. A l'aide d'une suite d'éléments de E, montrer qu'on ne peut pas trouver : $\beta > 0$, tel que : $\beta.N_\infty \leq N_1$.

32. Soit E l'ensemble des fonctions définies de [0,1] dans ℝ, lipschitziennes.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

b. Montrer que : $\sup\limits_{0\leq x<y\leq 1} \dfrac{|f(y)-f(x)|}{y-x}$ existe pour tout f dans E, nombre qu'on notera $K(f)$.

c. Montrer que N définie pour f dans E par : $N(f) = |f(0)| + K(f)$, est une norme sur E.

d. Montrer que toute suite d'éléments de E qui converge pour N converge pour N_∞.

e. Trouver une suite d'éléments de E qui montre que la réciproque est fausse.

33. Soit (P_n) une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à m et convergeant simplement vers une fonction f sur ℝ.

a. Justifier l'existence d'un polynôme : $P \in \mathbb{R}_m[X]$, tel que : $\forall\ 0 \leq k \leq m$, $P(k) = f(k)$.

On pourra utiliser les polynômes : $\forall\ 0 \leq k \leq m$, $L_k = \prod\limits_{i=0,\ i\neq k}^{N} \dfrac{(X-i)}{(k-i)}$.

b. Montrer que l'application N définie sur : E = $\mathbb{R}_m[X]$, par : $\forall\ Q \in$ E, $N(Q) = \max\limits_{0\leq k\leq n} |Q(k)|$,

définit une norme sur E.

c. Montrer que la suite (P_n) converge vers P pour cette norme N.

d. Soit $[a,b]$ un segment de ℝ.

On note : $\forall\ Q \in$ E, $N_{\infty,[a,b]}(Q) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |Q(t)|$.

Justifier que $N_{\infty,[a,b]}$ est encore une norme sur E.

e. En déduire que : $f = P$, et donc qu'une telle suite ne peut converger que vers un polynôme.

34. On note : E = ℝ[X].

Pour : $a \geq 0$, on définit : $\forall\ P \in$ E, $N(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|.dt$.

a. Montrer que N définit une norme sur E.

b. Etudier la convergence pour la norme N de la suite (P_n), avec : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$.

Norme matricielle (ou norme d'algèbre) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{L}$(E).

35. Pour : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2}$.

a. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que cette norme a la propriété de norme matricielle à savoir :

$\forall\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

36. Soient : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisable, P inversible et D diagonale telles que : $D = P^{-1}.A.P$.

a. Montrer que la suite (A^p) converge si et seulement si (D^p) converge.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $Sp(A)$ pour que (A^p) converge.

37. Soit : $A \in O(n)$, telle que : $1 \notin Sp(A)$.

a. Etudier la convergence de la suite définie par : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $U_p = \dfrac{1}{p+1}.(I_n + A + ... + A^p)$.

b. La suite (A^p) est-elle convergente ?
On pourra pour les deux questions utiliser la norme associée au produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

38. Soit (E,N) et (F,N') deux espaces vectoriels normés de dimension finie et soit : $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
a. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, et N_∞ la norme infinie attachée à la base $\mathcal{B}$.
Montrer que : $\exists\ K \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in E$, $N'(u(x)) \le K.N_\infty(x)$.
b. En déduire que $\{N'(u(x))$, $x \in E$, $N(x) \le 1\}$ est borné et qu'il admet une borne supérieure, notée $\|u\|$.
c. Montrer que $\|\,.\,\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ (on l'appelle norme subordonnée aux normes N et N').

Topologie.
39. Montrer que $O(n)$ est fermé et borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

40. Soit : $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\,.\,\|_1$.
Montrer que la fonction constante égale à 1, notée **1**, est adhérente à : $F = \{f \in E,\ f(0)=0\}$.

41. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$.
On définit :
- $E_- = \{f \in E,\ \forall\ x \le 0,\ f(x)=0\}$,
- $E_+ = \{f \in E,\ \forall\ x \ge 0,\ f(x)=0\}$,
- $C = \{c.\mathbf{1},\ c \in \mathbb{R}\}$, où **1** est la fonction constante égale à 1.

a. Montrer que : E_-, E_+, et C sont des sous-espaces vectoriels fermés de E.
b. Montrer que : $E = E_- \oplus E_+ \oplus C$.

42. Dans : $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, on note : $A = \{f \in E,\ f(0)=0,\ \int_0^1 f(t).dt \ge 1\}$.
a. Montrer que A est une partie fermée de (E,N_∞), et que : $\forall\ f \in A,\ N_\infty(f) > 1$.
b. Calculer : $\inf_{f\in A} N_\infty(f)$.

Continuité, applications lipschitziennes.
43. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f admet un minimum.

44. Soit : $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$.
On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\,.\,\|_1$, et on note f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$\forall\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f((x_1,x_2)) = (a.x_2, b.x_1)$.
Montrer que f est lipschitzienne.

45. On note : $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, et on le munit de la norme $\|\,.\,\|_1$.
On définit par ailleurs ϕ sur E par : $\forall\ f \in E$, $\phi(f) = \int_0^1 f(t).dt$.
Montrer que ϕ est linéaire et continue de $(E,\|\,.\,\|_1)$ dans $(\mathbb{R},|\,.\,|)$.

__**Niveau 3.**__
Normes.
46. Soit $(E,\|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé, et soient x et y des vecteurs de E non nuls.
Montrer que : $\left\|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|}\right\| \le \dfrac{2.\|x-y\|}{\max(\|x\|,\|y\|)}$.

Suites et comparaison de normes.

47. Soit : $n \geq 2$.
Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall\ P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $N(A) = N(P^{-1}.A.P)$?

48. On note : E = { $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ }.
Pour : $f \in$ E, on note : $N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $n(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|$, et : $N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

a. Montrer que n et N sont deux normes sur E.

b. En remarquant que f est une primitive de f', montrer que : $N_\infty(f) \leq N_\infty(f')$.

c. On note : $\forall\ f \in$ E, $\forall$ t $\in$ [0,1], $g(t) = e^t.f(t)$.
Montrer successivement que : $N_\infty(g') \leq e.n(f)$, $N_\infty(f') \leq N_\infty(g) + N_\infty(g')$, puis : $N(f) \leq 4.e.n(f)$.

d. En déduire que toute suite d'éléments de E qui converge pour n converge pour N, et réciproquement.

e. Est-ce encore le cas pour N et N_∞ ?

49. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$ et E^+ le sous-ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'en un nombre fini de valeurs.
Pour : $\varphi \in E^+$, on définit N_φ par : $\forall\ f \in$ E, $N_\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(t).|f(t)|.dt$.

a. Montrer que N_φ est une norme sur E.

b. Montrer que : $\forall\ (\varphi_1, \varphi_2) \in E^{+2}$, strictement positives, une suite d'éléments de E converge pour N_{φ_1} si et seulement si elle converge pour N_{φ_2}.

c. On pose : $\forall\ x \in$ [0,1], $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_1(x) = x^2$.
A l'aide d'une suite bien choisie, montrer que le résultat de la question b n'est plus vrai.

Norme matricielle (ou norme d'algèbre) dans $\mathscr{L}$(E), $\mathscr{M}_n$(K).

50. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable telle que A admet λ comme valeur propre d'ordre n.
On note N une matrice triangulaire supérieure stricte et P une matrice inversible telles que :
$P^{-1}.A.P = \lambda.I_n + N$.

a. Justifier l'existence de N, puis montrer que : $(|\lambda| < 1) \Rightarrow ((A^p)$ converge).

b. La réciproque est-elle vraie ?

51. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et N_∞ la norme infinie attachée à $\mathscr{B}$.
Pour : $u \in \mathscr{L}$(E), on définit : $\|u\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \left(\frac{N(u(x))}{N(x)} \right)$, où N est une norme sur E, autrement dit la norme de l'exercice 38 où l'on a choisi : E = F, et la même norme N dans E et dans F.

a. Montrer que : $\|u\| = \sup_{x\in E, N(x)=1} \left(N(u(x))\right) = \sup_{x\in E, N(x)\leq 1} \left(N(u(x))\right)$.

b. Montrer que la norme ainsi définie est une norme d'algèbre.

Topologie.

52. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
On note : $B'_1 = \{x \in$ E, $N_1(x) \leq 1\}$, et : $B'_2 = \{x \in$ E, $N_2(x) \leq 1\}$.

a. Montrer que : $(B'_1 = B'_2) \Leftrightarrow (N_1 = N_2)$.

b. Même question avec les boules ouvertes.

53. On note N l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N((x, y)) = \sup_{t\in R} \frac{|x + t.y|}{1 + t + t^2}$.

a. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b. Représenter graphiquement la boule : $B'(O,1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ N((x, y)) \leq 1\}$.

c. Quelle est l'aire (usuelle) de cette boule ?

54. Soit E le ℝ-espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme N_∞ habituelle.

a. Montrer que : $A = \{ f \in E, \forall\ x \in [0,1],\ f(x) \neq 0\}$, est un ouvert de E pour N_∞.

b. Montrer que l'ensemble des points adhérents à A pour N_∞ est constitué des fonctions continues sur [0,1], positives sur [0,1] ou négatives sur [0,1].

55. On note E l'espace vectoriel des fonctions bornées de [0,1] dans ℝ, et on le munit de la norme $\|\ .\ \|_\infty$.

On note : $A = \{ f \in E, \forall\ x \in [0,1],\ 2 + f(x) \leq e^{f(x)}\}$.

Montrer que A est une partie fermée et non bornée de E.

56. Montrer que l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ est une partie fermée de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

57. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E.

a. Montrer que : $F = \overline{F}$.

b. Montrer que si : $\dim(F) \neq \dim(E)$, alors : $\overset{o}{F} = \varnothing$.

58. Soit E un espace vectoriel normé et soit C un convexe de E.

Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{o}{C}$ sont des convexes de E.

Continuité, applications lipschitziennes.

59. Soit (E, $\|\ .\ \|$) un espace vectoriel normé et f l'application définie sur E par : $\forall\ x \in E,\ f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|^2}$.

a. Montrer que f est continue de E dans E pour la norme $\|\ .\ \|$.

b. Montrer que : $f(E) = B'\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

60. On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|\ .\ \|_\infty$ définie par :

$\forall\ x \in E,\ \|x\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 0} |x_n|$.

On définit l'opérateur de différence Δ sur E par : $\forall\ x \in E,\ \Delta(x) = y$, avec : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{n+1} - x_n$.

Montrer que Δ est linéaire et continu pour $\|\ .\ \|_\infty$.

61. Soit K une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^n$.

Soit f une application de K dans K telle que : $\forall\ (x,y) \in K^2,\ (x \neq y) \Rightarrow (\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|)$.

a. Montrer que f est continue, puis que f possède un unique point fixe c.

b. Soit (x_n) une suite déterminée par :

- $x_0 \in K$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrer que la suite (x_n) converge vers c.

62. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soient K_1, K_2 des parties fermées, bornées non vides de E.

a. Pour tout : $x_0 \in E$, montrer que l'application : $x \mapsto \|x - x_0\|$, est lipschitzienne.

b. Pour : $x \in E$, montrer que la quantité : $d(x, K_1) = \inf\limits_{x_1 \in K_1} \|x - x_1\|$, existe, puis que l'application :

$x \mapsto d(x, K_1)$, est lipschitzienne.

c. On note : $d(K_1, K_2) = \inf\limits_{x\in K_1, y \in K_2} \|x - y\|$.

Justifier l'existence de $d(K_1, K_2)$, puis montrer que : $\exists\ (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2,\ \|x_1 - x_2\| = d(K_1, K_2)$.