Chapitre 9 : Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Définitions et exemples

Definition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$.

1. *On dit que ϕ est bilinéaire lorsque elle est linéaire en chacune de ses variables :*
   — *$\forall x \in E,\ y \mapsto \phi(x,y)$ est linéaire*
   — *$\forall y \in E,\ x \mapsto \phi(x,y)$ est linéaire.*
2. *On dit que ϕ est symétrique lorsque*
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) = \phi(y,x)$$
3. *On dit que ϕ est positive lorsque*
$$\forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0.$$
4. *On dit que ϕ est définie lorsque*
$$\forall x \in E,\ \phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Definition 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive.
On notera souvent $< x, y >$, $(x|y)$ ou $x.y$ le produit scalaire entre x et y.

On appelle espace préhilbertien réel un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemples :

Sur $\mathbb{R}^n$: Le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ < x, y >= x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

Sur $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : Le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{C}$ est défini par
$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ < z, z' >= \mathrm{Re}(z.z')$$

Sur $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$: Un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ peut être défini par
$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R}),\ < f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Sur $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$: Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ peut être défini par
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}],\ < P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être défini par
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ < A, B >= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}b_{i,j} = \mathrm{tr}({}^tA.B).$$

Proposition 1

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x, x', y, y') \in E^4$. Soit $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4$.

1. $< \lambda x + \mu y, x' >= \lambda. < x, x' > +\mu. < y, x' >$
2. $< x, \lambda' x' + \mu' y' >= \lambda' < x, x' > +\mu' < x, y' >$
3. $< \lambda x + \mu y, \lambda' x' + \mu' y' >= \lambda.\lambda' < x, x' > +\lambda.\mu' < x, y' > +\mu.\lambda' < y, x' > +\mu.\mu' < y, y' >$

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Definition 3

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel.
On appelle norme associée au produit scalaire sur E l'application définie sur E par

$$\forall x \in E,\ N(x) = \sqrt{< x, x >}$$

On la note généralement $||.||$ et on a donc $\forall x \in E,\ < x, x >= ||x||^2$.

Exemple : Pour le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, la norme associée est

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Pour $n = 1$, on retrouve $||x|| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple : Pour le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{C}$, la norme associée est

$$||z|| = \sqrt{\mathrm{Re}(z^2)} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|$$

Proposition 2

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $||.||$ la norme associée. Soit $x \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $||\lambda.x|| = |\lambda|.||x||$

1.3 Identités remarquables

Proposition 3

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $||.||$ la norme associée. Soit $(x, y) \in E^2$.

1. $||x + y||^2 = ||x||^2 + 2 < x, y > +||y||^2$
2. $||x - y||^2 = ||x||^2 - 2 < x, y > +||y||^2$
3. $< x + y, x - y >= ||x||^2 - ||y||^2$.

Proposition 4

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $||.||$ la norme associée. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$
$$||x + y||^2 - ||x - y||^2 = 4 < x, y >$$

Remarque : La dernière formule permet de calculer un produit scalaire à partir des normes.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 5

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $||.||$ la norme associée. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$| < x, y > | \leq ||x||.||y||$$

On a égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Exemples : Sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien canonique, cette inégalité s'écrit

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ (xx' + yy')^2 \leq (x^2 + y^2).((x')^2 + (y')^2)$$

Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique, cette inégalité s'écrit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Sur $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ muni du produit usuel, cette inégalité s'écrit

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}),\ \left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right).\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)$$

Proposition 6

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $||.||$ la norme associée. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

On a égalité si, et seulement x et y sont liés et $< x, y >$ est positif.

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs et famille de vecteurs orthogonaux

Definition 4

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. On dit que deux vecteurs de E sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

$$x \perp y \Leftrightarrow < x, y >= 0.$$

Exemple : Le vecteur 0_E est orthogonal à tous les vecteurs de E. C'est même le seul.

Exemple : Dans $E = \mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel, les fonctions cos et sin sont orthogonales.

Definition 5

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale lorsque $\mathcal{F}$ est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < u_i, u_j >= 0.$$

Proposition 7

Toute famille orthogonale d'un espace préhilbertien réel, ne contenant pas le vecteur nul, est libre.

Proposition 8

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $||.||$ la norme associée. Soit $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale alors

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$$

2.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Definition 6

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle orthogonal de F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F

$$F^\perp = \{y \in E,\ \forall x \in F,\ < x, y >= 0\}$$

Exemple : $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Déterminer $F^\perp$.

Proposition 9

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $A \subset (A^\perp)^\perp$.
3. Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Remarque : En dimension finie, on a $A = (A^\perp)^\perp$.

Proposition 10

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

1. $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
2. $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$.

2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Definition 7

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont orthogonaux lorsque tous les vecteurs de F sont orthogonaux à tous les vecteurs de G

$$F \perp G \Leftrightarrow \forall x \in F,\ \forall y \in G,\ < x, y >= 0$$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, les sous-espaces $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ sont orthogonaux.

Proposition 11

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel. Soit $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_i, u_{i+1}, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale alors $\text{Vect}(u_1, ..., u_i)$ et $\text{Vect}(u_{i+1}, ..., u_n)$ sont orthogonaux.

Proposition 12

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel.
Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E alors $A \cap B = \{0\}$.

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

3.1 Bases orthonormées ou orthonormales (b.o.n)

Definition 8

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien.

On dit que $x \in E$ est un vecteur unitaire lorsque $||x|| = 1$.

On dit que $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ est une famille orthonormale (ou orthonormée) de vecteurs de E lorsque $\mathcal{F}$ est constituée de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, < u_i, u_j >= \delta_{i,j}.$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique est une base orthonormale.

Exemple : Dans $E = \mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel, la famille $(\frac{\cos}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}})$ est une famille orthonormée de E.

3.2 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 13

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de E.
Il existe $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ une base orthonormée de E telle que

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \ \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p) = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_p).$$

Méthode : On appelle cet outil de construction le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Il est à retenir.

1. On prend $f_1 = \frac{e_1}{||e_1||}$.
2. $e_2 \notin \mathrm{Vect}(f_1)$ donc on cherche f_2 sous la forme $f_2 = e_2 - \lambda f_1$.
   (a) La condition $< f_2, f_1 >= 0$ permet de déterminer λ.
   (b) Puis on prend $\frac{f_2}{||f_2||}$ pour garantir le caractère unitaire de la nouvelle base.
3. $e_3 \notin \mathrm{Vect}(f_3, f_2)$ donc on cherche f_3 sous la forme $f_3 = e_3 - \lambda f_1 - \mu f_2$.
   (a) Les conditions $\begin{cases} < f_3, f_1 >= 0 \\ < f_3, f_2 >= 0 \end{cases}$ permettent de déterminer λ et μ.
   (b) Puis on prend $\frac{f_3}{||f_3||}$ pour garantir le caractère unitaire de la nouvelle base.
4. ...
5. On fait ça n fois.

Remarque : On peut également appliquer cet algorithme à partir d'une famille libre.

Remarque : La nouvelle base obtenue dépend du produit scalaire mis sur E.

Exemple : Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base orthonormée à partir de cette base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 14

Tout espace euclidien admet des bases orthonormées.

3.3 Expressions dans une base orthonormée

Proposition 15

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Alors,

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ x &= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i \\ ||x||^2 &= \sum_{i=1}^{n} (< x, e_i >)^2 \\ \forall x, y \in E,\ < x, y > &= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< y, e_i > \end{aligned}$$

Remarque : Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

Pour $x \in E$, le vecteur coordonnée est donc $X = \begin{pmatrix} < x, e_1 > \\ < x, e_2 > \\ ... \\ < x, e_n > \end{pmatrix}$.

Pour $x, y \in E$, $, < x, y >= {}^tX.Y = {}^tY.X$ et $||x|| = \sqrt{{}^tX.X}$.

Proposition 16

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} < u(e_1), e_1 > & ... & < u(e_1), e_n > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < u(e_n), e_1 > & ... & < u(e_n), e_n > \end{pmatrix} = (< u(e_j), e_i >)_{1 \leq i,j \leq n}$$

4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Dans ce paragraphe, E est un espace préhilbertien réel et F est un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.

4.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 17

Soit E un espace préhilbertien réel et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors

$$E = V \oplus V^{\perp}$$

Definition 9

Soit E un espace préhilbertien réel et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
*On appelle **le supplémentaire orthogonal de** V le sous-espace vectoriel $V^\perp$.*

Proposition 18

Soit E un espace euclidien et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors

$$\dim(V^\perp) = \dim(E) - \dim(V)$$

Proposition 19

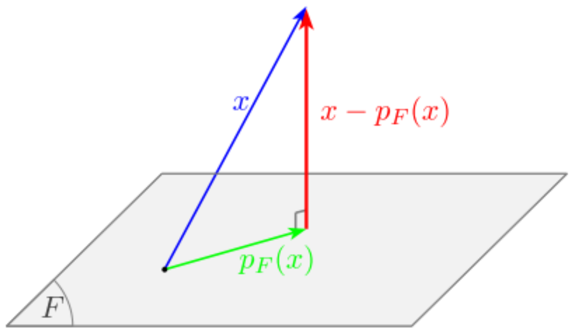
Soit E un espace euclidien et A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

1. $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
2. $(A\cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

4.2 Projection orthogonale

Definition 10

Soit E un espace préhilbertien réel et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
On appelle projection orthogonale sur V la projection sur V parallèlement à $V^\perp$ et on note p_V cette projection.
Pour $x \in E$, on appelle projeté orthogonal sur V le vecteur $p_V(x)$.



Proposition 20

Soit E un espace préhilbertien réel et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. $\forall x \in E,\ < p_V(x), x - p_V(x) >= 0$.
2. Pour $x \in E$, $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V tel que $x - p_V(x) \in F^\perp$.

Remarque : Il n'est pas toujours nécessaire de connaître $V^\perp$ pour déterminer le projeté orthogonal sur V.

Proposition 21

Soit E un espace préhilbertien réel et $V = \text{Vect}(f_1, ..., f_p)$ un sous-espace vectoriel de E.
Pour $x \in E$, $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V tel que

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ < x - p_V(x), f_i >= 0$$

Remarque : Pour déterminer le projeté orthogonal, on pourra être amené à résoudre un système linéaire.

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + y + z = 0\}$.
Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $p_V(x, y, z)$.

Proposition 22

Soit E un espace préhilbertien réel et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une **base orthonormée** de V. La projection orthogonale sur V est définie par

$$\forall x \in E,\ p_V(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$$

Remarque : D'où l'intérêt de Gram-Schmidt.

Exemple : Soit D une droite du plan $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur a.
Déterminer l'expression de la projection orthogonal p_D en fonction de a.

4.3 Projeté orthogonal et distance

Proposition 23

Soit E un espace préhilbertien réel et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

$$\forall x \in E,\ ||p_V(x)|| \leq ||x||$$

Proposition 24

Soit E un espace préhilbertien réel et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

$$\forall x \in E,\ \forall y \in V,\ ||x - p_V(x)|| \leq ||x - y||$$

Remarque : Le vecteur $p_V(x)$ est le vecteur de V le plus 'proche' de x au sens de la norme.

Definition 11

Soit E est un espace préhilbertien réel et V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $x \in E$.

On appelle distance de x à V la quantité définie par

$$d(x, V) = inf\{||x - y||, y \in V\} = \inf_{y \in V} ||x - y||$$

Proposition 25

Soit E est un espace préhilbertien réel et V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Pour $x \in E$, le vecteur $p_V(x)$ est l'unique vecteur de V tel que

$$\mathrm{d}(x,V) = ||x - p_V(x)||$$

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z=0\}$.
Déterminer la distance de $e_1 = (1,0,0)$ à V.

Proposition 26

Soit E est un espace préhilbertien réel et V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une **base orthonormée** de V.

$$\forall x \in E,\ \mathrm{d}(x,V)^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{p} < x, e_i >^2$$

5 Formes linéaires sur un espace euclidien

Remarque : Pour $a \in E$, la fonction $x \in E \mapsto < x, a >$ est une forme liénaire sur E.

5.1 Représentation à l'aide d'un produit scalaire

Proposition 27

Soit E est un espace euclidien. Soit ϕ une forme linéaire sur E.

$$\exists! a \in E,\ \forall x \in E,\ \phi(x) = < x, a >$$

Remarque : Pour $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E, on a $a = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i)e_i$.

5.2 Distance à un hyperplan, à une droite vectorielle

Rappel

Soit E un espace euclidien. Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a équivalence entre :

1. H est un hyperplan de E.
2. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 28

Soit E est un espace euclidien. Soit H un hyperplan de E.

$$\exists a \in E,\ \forall x \in H,\ < x, a >= 0.$$

On a, de plus, $H^\perp =$Vect(a).

Definition 12

Soit E est un espace euclidien. Soit H un hyperplan de E.
Soit $a \in E$ tel que $H^\perp =$Vect(a).

Un tel vecteur a est appelé vecteur normal à H.

Exemple : Soit H =Ker(tr) un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Proposer un vecteur normal à H.

Remarque : Les équations d'un hyperplan en base orthonormée fournissent des vecteurs normaux à cet hyperplan.

Proposition 29

Soit E est un espace euclidien. Soit H un hyperplan de E. Soit $a \in E$ tel que $H^\perp$ =Vect(a).

$$\forall x \in H,\ d(x,H) = \frac{|<x,a>|}{||a||}.$$

Exemple : Soit H =Ker(tr) un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à cet hyperplan.

Proposition 30

Soit E est un espace euclidien. Soit V =Vect(a) une droite vectorielle de E.

$$\forall x \in H,\ d(x,V) = \left|\left| x - \frac{<x,a>}{||a||^2} a \right|\right|.$$