D.L. 5

Problème A : le brachistrochrone

On rappelle que, si Φ et Ψ sont deux formes linéaires sur un espace vectoriel réel E telles que Ψ s'annule sur le noyau de Φ, alors il existe un réel λ tel que $\Psi = \lambda.\Phi$.

Notations et objectifs du problème

- On note E l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
- Pour a réel strictement positif, on note : $E_a = \left\{ f \in E \ / \ \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = a \right\}$.
- On considère, dans l'espace physique usuel, un plan vertical $\mathcal{P}$ orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'axes (Ox,Oy), de sorte que l'axe Ox soit dirigé par l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$: on écrit alors $\vec{g} = g.\vec{i}$ avec $g > 0$. On note A le point de coordonnées $(1,a)$ où $a > 0$. À toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = a$, on associe son graphe (Γ). Un point mobile $M(t)$, lâché du point O sans vitesse initiale et soumis à l'action de la pesanteur, est assujetti à se déplacer sur (Γ). Si T est le temps mis par ce mobile pour parvenir au point A, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,T]$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} x'(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) = f\left(x(t)\right) \\ g.x(t) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2\right] \end{array}\right\} \quad \text{pour } 0 < t \leq T \end{cases}$$

On se propose d'étudier le problème du *brachistochrone* relatif à A : déterminer les courbes (Γ) telles que le temps T soit minimum.

Partie I – Étude d'une courbe paramétrée

On note (C) la courbe du plan $\mathcal{P}$ décrite, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, par le point $M(\theta)$ de coordonnées $(x(\theta),y(\theta))$ avec :

$$\begin{cases} x(\theta) = 1 - \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\theta - \sin 2\theta \end{cases}.$$

I.A. - Préciser des transformations géométriques simples laissant (C) globalement invariante.

I.B. - Tracer (C) dans le système d'axes (Ox,Oy) représentés de sorte que l'axe Ox soit vertical et dirigé vers le bas. Calculer la longueur du sous-arc de (C) délimité par deux points de rebroussement consécutifs.

I.C. - Pour tout réel $\lambda \in [0,1]$, on note g_λ la fonction numérique définie sur $[0,1[$ par : $s \mapsto \dfrac{\lambda\sqrt{s}}{\sqrt{1-\lambda^2 s}}$.

I.C.1) Prouver que g_λ est intégrable sur $[0,1[$.

On posera, pour $x \in [0,1]$, $f_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x g_\lambda(s)\,\mathrm{d}s$ et on notera (C_λ) le graphe de f_λ.

I.C.2) Sans calculer l'intégrale, montrer que la fonction $\lambda \mapsto f_\lambda(1)$ est continue strictement croissante sur $[0,1]$.

I.C.3) Dans cette question, on suppose que $0 < \lambda < 1$ et on pose $\lambda = \sin\omega$ avec $\omega \in]0,\pi/2[$.

Pour $\theta \in [0,\omega]$, exprimer $f_\lambda\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2}\right)$ en fonction de λ et θ.

En conclure que (C_λ) est homothétique à un sous-arc de (C).

Calculer, en fonction de ω, la valeur de $f_\lambda(1)$.

I.C.4) Préciser la valeur de $f_1(1)$.

Partie II – Étude d'un problème de minimum

II.A. - Si $z \in E$, montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$.

On posera dans la suite :

$$U(z) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

Justifier l'existence de $m(a) = \inf \left\{U(z)\,,\ z \in E_a\right\}$ et donner un encadrement de $m(a)$.

II.B. - Déterminer la limite de $m(a)$ quand a tend vers 0.

II.C. - Dans cette question, on cherche une condition nécessaire sur le réel $a > 0$ pour qu'existe $z \in E_a$ vérifiant $U(z) = m(a)$. On désigne par (a, z) un tel couple dont on suppose l'existence.

II.C.1) Soit $h_0 \in E_0$, démontrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(t) = U(z + th_0) \tag{1}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

II.C.2) Exprimer $\phi'(0)$ sous forme d'une intégrale ; en déduire l'existence d'un réel λ, indépendant de h, tel que :

$$\forall h \in E, \quad \int_0^1 \frac{z(x)\,h(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lambda \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

II.C.3) On fixe $x_0 \in\ ]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N} < \min(x_0, 1-x_0)$.

Pour $n > N$, on note h_n l'élément de E défini par :

- $h_n(x) = 0$ pour $|x - x_0| \geq 1/n$.
- h_n est affine sur $[x_0 - 1/n, x_0]$ et sur $[x_0, x_0 + 1/n]$.
- $h_n(x_0) = n$.

Soit $f \in \mathcal{C}(]0,1[\,,\mathbb{R})$. La fonction $h_n f$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\,.$$

II.C.4) Prouver que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\frac{z(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}} = \lambda\sqrt{x}.$$

Montrer que $\lambda \in\ ]0,1[$ et donner l'expression de $z(x)$ sur $[0,1]$.

II.C.5) Montrer que $0 < a < \pi/2$.

II.D. - On se donne réciproquement un réel $a \in\ ]0, \pi/2[$.

II.D.1) Démontrer l'existence d'un unique $\lambda \in\ ]0,1[$ tel que $a = f_\lambda(1)$.

II.D.2) Montrer que si $h_0 \in E_0$ la fonction $t \mapsto U(g_\lambda + th_0)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est croissante.

II.D.3) Prouver que $U(g_\lambda + h_0) \geq U(g_\lambda)$.

II.D.4) Déduire de ce qui précède que, si $a \in\ ]0, \pi/2[$, il existe un unique $z \in E_a$ tel que $U(z) = m(a)$.

Donner, en fonction de $\omega \in\ ]0, \pi/2[$, tel que $\sin\omega = \lambda$, les valeurs de a et de $m(a)$.

Partie III – Étude du brachistochrone relatif à A

On considère maintenant le problème du brachistochrone défini dans le préambule dont on reprend les notations. Le réel λ est défini comme dans **II.D.1)**.

III.A. - f étant une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, exprimer, à l'aide de $U(f')$, le temps mis par le point mobile $M(t)$ décrivant (Γ) pour parvenir au point A.

III.B. - En déduire que, si $0 < a < \pi/2$, le problème du brachistochrone a une solution unique (Γ) que l'on précisera et calculer le temps T mis par le mobile, décrivant (Γ), pour parvenir en A.

Problème B

Ce problème comporte deux parties largement indépendantes.

Partie I

Dans cette partie, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, q une fonction continue sur I à valeurs réelles et (E) l'équation différentielle linéaire :

$$y'' + q(x)y = 0.$$

On suppose de plus que, pour tout élément x de I, $q(x) \leq 0$.
Pour abréger, on appellera solution de (E) toute fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, à valeurs réelles, vérifiant

$$\forall x \in I \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Quand on cherchera une solution à valeurs complexes, cela sera précisé.

1) Soit c un élément de I. Que peut-on dire d'une solution y de (E) vérifiant

$$y(c) = 0 \quad \text{et} \quad y'(c) = 0\ ?$$

2) Dans cette question, on suppose qu'il existe une solution non nulle de (E), notée y, et deux éléments a et b de I tels que

$$y(a) = y(b) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]a,b[\quad y(x) \neq 0.$$

a) Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que : $y'(c) = 0$ et $y(c) \neq 0$.

b) On suppose $y(c) > 0$. Étudier les variations de y sur $]a,b[$.

c) Déduire de ce qui précède que l'hypothèse formulée au début de cette question est impossible.

3) Dans cette question, y est une solution non nulle de (E) admettant un zéro a dans I.
On note F_1 l'ensemble des éléments b de I tels que $b > a$ et $y(b) = 0$. On suppose que F_1 est non vide et l'on pose $m = \inf F_1$.

a) Montrer, en utilisant la question précédente, que le cas $m \in F_1$ est impossible.

b) On a donc $m \notin F_1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe b_n vérifiant

$$m < b_n < m + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y(b_n) = 0.$$

En déduire que $y(m) = 0$, puis que $m = a$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe d_n vérifiant

$$a < d_n < a + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y'(d_n) = 0.$$

En déduire que $y'(a) = 0$.

d) Déduire des questions précédentes que l'hypothèse $F_1 \neq \emptyset$ est impossible.

e) On pose de même $F_2 = \{b \in I \ / \ b < a \text{ et } y(b) = 0\}$. Montrer que $F_2 = \varnothing$.

4) Déduire de ce qui précède que toute solution non nulle de (E) possède au plus un zéro.

5) <u>*Exemples*</u> : soit ω un réel positif ou nul fixé.

a) $I = \mathbb{R}$, (E) est l'équation différentielle : $y'' - \omega^2 y = 0$. Montrer directement (sans utiliser les résultats précédents) que toute solution non nulle de (E) possède au plus un zéro et que toute solution de (E') : $y'' + \omega^2 y = 0$ en possède une infinité.

b) $I = \mathbb{R}^{+*}$, (E) est l'équation : $x^2y'' - \omega^2 y = 0$. Trouver les solutions de (E) de la forme $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; en déduire l'ensemble des solutions de (E) et montrer là encore directement que toute solution non nulle de (E) possède au plus un zéro.

c) $I = \mathbb{R}^{+*}$, (E) est l'équation : $x^2y'' + \omega^2 y = 0$. Trouver les solutions de (E) de la forme $x \mapsto x^\alpha$, où α est un nombre réel ou complexe ; en déduire l'ensemble des solutions de (E) à valeurs réelles et discuter selon les valeurs de ω si les solutions non nulles de (E) possèdent au plus un zéro sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou non.

Partie II

Dans cette partie, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, p et q des fonctions continues sur I à valeurs réelles vérifiant : $\forall x \in I \quad p(x) > q(x)$.

(E_1) désigne l'équation différentielle : $y'' + p(x)y = 0$.

(E_2) désigne l'équation différentielle : $y'' + q(x)y = 0$.

On appellera solution de (E_1) (*resp.* de (E_2)) toute fonction y_1 (resp. y_2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, à valeurs réelles, vérifiant :

$$\forall x \in I \quad y_1''(x) + p(x)y_1(x) = 0 \quad (\textit{resp. } y_2''(x) + q(x)y_2(x) = 0).$$

1) Soit y_2 une solution non nulle de (E_2).

On suppose que y_2 possède deux zéros a et b (avec $a < b$) dans I et que : $\forall x \in]a, b[\quad y_2(x) > 0$.

Soit y_1 une solution non nulle de (E_1).

a) On suppose dans cette question que : $\forall x \in]a, b[\quad y_1(x) > 0$.

On désigne par W la fonction définie par : $W = y_1y_2' - y_1'y_2$.

Étudier les variations de W sur l'intervalle $]a, b[$.

Montrer que l'hypothèse donnée plus haut "$\forall x \in]a, b[\quad y_1(x) > 0$" est impossible.

b) Montrer que y_1 possède au moins un zéro dans $]a, b[$.

2) Déduire de ce qui précède que si a et b sont des zéros consécutifs de y_2, solution de (E_2) (c'est-à-dire $y_2(a) = y_2(b) = 0$ et $\forall x \in]a, b[\quad y_2(x) \neq 0$), alors toute solution de (E_1) possède au moins un zéro dans $]a, b[$.

3) <u>*Application*</u> : soit $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ et p une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad p(x) > \omega^2$.

a) Montrer que toute solution y de (E) : $y'' + p(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ possède au moins un zéro dans tout intervalle $]k\pi/\omega, (k+1)\pi/\omega[$, où k désigne un entier naturel, et possède donc une infinité de zéros.

b) Montrer que, si l'on suppose seulement : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad p(x) > 0$, une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (E) : $y'' + p(x)y = 0$ n'a pas nécessairement une infinité de zéros *(on pourra utiliser* **I)5)c)***)*.

4) Dans cette question, on considère la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos t) \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner F', F''.

b) Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') : $xy'' + y' + xy = 0$.

c) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad z(x) = \sqrt{x}F(x)$. Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation

$$z'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) z = 0.$$

En déduire que F possède une infinité de zéros et qu'en particulier tout intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, où k est un entier relatif, contient au moins un zéro de F.

— *On ne peut pas faire un cheval de course d'un porc.*

— *Non, répondit Samuel, mais on peut en faire un porc de course.*

John Steinbeck *(À l'est d'Eden)*.