Chapitre 17

Équations différentielles

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les notions de fonction dérivable, de dérivation composante par composante, de classe $\mathcal{C}^k$, définies pour les fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$ dans le chapitre **Fonctions vectorielles – Arcs paramétrés**, s'adaptent de façon évidente aux fonctions de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

I. Résultats théoriques sur les systèmes différentiels

Un système différentiel de n équations à n inconnues

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

peut se mettre sous la forme d'une seule équation, $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Une telle équation est appelée **équation différentielle linéaire**. La fonction inconnue X et le second membre B sont définis sur I et à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la fonction A est définie sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $n = 1$, on retrouve les équations linéaires scalaires d'ordre 1, $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. Pour $n \geqslant 2$, on identifie souvent le système différentiel et l'équation différentielle qui lui est associée.

Notation – Une équation différentielle du type précédent est souvent notée $X' = A(t)X + B(t)$. On ne note la variable t que pour les coefficients de l'équation, pas pour la fonction inconnue. Ce n'est qu'une notation, qui désigne l'équation que l'on cherche à résoudre.

Définition

Soient $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues.
Une **solution** sur I de l'équation différentielle linéaire

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{$\mathscr{L}$}$$

est une fonction $X : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable sur I telle que

$$\forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Remarques

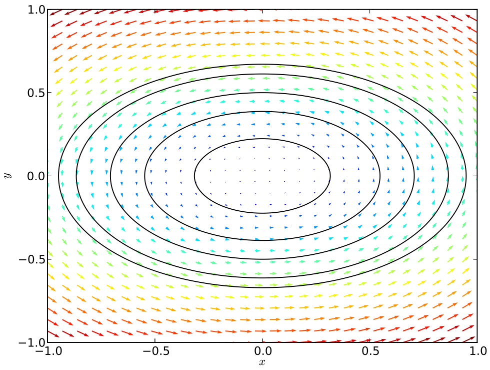
• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ est une solution sur I de $(\mathscr{L})$, l'arc paramétré $(I,(x_1,\dots,x_n))$ (qui est tracé dans $\mathbb{R}^n$) est une **courbe intégrale** de $(\mathscr{L})$. Son image est une trajectoire du système différentiel.

• Une solution sur I de $(\mathscr{L})$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$; en effet, pour tout $t \in I$, on a $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$. Or, l'application B est continue, ainsi que l'application $t \mapsto A(t)X(t)$, en raisonnant composante par composante et par opérations sur des fonctions continues. Par somme, X' est continue, donc X est de classe $\mathcal{C}^1$, sur I.

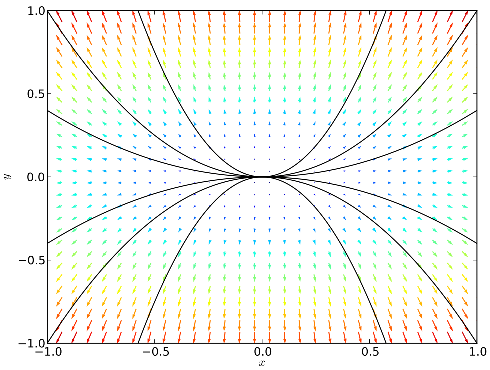
Exemple – Ci-dessous, dans trois cas différents, on considère un système différentiel d'ordre 1 de la forme

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

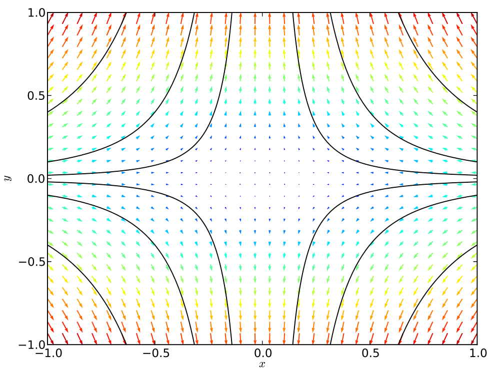
avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On a représenté (en partie) le champ de vecteurs associé, c'est-à-dire qu'en certains points (x_0,y_0) du plan, on représente le vecteur $(ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0) \in \mathbb{R}^2$ qui correspond au vecteur vitesse instantanée d'un point suivant une trajectoire du système et passant par (x_0,y_0). On a également représenté quelques trajectoires.



$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = x \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Théorème de Cauchy linéaire (admis : démonstration hors programme)

Soient $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues.
Alors l'équation différentielle linéaire

$$(\mathscr{L}) : \qquad X' = A(t)X + B(t)$$

possède des solutions sur I.
Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le **problème de Cauchy**

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) & \forall\, t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

Conséquence importante – Si $B = 0$ (on parle d'équation sans second membre), il est immédiat que la fonction nulle est solution sur I de l'équation différentielle $X' = A(t)X$. L'unicité du théorème précédent montre alors qu'aucune autre solution de cette équation ne peut s'annuler sur I.

Exemple – Soit $a \in \mathbb{K}$. L'unique solution sur I de l'équation différentielle $x' = ax$ qui prend la valeur $x_0 \in \mathbb{K}$ en $t_0 \in I$ est la fonction

$$x : t \mapsto x_0\, e^{a\,(t-t_0)}. \qquad \square$$

Bien sûr, en général, la résolution n'est pas aussi simple et se pose le problème de la recherche des solutions, ou de la solution du problème de Cauchy (que la démonstration du théorème ne donne pas explicitement).

Supposons que l'on dispose d'une solution particulière X_p de $(\mathscr{L})$. Soit $X : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction ; X est dérivable sur I si et seulement si $X - X_p$ est dérivable sur I et dans ce cas, X est solution sur I de $(\mathscr{L})$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \forall\, t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ \text{ce qui équivaut à} \quad & \forall\, t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + [X_p'(t) - A(t)X_p(t)] \\ \text{ce qui équivaut à} \quad & \forall\, t \in I,\ [X - X_p]'(t) = A(t)[X - X_p](t). \end{aligned}$$

Ainsi, X est solution sur I de $(\mathscr{L})$ si et seulement si $X - X_p$ est solution sur I de l'équation différentielle

$$Y' = A(t)\,Y. \qquad (\mathcal{H})$$

Définition

L'équation $(\mathcal{H})$ est dite équation **homogène** associée à $(\mathscr{L})$.

Propriété – Forme des solutions de $(\mathscr{L})$

On obtient toutes les solutions de $(\mathscr{L})$ sous la forme
« Solution particulière de $(\mathscr{L})$ + solution générale de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ »

Il est donc judicieux de s'intéresser à la fois à la recherche de solutions particulières de $(\mathscr{L})$, et à l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.

En ce qui concerne les solutions particulières, commençons par rappeler le principe de superposition, très utile pour simplifier leur recherche lorsque le second membre est somme de plusieurs termes :

Propriété

Soient $B_1,\ldots,B_k$ des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et soit $B = B_1+\cdots+B_k$. Soit, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, X_i une solution sur I de l'équation différentielle linéaire
$$X_i' = A(t)X_i + B_i.$$
Alors $X = X_1+\cdots+X_k$ est solution de l'équation différentielle linéaire $X' = A(t)X+B$ sur I.

Démonstration – La fonction X est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et B est continue sur I comme somme de fonctions continues. Pour tout $t\in I$, en sommant les relations $X_i'(t) = A(t)X_i(t)+B_i(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X_1(t)+\cdots+A(t)X_k(t)+B_1(t)+\cdots+B_k(t)\\ &= A(t)X(t)+B(t) \end{aligned}$$

par définition de B. D'où le résultat. □

Donnons maintenant la structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{H})$:

Théorème

- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Pour tout $t_0\in I$ fixé, l'application

$$\phi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

En particulier, $\mathcal{S}$ est de dimension finie égale à n.

Démonstration

• Nous avons remarqué plus haut que $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui est clairement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, $\mathcal{S}$ est non vide car la fonction nulle est solution de $(\mathcal{H})$. La stabilité de $\mathcal{S}$ par combinaison linéaire est un calcul immédiat.

• Soit $t_0\in I$; il est évident que ϕ_{t_0} est linéaire. De plus, le théorème d'existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy associé à $(\mathcal{H})$ et t_0 montre que ϕ_{t_0} est bijective. Donc ϕ_{t_0} est un isomorphisme. Les isomorphismes préservent la dimension, donc $\mathcal{S}$ est de dimension finie avec $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$. □

Exemple – Considérons le système différentiel sans second membre

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

d'équation différentielle linéaire associée

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

On vérifie facilement que

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix}$$

sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation. Elles sont linéairement indépendantes car les fonctions cos et sin ne sont pas proportionnelles. Ainsi, (X_1,X_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions ; on obtient donc toutes les solutions de l'équation sous la forme

$$t \mapsto \lambda X_1(t) + \mu X_2(t) = \begin{pmatrix} \lambda\cos(t) - \mu\sin(t) \\ \lambda\sin(t) + \mu\cos(t) \end{pmatrix}$$

où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.

II. Systèmes à coefficients constants sans second membre

Lorsque $A : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une fonction constante, on peut l'identifier à une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et on obtient ce que l'on appelle un système différentiel (ou équation différentielle) linéaire à coefficients constants $X' = AX$.

Le théorème de Cauchy, dans ce cas, assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Commençons par une remarque générale :

Propriété

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ une valeur propre de A.
Alors, pour tout $X_0 \in E_\lambda(A)$, la fonction

$$X : t \mapsto e^{\lambda t}\, X_0$$

est solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X' = AX$.

Démonstration – La fonction X est dérivable sur $\mathbb{R}$ (ses composantes sont des fonctions exponentielles). Pour tout $t \in I$,

$$X'(t) = \lambda\, e^{\lambda t}\, X_0 = e^{\lambda t}(\lambda X_0) = e^{\lambda t}\, AX_0 = A(e^{\lambda t} X_0) = AX(t). \qquad \square$$

L'étude du système différentiel $X' = AX$ est donc liée à la réduction de la matrice A.

▶ **Premier cas : A est diagonalisable**

Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, notées $\lambda_1, \ldots ,\lambda_n$, telles que $A = PDP^{-1}$. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction et $Y = P^{-1}X$; X est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X' = AX \quad &\Leftrightarrow \quad X' = PDP^{-1}X \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\phantom{\Leftrightarrow \quad X' = PDP^{-1}X \quad} \Leftrightarrow \quad (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \quad \Leftrightarrow \quad Y' = DY. \end{aligned}$$

Dans ce raisonnement, il est essentiel que P ne dépende pas de t. En notant $y_1, \ldots ,y_n$ les fonctions-coordonnées de Y, la dernière égalité équivaut à

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad y_i' = \lambda_i\, y_i,$$
$$\text{ce qui équivaut à :} \quad \forall\, i \in [\![1,n]\!],\, \exists\, k_i \in \mathbb{K}; \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_i(t) = k_i\, e^{\lambda_i t}.$$

On retrouve alors très simplement X par la relation $X = PY$. On remarquera que l'on a pas besoin d'expliciter P^{-1}, qui n'intervient que théoriquement.

On a donc démontré le résultat suivant :

Théorème – Résolution de $X' = AX$ avec A diagonalisable

Avec les notations précédentes, si A est diagonalisable, la solution générale du système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$t \mapsto P \begin{pmatrix} k_1\, e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n\, e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

où $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$.

Remarque – Le signe de la partie réelle des λ_i permet d'étudier le comportement asymptotique des solutions du système différentiel : pour qu'une solution X ait une limite en $+\infty$ par exemple, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $t \mapsto k_i\, e^{\lambda_i t}$ ait une limite dans $\mathbb{K}$ en $+\infty$. En particulier, si $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0$ pour tout i, alors

$$|e^{\lambda_i t}| = e^{\mathcal{R}e(\lambda_i)\, t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $X(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

▶ **Deuxième cas : A est réelle, diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$**

En appliquant la méthode précédente, on obtient les solutions complexes de l'équation. Pour en retrouver les solutions réelles, on cherche, parmi les solutions complexes, les solutions qui sont égales à leur conjuguée, ce qui donne des conditions sur les constantes k_i.

▶ **Troisième cas : A est trigonalisable**

Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $T = (t_{i,j})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, telles que $A = PTP^{-1}$. Avec le même changement de fonction inconnue $Y = P^{-1}X$, on se ramène au système $Y' = TY$, que l'on peut résoudre en commençant par la dernière équation $y_n' = \lambda_n y_n$, dont la solution générale sur $\mathbb{R}$ s'écrit $t \mapsto k_n\, e^{\lambda_n t}$, où $k_n \in \mathbb{K}$. L'avant-dernière équation est alors

$$y_{n-1}' = \lambda_{n-1}\, y_{n-1} + t_{n-1,n}\, y_n(t), \quad \textit{i.e.} \quad y_{n-1}' = \lambda_{n-1}\, y_{n-1} + t_{n-1,n}\, k_n\, e^{\lambda_n t}.$$

On est amené à résoudre une équation du type

$$y' - \lambda y = k\, e^{\alpha t},$$

et l'on poursuit la résolution « de bas en haut ».

Exemple – On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = x + y - 5z \\ z' = y + 5z \end{cases}$$

Il est associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique $(X-2)^2(X-3)$. On détermine facilement

$$E_2(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_3(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\dim(E_2(A)) \neq m(2)$, donc A n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ni dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$). Elle est en revanche trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$. Cherchons une matrice semblable à A de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour construire une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de u_A soit T, on choisit $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour le choix de e_2, il suffit que (e_1,e_2,e_3) soit libre et que :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R};\ (A - 2I_3)e_2 = \alpha e_1 \quad i.e. \quad (A - 2I_3)e_2 \in \mathrm{Vect}(e_1) = E_2(A) \quad i.e. \quad (A - 2I_3)^2 e_2 = 0.$$

On montre facilement que $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient, avec $(A - 2I_3)e_2 = e_1$. En posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En posant $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, le système original équivaut donc à

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 3y_3 \end{cases}$$

Les deux dernières équations équivalent à l'existence de $(k_2, k_3) \in \mathbb{K}^2$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = k_2\, e^{2t}$ et $y_3(t) = k_3\, e^{3t}$. La première équation s'écrit alors $y_1' = 2y_1 + k_2\, e^{2t}$; en posant

$$y : t \mapsto y_1(t)\, e^{-2t},$$

cette équation équivaut à : $y' = k_2$, donc à l'existence de $k_1 \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_1(t) = (k_2 t + k_1)\, e^{2t}.$$

Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont donc données par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (k_2 t + k_1)\, e^{2t} \\ k_2\, e^{2t} \\ k_3\, e^{3t} \end{pmatrix}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des scalaires quelconques.

III. Équations scalaires d'ordre 1

On s'intéresse au cas d'une équation de la forme

$$x' + a(t)x = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est bien sûr un cas particulier de la théorie précédente avec $n = 1$, mais on peut être plus explicite dans ce cas.

▶ Équation homogène

Fixons $t_0 \in I$ et considérons la fonction $x_0 : t \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$.

La fonction a est continue sur I donc x_0 est bien définie et dérivable sur I avec, pour tout $t \in I$,

$$x_0'(t) = -a(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) = -a(t)\,x_0(t),$$

donc x_0 est une solution sur I de l'équation $x' + a(t)x = 0$. De plus, x_0 ne s'annule pas sur I. Pour qu'une fonction x dérivable sur I soit solution de cette équation, il faut et il suffit que

$$x' + ax = 0, \quad i.e. \quad \frac{x'x_0 + axx_0}{x_0^2} = 0, \quad i.e. \quad \left(\frac{x}{x_0}\right)' = 0.$$

Ceci équivaut à l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{K}$ telle que $x = \gamma\,x_0$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc la droite vectorielle engendrée par x_0.

▶ Équation complète : la méthode de variation de la constante

On obtient toutes les solutions de $(\mathcal{H})$ sous la forme $\gamma\,x_0$ où $\gamma \in \mathbb{K}$. Pour résoudre l'équation complète $(\mathscr{L})$, l'idée est de faire « varier la constante » γ, c'est-à-dire de voir γ comme une fonction de I dans $\mathbb{K}$, et de chercher à quelle condition la fonction $\gamma\,x_0$ est solution de $(\mathscr{L})$.

Tout d'abord, toute fonction $x : I \to \mathbb{K}$ peut s'écrire sous la forme $\gamma\,x_0$, car x_0 ne s'annule pas sur I. De plus, sur I, x_0 étant dérivable, x est dérivable si et seulement si γ est dérivable.

Dans ce cas, on a $x' = \gamma' x_0 + \gamma x_0'$, et donc, pour que x soit solution de $(\mathscr{L})$ sur I, il faut et il suffit que

$$[\gamma'\,x_0 + \gamma\,x_0'] + a\,[\gamma\,x_0] = b, \quad i.e. \quad \gamma' x_0 + \gamma\,[x_0' + ax_0] = b.$$

Or x_0 est solution de $(\mathcal{H})$, donc $x_0' + ax_0 = 0$. Ainsi, x est solution de $(\mathscr{L})$ si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t)\,x_0(t) = b(t).$$

La méthode de variation de la constante se résume donc ainsi : les solutions de l'équation complète $x' + a(t)x = b(t)$ sur I sont exactement les fonctions $\gamma\,x_0$, où $\gamma : I \to \mathbb{K}$ est dérivable et vérifie $\gamma' x_0 = b$. Il sufit donc de déterminer une primitive γ de la fonction b/x_0 sur I.

Finalement, on obtient toutes les solutions de l'équation complète sous la forme

$$x : t \mapsto \left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{x_0(s)}\,ds + k\right) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right),$$

où $k \in \mathbb{K}$. Une condition initiale (problème de Cauchy) détermine entièrement k.

Remarque – La solution générale de $(\mathscr{L})$ se met donc sous la forme

$$\gamma\,x_0 + k\,x_0$$

où γ est une primitive de b/x_0 sur I, et $k \in \mathbb{K}$. Le premier terme correspond à une solution particulière de l'équation complète $(\mathscr{L})$, le second, à la solution générale de l'équation homogène.

On retrouve donc la structure de l'ensemble des solutions de $(\mathscr{L})$; la méthode de variation de la constante permet de trouver des solutions particulières non évidentes.

Exemple – Résolvons, sur $I = \mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle
$$x' = \frac{2}{t}\,x + \frac{1}{t}.$$
Pour résoudre l'équation homogène, on détermine une primitive sur I de la fonction continue $t \mapsto 2/t$, par exemple $t \mapsto 2\ln(t)$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc
$$x_0 : t \mapsto \gamma\, \exp\left(2\ln(t)\right) = \gamma\, t^2$$
où $\gamma \in \mathbb{K}$.

Pour résoudre l'équation complète, on peut remarquer que la fonction constante égale à $-1/2$ en est solution.

C'est une vérification qu'il faut penser à faire en général : si l'équation ordinaire
$$\forall\, t \in I, \quad a(t)x + b(t) = 0$$
possède une solution (indépendante de t), alors la fonction constante $y : t \mapsto x$ vérifie l'équation complète $(\mathscr{L})$ car dans ce cas on a $y'(t) = 0 = a(t)y(t) + b(t)$ pour tout $t \in I$.

Dans notre cas, la solution générale de l'équation complète s'écrit
$$x : t \mapsto -\frac{1}{2} + kt^2$$
où $k \in \mathbb{K}$.

Si l'on ne remarque pas qu'il existe une solution constante, on peut bien sûr appliquer la méthode variation de la constante : on obtient toutes les solutions de l'équation complète sous la forme $t \mapsto \gamma(t)\, t^2$ où $\gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable telle que
$$\forall\, t > 0,\ \gamma'(t)\, t^2 = \frac{1}{t}, \quad \text{ce qui équivaut à :} \quad \forall\, t > 0, \quad \gamma'(t) = \frac{1}{t^3},$$
et donc à l'existence d'une constante $k \in \mathbb{K}$ telle que pour tout $t > 0$, $\gamma(t) = -\dfrac{1}{2t^2} + k$, et l'on obtient la solution générale de l'équation complète sous la forme
$$x : t \mapsto \left(-\frac{1}{2t^2} + k\right) t^2 = -\frac{1}{2} + k\, t^2,$$
ce qui donne bien sûr le même résultat.

Remarque – Comme nous l'avons remarqué à l'occasion de la résolution des systèmes différentiels à coefficients constants $X' = AX$, on est souvent amené à résoudre des équations scalaires du premier ordre de la forme
$$y' - \lambda y = P(t)e^{\alpha t}$$
où $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{K}^2$ et P est une fonction polynomiale. La solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme $t \mapsto \gamma\, e^{\lambda t}$. La méthode de variation de la constante conduit à chercher les fonctions dérivables $\gamma : I \to \mathbb{K}$ telles que
$$\forall\, t \in I,\ \gamma'(t)e^{\lambda t} = P(t)e^{\alpha t},$$
ce qui équivaut à
$$\forall\, t \in I,\ \gamma'(t) = P(t)e^{(\alpha-\lambda)t}.$$
Si $\alpha = \lambda$, on peut choisir pour γ la primitive de P qui s'annule en 0 ; elle se met sous la forme $t \mapsto tQ(t)$ avec Q de même degré que P. Si $\alpha \neq \lambda$, on peut trouver γ sous la forme
$$t \mapsto Q(t)e^{(\alpha-\lambda)t}$$
où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

Finalement, la solution générale de l'équation complète s'écrit
$$t \mapsto ke^{\lambda t} + t^{m(\alpha)}Q(t)\, e^{\alpha t} \quad \text{où } k \in \mathbb{K},$$
avec Q une fonction polynomiale de même degré que P, et $m(\alpha) = 0$ si $\alpha \neq \lambda$, $m(\alpha) = 1$ si $\alpha = \lambda$.

IV. Équations scalaires d'ordre 2

On s'intéresse ici au cas d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2, de la forme

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t), \tag{$\mathscr{L}_2$}$$

où a, b et c sont trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On appelle solution sur I de $(\mathscr{L}_2)$ toute fonction $x : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I, telle que pour tout $t \in I$,

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t).$$

Une telle solution est alors nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

1. Système différentiel d'ordre 1 associé

Nous allons montrer comment se ramener au cadre d'application de la théorie précédente.
Soit $x : I \to \mathbb{K}$ une solution de $(\mathscr{L}_2)$ sur I et

$$X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

Alors X est dérivable sur I, à valeurs dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, et vérifie : pour tout $t \in I$,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -a(t)x'(t) - b(t)x(t) + c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Posons, pour tout $t \in I$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \ \text{ et } \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K});$$

les fonctions A et B sont continues sur I, et X est solution du système différentiel

$$X' = A(t)X + B(t).$$

Réciproquement, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ une solution de $X' = A(t)X + B(t)$ sur I. Alors on a, pour tout $t \in I$,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -a(t)y(t) - b(t)x(t) + c(t) \end{pmatrix}.$$

D'après la première égalité, on a $y = x'$; en particulier x est deux fois dérivable sur I. De plus, pour tout $t \in I$,

$$x''(t) = -a(t)x'(t) - b(t)x(t) + c(t).$$

Finalement, x est solution de $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ sur I.

On a donc montré le résultat suivant :

Propriété

Avec les notations précédentes, les solutions sur I du système différentiel

$$X' = A(t)X + B(t)$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

où x est solution de $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ sur I.
En particulier, on obtient exactement les solutions de $(\mathscr{L}_2)$ en prenant la première fonction-coordonnée des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$.

On se ramène ainsi, quitte à passer dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, à un système différentiel du premier ordre.

Exemple – L'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

$$x'' + t\,x' + t^2\,x = t^3$$

se met sous la forme du système différentiel

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t^2 & -t \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}. \qquad \square$$

La théorie de la première partie (le théorème de Cauchy linéaire et ses conséquences) s'applique et donne le résultat suivant :

Théorème

Soient a, b et c trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

• Alors l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

$$(\mathscr{L}_2) : \qquad x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

possède des solutions.

• Pour tout $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{K}$ et $x_1 \in \mathbb{K}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t) & \forall\, t \in I \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

possède une unique solution.

• L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation homogène

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \qquad (\mathcal{H}_2)$$

est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$.

• On obtient toutes les solutions de $(\mathscr{L}_2)$ sous la forme

« Solution particulière de $(\mathscr{L}_2)$ + solution générale de l'équation homogène $(\mathcal{H}_2)$ ».

Démonstration – Avec les notations précédentes, le théorème de Cauchy linéaire s'applique à l'équation $X' = A(t)X + B(t)$ posée dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, car les applications A et B sont continues sur I. Il existe des solutions de cette équation, et donc des solutions de $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$.

Pour tout $t_0 \in I$ et $(x_0,x_1) \in \mathbb{K}^2$, il existe une solution X de $X' = A(t)X + B(t)$ telle que $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$; X se met alors sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ avec x solution de $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ et

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

d'où l'existence d'une solution au problème de Cauchy. Si x et y en sont deux solutions, alors $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux solutions du problème de Cauchy matriciel correspondant, donc par unicité pour ce problème, $X = Y$, d'où $x = y$.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation homogène

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{K})$ (vérification immédiate), il est de dimension 2 car, d'après l'existence et unicité pour le problème de Cauchy (que l'on vient de prouver), l'application

$$\phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un isomorphisme, pour tout $t_0 \in I$. $\square$

Contrairement au premier ordre, il n'existe pas de méthode générale pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ ou $(\mathscr{L}_2)$. Dans la suite, nous allons indiquer un cas que l'on sait traiter, ainsi qu'une méthode d'aide à la recherche de solutions dans le cas général.

2. Cas où l'équation homogène associée est à coefficients constants

On considère le cas particulier des équations de la forme

$$x'' + ax' + bx = c(t)$$

où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

Dans ce cas, le cours de première année permet de déterminer deux solutions indépendantes de l'équation homogène *via* la résolution de l'équation caractéristique

$$x^2 + ax + b = 0. \tag{$\mathcal{E}$}$$

Théorème

• Si $(\mathcal{E})$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$.
Pour toute solution x de $(\mathcal{H}_2)$, il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t}.$$

• Si $(\mathcal{E})$ possède une racine double r dans $\mathbb{K}$, $t \mapsto e^{rt}$ et $t \mapsto t\, e^{rt}$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$.
Pour toute solution x de $(\mathcal{H}_2)$, il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}.$$

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $(\mathcal{E})$ possède deux racines complexes conjuguées z et $\overline{z}$ dans $\mathbb{C}$, alors il existe $r \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$ tels que $z = r + i\omega$. Les fonctions $t \mapsto e^{rt}\cos(\omega t)$ et $t \mapsto e^{rt}\sin(\omega t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$.
Pour toute solution x de $(\mathcal{H}_2)$, il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = e^{rt}(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)).$$

La forme matricielle de l'équation homogène $x'' + ax' + bx = 0$ est le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

On remarquera que le polynôme $X^2 + aX + b$ apparaissant dans l'équation caractéristique est le polynôme caractéristique de la matrice A, phénomène semblable à celui que nous avions observé lors de l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Nous avions montré dans le chapitre **Réduction des endomorphismes et des matrices carrées** que la matrice A est :

- diagonalisable si $(\mathcal{E})$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$; il existe $P \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{K})$ tel que
$$A = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1};$$
- trigonalisable si $(\mathcal{E})$ possède une racine double r dans $\mathbb{K}$; il existe $P \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{K})$ tel que
$$A = P \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On résout ce système en posant $Y = P^{-1}X = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, ce qui revient à résoudre le système
$$Y' = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} Y, \quad i.e. \quad \begin{cases} y_1' = r_1 y_1 \\ y_2' = r_2 y_2 \end{cases}$$
dans le premier cas, et le système
$$Y' = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} Y, \quad i.e. \quad \begin{cases} y_1' = r y_1 + y_2 \\ y_2' = r y_2 \end{cases}$$
dans le deuxième cas. Après résolution de ce système, en prenant la première coordonnée de $X = PY$, on retrouve bien la forme générale des solutions présentée dans le théorème précédent.

En ce qui concerne l'équation complète :

• Lorsque le second membre est de la forme $P(t)\, e^{\alpha t}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on pensera à chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto t^{m(\alpha)} Q(t)\, e^{\alpha t}$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$ est de même degré que P et $m(\alpha)$ est la multiplicité de α comme racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{E})$ associée à l'équation homogène ($m(\alpha)$ peut valoir 0, 1 ou 2).
On pourra aussi utiliser le changement de fonction inconnue consistant à poser $y : t \mapsto x(t)\, e^{-\alpha t}$.

• En particulier, lorsque $b \neq 0$ et le second membre est polynomial, on pourra chercher une solution particulière polynomiale de même degré. En effet, on est dans la situation précédente avec $\alpha = 0$ et $m(\alpha) = 0$.

• Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le second membre est de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$ avec $(A,\omega) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega \neq 0$, on pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ si $i\omega$ n'est pas racine de $(\mathcal{E})$, ou sous la forme $t \mapsto t(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t))$ sinon.
En effet, on se ramène au premier point en considérant l'équation
$$x'' + ax' + bx = Ae^{i\omega t}.$$
Si x_p en est une solution particulière, alors $\mathcal{R}e(x_p)$ (resp. $\mathcal{I}m(x_p)$) est une solution particulière de
$$x'' + ax' + bx = A\cos(\omega t) \quad (\text{resp. } x'' + ax' + bx = A\sin(\omega t)),$$
car a et b sont réels. Or, ces fonctions sont de la forme indiquée ci-dessus, selon que $i\omega$ est racine ou non de l'équation caractéristique (il ne peut pas en être racine double, car a et b sont réels).

• Enfin, on pourra utiliser le principe de superposition lorsque le second membre est somme de plusieurs termes.

Exemples

• L'évolution d'un oscillateur amorti en régime libre est régie par l'équation différentielle
$$x'' + 2\lambda\, x' + \omega_0^2\, x = 0,$$
qui regroupe par exemple les systèmes masse-ressort, les pendules de torsion, les circuits RLC. Le coefficient $\lambda \geqslant 0$ est le coefficient d'amortissement du système, $\omega_0 > 0$ en est la pulsation propre.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre est

$$r^2 + 2\lambda\, r + \omega_0^2 = 0,$$

de discriminant réduit $\lambda^2 - \omega_0^2$.

– Si $\lambda = 0$ (amortissement nul), on obtient deux solutions indépendantes,

$$t \mapsto \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin(\omega_0 t).$$

On écrit la solution générale de l'équation sous la forme $t \mapsto C\cos(\omega_0 t + \varphi)$, où C est l'amplitude des oscillations du système, et φ la phase à l'origine. On comprend bien ainsi l'expression « pulsation propre » : c'est la pulsation du système en l'absence d'amortissement et de force ou signal extérieur.

– Si $0 < \lambda < \omega_0$, les racines de l'équation caractéristique sont $-\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$; on obtient deux solutions indépendantes,

$$t \mapsto e^{-\lambda t}\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{-\lambda t}\sin(\omega t),$$

où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ (appelée pseudo-pulsation, lorsque l'amortissement est faible). On écrit la solution générale de l'équation sous la forme $t \mapsto Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$, où $Ce^{-\lambda t}$ est l'amplitude, exponentiellement décroissante, des « oscillations » du système.

– Si $\lambda > \omega_0$, les racines de l'équation caractéristique sont $r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$; leur produit vaut $\omega_0^2 > 0$, leur somme $-2\lambda < 0$: r_+ et r_- sont donc strictement négatifs. On obtient deux solutions indépendantes,

$$t \mapsto e^{r_+ t} \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{r_- t}.$$

Il n'y a pas d'oscillations, on parle de régime **apériodique**.

– Si $\lambda = \omega_0$, la racine double de l'équation caractéristique est $r = -\lambda$. On obtient deux solutions indépendantes,

$$t \mapsto e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad t \mapsto t\, e^{-\lambda t}.$$

On parle de régime **critique**. C'est celui pour lequel le retour à l'équilibre est le plus rapide.

On peut alors soumettre l'oscillateur à une force ou un signal extérieur (régime forcé), par exemple de la forme $F_0\cos(\Omega t)$ où $\Omega > 0$ est la pulsation et F_0 l'amplitude de cette force ou de ce signal : l'équation régissant l'évolution du système est alors

$$x'' + 2\lambda\, x' + \omega_0^2\, x = F\cos(\Omega\, t),$$

où F est fonction de F_0 et des caractéristiques du système (inductance ou masse, notamment).

On a

$$(i\Omega)^2 + 2\lambda\,(i\Omega) + \omega_0^2 = \omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\,\lambda\,\Omega.$$

Si $\lambda > 0$ ou $\Omega \neq \omega_0$, $i\Omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut trouver une solution particulière de l'équation complète sous la forme $t \mapsto \alpha\cos(\Omega t + \phi)$.

Si $\lambda = 0$ et $\Omega = \omega_0$, $i\Omega$ est racine de l'équation caractéristique, on peut trouver une solution particulière de l'équation complète sous la forme $t \mapsto \alpha\, t\cos(\Omega t + \phi)$.

La solution générale de l'équation complète est alors somme de la solution générale de l'équation homogène et de cette solution particulière. La première est amortie si $\lambda > 0$, elle correspond au régime **transitoire** ; la seconde n'est pas amortie, elle correspond au régime **établi** ou **permanent**. On peut également rechercher pour quelle pulsation Ω la réponse du système a une amplitude maximale ; on montre facilement que pour un amortissement assez faible, cette pulsation existe, on parle de phénomène de **résonance** (pour $\lambda = 0$, on a immédiatement $\Omega = \omega_0$).

• Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x'' + 6x' + 9x = \dfrac{e^{-3t}}{1+t^2}$.

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 + 6r + 9 = 0$, elle admet une racine double $r = -3$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc sous la forme $t \mapsto (at+b)\,e^{-3t}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

On va chercher la solution générale de l'équation complète sous la forme $t \mapsto b(t)\,e^{-3t}$ (ce qui revient en fait à faire varier la constante b). Cela est possible car $e^{-3t} \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La fonction $x : t \mapsto b(t)\,e^{-3t}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si b l'est, et dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = (b'(t) - 3b(t))\,e^{-3t} \qquad \text{et} \qquad x''(t) = (b''(t) - 6b'(t) + 9b(t))\,e^{-3t}.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = \frac{e^{-3t}}{1+t^2} \\ \Leftrightarrow\quad & \big(b''(t) - 6b'(t) + 9b(t)\big) + 6\big(b'(t) - 3b(t)\big) + 9b(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ \Leftrightarrow\quad & b''(t) = \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que x soit solution de l'équation complète sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'il existe $k_1 \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$b'(t) = \arctan(t) + k_1.$$

On détermine une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ par intégration par parties (les fonctions $s \mapsto s$ et $s \mapsto \arctan(s)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \arctan(s)\,ds = [s\arctan(s)]_0^t - \int_0^t \frac{s}{1+s^2}\,ds = t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2).$$

Finalement, pour que x soit solution de l'équation complète sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'il existe $(k_1,k_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \left(t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + k_1 t + k_2\right)\,e^{-3t}.$$

Remarque – La méthode utilisée dans l'exemple précédent est inspirée de la méthode de variation de la constante.

Équations d'Euler

Il s'agit des équations différentielles de la forme $at^2x'' + btx' + cx = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où a, b et c sont des constantes ($a \neq 0$).

Le théorème de Cauchy linéaire s'applique, car l'équation équivaut sur $\mathbb{R}_+^*$ à

$$x'' + \frac{b}{at}x' + \frac{c}{at^2}x = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients continus sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $t = e^u$ (pour $t \in \mathbb{R}_+^*$) permet de résoudre ces équations, car il les transforme en équations à coefficients constants. En effet, si l'on pose $y : u \mapsto x(e^u)$ pour $u \in \mathbb{R}$, alors pour tout $t > 0$, $x(t) = y(\ln(t))$. Pour que x soit deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut et il suffit que y soit deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas, pour tout $t > 0$,

$$x'(t) = \frac{1}{t}\,y'(\ln(t)), \qquad x''(t) = -\frac{1}{t^2}\,y'(\ln(t) + \frac{1}{t^2}\,y''(\ln(t)).$$

La fonction x est solution de l'équation originale si et seulement si pour tout $t > 0$,

$$ay''(\ln(t)) - ay'(\ln(t)) + by'(\ln(t)) + cy(\ln(t)) = 0,$$

L'image de la fonction ln est $\mathbb{R}$, donc ceci équivaut au fait que y soit solution sur $\mathbb{R}$ de

$$ay'' + (b-a)y' + cy = 0. \tag{$\mathscr{L}'$}$$

L'équation caractéristique associée à cette équation est $ar^2 + (b-a)r + c = 0$. Soient α_1 et α_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, la solution générale de ($\mathscr{L}'$) s'écrit

$$y : u \mapsto \lambda\, e^{\alpha_1 u} + \mu\, e^{\alpha_2 u}$$

avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, et donc la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation d'origine s'écrit

$$x : t \mapsto \lambda\, e^{\alpha_1 \ln(t)} + \mu\, e^{\alpha_2 \ln(t)} = \lambda\, t^{\alpha_1} + \mu\, t^{\alpha_2}.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, la solution générale de ($\mathscr{L}'$) s'écrit

$$y : u \mapsto \lambda\, e^{\alpha u} + \mu\, u\, e^{\alpha u}$$

avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, et donc la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation d'origine s'écrit

$$x : t \mapsto \lambda\, e^{\alpha \ln(t)} + \mu\, \ln(t)\, e^{\alpha \ln(t)} = \lambda\, t^{\alpha} + \mu\, \ln(t)\, t^{\alpha}.$$

En particulier, il est donc judicieux de chercher des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sous la forme $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit on trouve de telles solutions pour deux valeurs distinctes de α, soit on en trouve pour une seule valeur de α, et alors $t \mapsto (\ln(t))\, t^\alpha$ est une autre solution de l'équation. Dans les deux cas, on en déduit la solution générale par combinaison linéaire des deux solutions obtenues.

Enfin, x est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $t \mapsto x(-t)$ en est solution sur $\mathbb{R}_-^*$. On en déduit la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exemple – Résolvons l'équation $t^2x'' - 4tx' + 6x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par la méthode précédente, qui conduit à l'équation

$$\alpha(\alpha-1) - 4\alpha + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = 3.$$

La solution générale de l'équation précédente s'écrit donc

$$t \mapsto \lambda t^2 + \mu t^3 \quad \text{où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2.$$

3. Utilisation des séries entières

Pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 (la méthode peut s'appliquer aussi pour l'ordre 1)

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

dont les coefficients a, b, et c sont polynomiaux ou développables en séries entières, il est intéressant de chercher les solutions de ces équations qui sont développables en série entière. Donnons un exemple de telle résolution.

On cherche à résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)x'' + 4tx' + 2x = 0$. Cette équation entre dans le cadre de ce chapitre, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t^2 \neq 0$, et donc l'équation équivaut à

$$x'' + \frac{4t}{1+t^2}x' + \frac{2}{1+t^2}x = 0,$$

qui est à coefficients continus (et elle est sans second membre). En particulier, le théorème de Cauchy linéaire s'applique et montre que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un plan vectoriel. Pour le déterminer, on va chercher les solutions développables en série entière.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. On pose, pour tout $t\in\,]-R,R[$,

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\text{La fonction } f \text{ est solution de l'équation } (1+t^2)x''+4tx'+2x=0 \text{ sur }]-R,R[\\
\Leftrightarrow\quad &\forall\, t\in\,]-R,R[\,,\quad (1+t^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+4t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0\\
\Leftrightarrow\quad &\forall\, t\in\,]-R,R[\,,\quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n}+\sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n t^{n}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0\\
\Leftrightarrow\quad &\forall\, t\in\,]-R,R[\,,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} 4n a_n t^{n}+2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0\\
\Leftrightarrow\quad &\forall\, t\in\,]-R,R[\,,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n(n-1)+4n+2)a_n\right]t^n=0.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (sachant que $R>0$), ceci équivaut à

$$\begin{aligned}
&\forall\, n\in\mathbb{N},\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2+3n+2)a_n=0\\
i.e.\quad &\forall\, n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=-a_n.
\end{aligned}$$

Ceci équivaut au fait que pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$a_{2p}=(-1)^p a_0 \quad\text{et}\quad a_{2p+1}=(-1)^p a_1.$$

Définissons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations précédentes, a_0 et a_1 étant des scalaires quelconques. Pour tout $t\in\,]-1,1[$ et $p\in\mathbb{N}$,

$$|a_{2p}t^{2p}|=|a_0|(t^2)^p \quad\text{et}\quad |a_{2p+1}t^{2p+1}|=|a_1 t|\,(t^2)^p,$$

la série géométrique de raison $t^2\in[0,1[$ étant convergente. Ainsi, les deux séries entières

$$\sum_{p\geqslant 0} a_{2p}\,t^{2p} \quad\text{et}\quad \sum_{p\geqslant 0} a_{2p+1}\,t^{2p+1}$$

convergent, et par somme, $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ converge. Donc le rayon de convergence R de cette série entière vérifie $R\geqslant 1$. De plus, pour tout $t\in\,]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}t^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}t^{2p+1}=a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p}+a_1\,t\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p}=\frac{a_0+a_1 t}{1+t^2}.$$

D'après la série d'équivalences ci-dessus, les solutions développables en série entière autour de 0 de

$$(1+t^2)x''+4tx'+2x=0$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$t\mapsto \frac{at+b}{t^2+1}$$

avec $(a,b)\in\mathbb{K}^2$.

On vérifie immédiatement qu'une telle fonction est en fait solution sur $\mathbb{R}$ tout entier, même si son développement en série entière n'est pas toujours valable sur $\mathbb{R}$.

Les deux fonctions

$$t \mapsto \frac{t}{t^2+1} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$$

sont clairement linéairement indépendantes ; on a donc obtenu un plan vectoriel de solutions, et d'après le théorème de Cauchy linéaire, on a en fait la solution générale de l'équation.

Remarques

• Dans l'exemple précédent, on a pu résoudre entièrement l'équation car toutes ses solutions sont développables en série entière, mais ce n'est pas toujours le cas.

• La démarche précédente fait souvent apparaître des relations de récurrence entre les coefficients a_n. On peut parfois en déduire explicitement les coefficients a_n, voire une forme simple pour f comme dans l'exemple précédent, mais à nouveau, ce n'est pas toujours le cas. En revanche, la règle de d'Alembert peut permettre de déterminer le rayon de convergence R à partir d'une relation de récurrence entre les a_n, même si ces coefficients ne sont pas connus explicitement. Par exemple, en imaginant une équation différentielle qui aboutisse à la relation

$$a_0 = 1 \quad \text{et :} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n^2+n+1}{2(n+1)(n+2)} a_n,$$

il n'est pas du tout évident d'obtenir une formule explicite pour a_n. Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2+n+1}{2(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ a donc un rayon de convergence égal à 2 d'après la règle de d'Alembert.