

Exercice

1) La relation de trigonométrie classique :

$$\sin(p+1)\theta + \sin(p-1)\theta = 2\sin p\theta \cos \theta$$

donne

$$-\sin(p-1)\theta + 2\sin p\theta - \sin(p+1)\theta = 2(1 - \cos \theta) \sin p\theta.$$

Fixons k dans \mathbb{N}_n . En remplaçant θ par $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$, les relations précédentes, pour $p = 1, \dots, n$, compte tenu de

$$\sin 0\theta_k = \sin(n+1)\theta_k = 0,$$

montrent que le vecteur $(\sin p\theta_k)_{1 \leq p \leq n}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_k = 2(1 - \cos \theta_k)$. Comme la fonction $\theta \mapsto 2(1 - \cos \theta)$ est strictement croissante sur $[0, \pi]$, je viens de trouver n valeurs propres distinctes pour A : les λ_k , $1 \leq k \leq n$; A est donc diagonalisable ; ainsi :

Les λ_k , $1 \leq k \leq n$ sont les valeurs propres de A .

Une base de vecteurs propres de A est formée par les $\left(\sin \frac{pk\pi}{n+1}\right)_{1 \leq p \leq n}$, pour $1 \leq k \leq n$.

2) a) Classiquement, par deux développements successifs, j'obtiens :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x).$$

Comme $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1$, il apparaît que la relation ci-dessus reste vraie pour $n = 0$ en posant $P_0(x) = 1$.

b) Soit $x \in]-2, 2[$; l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire double ci-dessus est

$$r^2 - xr + 1 = 0, \text{ de discriminant } \Delta = x^2 - 4 < 0$$

dont les solutions sont $\frac{x}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$, ou encore, en fonction de $\theta = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos \theta \pm i \sin \theta$ (cela quel que soit le signe de $\sin \theta \dots$). Ainsi, il existe deux réels α, β tels que

$$P_n(x) = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta,$$

α et β étant déterminés grâce aux valeurs initiales (on aura noté que $\theta \in]0, \pi[$) :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = x = 2 \cos \theta \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{cases}.$$

D'où finalement :

$$P_n(x) = \frac{\sin \theta \cos n\theta + \cos \theta \sin n\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

Par conséquent,

$$x \in \text{Sp } B \Leftrightarrow P_n(x) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$$

Comme $x = 2 \cos \theta$, j'obtiens ainsi n valeurs propres distinctes pour B , les $\mu_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Or $A = 2I + B$, les valeurs propres de A sont donc les $2 + \mu_k$:

Les valeurs propres de B (resp. A) sont les $2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ (resp. $2 \left(1 + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}\right)$) pour $1 \leq k \leq n$.

On retrouve le résultat du 1), compte tenu de la relation $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, en remplaçant k par $n+1-k$.

Problème A

Partie I

1) a) Par définition, $w(e_1) = e_n$ et $w(e_k) = e_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq n$.

b) Soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition :

$$w^p(e_k) = e_{k-p} \quad \text{pour } p+1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad w^p(e_k) = e_{n+k-p} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq p$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(p)$ pour un certain p compris entre 1 et $n-1$.

- * pour $1 \leq k \leq p$, $w^{p+1}(e_k) = w(e_{n+k-p})$ or $n+1-p \leq n+k-p \leq n$, donc $2 \leq n+k-p \leq n$ ainsi $w^{p+1}(e_k) = e_{n+k-p-1}$;
- * $w^{p+1}(e_{p+1}) = w(e_1)$ donc $w^{p+1}(e_{p+1}) = e_n$;
- * pour $p+2 \leq k \leq n$, $w^{p+1}(e_k) = w(e_{k-p})$ or $2 \leq k-p$ donc $w^{p+1}(e_k) = e_{k-p-1}$.

Ainsi $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Du théorème de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout p compris entre 1 et n :

$$\boxed{w^p(e_k) = e_{k-p} \text{ pour } p+1 \leq k \leq n \text{ et } w^p(e_k) = e_{n+k-p} \text{ pour } 1 \leq k \leq p.}$$

En particulier, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit :

$$\boxed{w^n = \text{Id}_E.}$$

c) w annule le polynôme $X^n - 1$, scindé sur \mathbb{C} et dont toutes les racines sont simples. Il en résulte que

$$\boxed{w \text{ est diagonalisable.}}$$

Toute valeur propre de w est nécessairement racine du polynôme annulateur $X^n - 1$, donc une racine n -ième de 1. Réciproquement, soit λ une racine n -ième de 1 et $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. La relation $w(x) = \lambda x$ équivaut à

$$x_2 = \lambda x_1 ; x_3 = \lambda x_2 ; \dots ; x_n = \lambda x_{n-1} ; x_1 = \lambda x_n.$$

Soit donc $\delta = \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} e_k$; il vient :

$$w(\delta) = \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} w(e_k) = \sum_{k=2}^n \lambda^{k-1} e_{k-1} + e_n$$

or $\lambda^n = 1$ d'où

$$w(\delta) = \sum_{k=1}^n \lambda^k e_k = \lambda \cdot \delta.$$

Par conséquent, le spectre de w est exactement l'ensemble des racines n -ièmes de 1 :

$$\boxed{\text{Sp}(w) = \{\omega^{j-1}, 1 \leq j \leq n\}, \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.$$

Ainsi, w admet n valeurs propres distinctes, or E est de dimension n : les n sous-espaces propres de w sont donc des droites¹. Plus précisément, d'après le calcul précédent :

$$\boxed{\text{Pour } 1 \leq j \leq n, E_{\omega^{j-1}}(w) = \text{Vect}(\delta_j) \text{ où } \delta_j = \sum_{k=1}^n \omega^{(j-1)(k-1)} e_k.}$$

J'ai ainsi

$$P^{-1}WP = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}) \text{ avec } P = \left(\omega^{(j-1)(i-1)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

PP^* est la matrice $(c_{i,j})$ où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \omega^{(i-1)(k-1)} \overline{\omega^{(k-1)(j-1)}} = \sum_{k=1}^n \left(\omega^{(i-1)} \overline{\omega^{(j-1)}} \right)^{k-1}.$$

Or $\omega^{(i-1)} \overline{\omega^{(j-1)}} = \omega^{i-j}$ vaut 1 si et seulement si $i = j$, puisque $i - j \in \llbracket 1 - n, n - 1 \rrbracket$. Finalement :

$$c_{i,j} = \begin{cases} n & \text{si } i = j \\ \frac{1 - (\omega^{i-j})^n}{1 - \omega^{i-j}} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et donc $PP^* = n.I_n$. J'en déduis que

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{n}}P \text{ vérifie } U^* = U^{-1} \text{ et } U^*WU = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}).}$$

En effet les vecteurs colonnes de U sont colinéaires à ceux de P et forment donc toujours une base de vecteurs propres de W !

¹ C'est pour cela que je n'ai pas cherché à résoudre *par équivalences* le système correspondant à $w(x) = \lambda x$.

2) a) Soit $M = R(W)$, avec $R(X) = \sum_{k=0}^d \alpha_k X^k$. Alors $M = \sum_{k=0}^d \alpha_k W^k$ et, grâce à l'automorphisme

$$B \mapsto U^{-1}BU$$

$$U^{-1}MU = \sum_{k=0}^d \alpha_k U^{-1}W^kU = \sum_{k=0}^d \alpha_k (U^{-1}WU)^k = \text{diag}(R(1), \dots, R(\omega^{p-1})).$$

En particulier, puisque $U^{-1} = U^*$:

Si $M \in \mathbb{C}[W]$, alors U^*MU est diagonale.

b) Comme deux polynômes en W commutent toujours, en particulier

Tout élément de $\mathbb{C}[W]$ commute avec W .

c) Grâce à l'isomorphisme $u \mapsto M_B(u)$, de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puisque M commute avec W par hypothèse, m commute avec w et donc

Les sous-espaces propres de w sont stables par m .

Comme ces sous-espaces propres sont des droites, j'en déduis que lesdites droites sont dirigées par des vecteurs propres de m . Par conséquent, la matrice de passage U ci-dessus diagonalise également m :

U^*MU est diagonale.

Posons donc $U^*MU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; comme les n valeurs $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ sont distinctes 2 à 2, l'interpolation de Lagrange (ou la résolution d'un système dont le déterminant est de Vandermonde !) me fournit un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ tel que :

$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_j = R(\omega^{j-1})$. Alors, d'après le calcul du a), $U^*R(W)U = U^*MU$, d'où (U^* et U étant inversibles !) $M = R(W)$:

M est élément de $\mathbb{C}[W]$.

Nous venons d'établir deux inclusions réciproques. En conclusion

$\mathbb{C}[W]$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec W .

d) En particulier, avec $R = P$, le calcul du a) donne

$$U^{-1}AU = \text{diag}(P(1), \dots, P(\omega^{p-1})).$$

3) D'après 2)c) et 2)d), $U^*AU = \text{diag}(P(1), \dots, P(\omega^{p-1}))$. Si je transpose et que je conjugue, j'obtiens

$$U^*A^*U = \text{diag}(\overline{P(1)}, \dots, \overline{P(\omega^{p-1})}).$$

Il en résulte que $A^* = A$ si et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \overline{P(\omega^k)} = P(\omega^k),$$

c'est-à-dire si et seulement si les valeurs propres de A sont réelles, autrement dit

Les racines de Q sont réelles si et seulement si $A^* = A$.

Partie II : application aux équations algébriques de degré 3

1) Le polynôme caractéristique de la matrice A donné dans l'énoncé se calcule immédiatement :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -b & -c \\ -c & x & -b \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x^3 - 3bcx - c^3 - b^3$$

d'où

$$Q = \chi_A \text{ si et seulement si } \begin{cases} b^3 + c^3 = -q \\ 3bc = -p \end{cases}.$$

Analyse : supposons que $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ soit solution du système ci-dessus ; alors je connais la somme $(-q)$ et le produit $(-p^3/27)$ des deux complexes u^3 et v^3 : (u^3, v^3) est nécessairement un système de racines du polynôme du second degré $X^2 + qX - p^3/27$; soit donc (β, γ) un système de racines de ce polynôme et b, bj, bj^2 les racines cubiques dans \mathbb{C} de β (distinctes et non nulles car $\beta \neq 0$, puisque $p \neq 0$). Soit alors $c = -p/(3b)$. Quitte à échanger u et v , u est nécessairement l'une des trois valeurs suivantes :

- $u = b$, auquel cas $v = -p/(3b) = c$;
- $u = bj$, auquel cas $v = -p/(3bj) = cj^2$;
- $u = bj^2$, auquel cas $v = -p/(3bj^2) = cj$;

Synthèse : soit donc (β, γ) un système de racines du polynôme $X^2 + qX - p^3/27$, b une racine cubique de β et $c = -p/(3b)$. Si (u, v) est l'un des triplets (b, c) , (bj, cj^2) , (bj^2, cj) , je vérifie bien que $u^3 + v^3 = \beta + \gamma = -q$ et $3uv = -p$.

Le système admet, à l'ordre des composantes près, trois solutions de la forme (b, c) , (bj, cj^2) , (bj^2, cj) .

2) J'ai (c'est un cas particulier du I)

$A = bW + cW^2$; les racines de Q sont $b + c$, $bj + cj^2$, $bj^2 + cj$.

3) a) On a vu au I.3) que les racines de Q sont réelles si et seulement si $A^* = A$, soit :

Les racines de Q sont réelles si et seulement si $c = \bar{b}$.

b) b, c sont conjugués si et seulement si b^3, c^3 le sont ! Or (b^3, c^3) est un système de racines de $X^2 + qX - p^3/27$, polynôme du second degré à coefficients réels, dont les racines sont deux complexes conjugués si et seulement si son discriminant est négatif ou nul (deux racines complexes non réelles conjuguées, ou une racine réelle double égale à son conjugué !). Or ce discriminant vaut $q^2 + 4p^3/27$, du signe de $4p^3 + 27q^2$. Finalement

Les racines de Q sont réelles si et seulement si $4p^3 + 27q^2 \leq 0$.

4) Exemple : ici $p = -2$ et $q = -12$; un système de racines de $X^2 - 12X + 8/27$ est $\left(6 + \frac{2}{9}\sqrt{723}, 6 - \frac{2}{9}\sqrt{723}\right)$; d'où :

Les racines de $X^3 - 2X - 12$ sont $b + c$, $bj + cj^2$, $bj^2 + cj$, où $b = \sqrt[3]{6 + \frac{2}{9}\sqrt{723}}$ et $c = \frac{2}{3b}$.

Ici $4p^3 + 27q^2 > 0$, on trouve comme prévu une racine réelle $(b+c)$ et deux racines complexes conjuguées.

5) Calculons :

$$P(X+t) = (X+t)^3 + \alpha(X+t)^2 + \beta(X+t) + \gamma = X^3 + (3t+\alpha)X^2 + (3t^2 + 2\alpha t + \beta)X + t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

Il apparaît que $Q(X) = P\left(X - \frac{\alpha}{3}\right)$ est de la forme $X^3 + pX + q$, dont on sait calculer les racines, d'après ce qui précède. On en déduit les racines de P , en ajoutant $-\frac{\alpha}{3}$ à celles de Q .

On notera que c'est la même idée qui a permis de résoudre les équations du second degré. . .

Autre remarque culturelle : les formules établies dans cette partie sont connues sous le nom de *formules de CARDAN* (Gerolamo CARDANO, Pavie 1501 – Rome 1576). Ces formules permettent d'écrire à l'aide de radicaux les racines de n'importe quelle équation algébrique de degré 3.

Ludovico FERRARI, disciple de CARDAN, en déduira en 1540 la résolution par radicaux des équations algébriques de degré 4. Il faudra attendre le XIX^e siècle et les théories initiées par Évariste GALOIS (avant sa mort en duel en 1832, à l'âge de 21 ans...) pour montrer que cette résolution par radicaux est impossible en général pour les équations de degré supérieur ou égal à 5 !

Problème B

Partie I

1) Soit $k = \dim F$. On prend une base de F , qu'on complète en une base de \mathbb{K}^n . F étant stable par u la matrice de u dans cette base est de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où A est la matrice de u dans la base choisie de F . On a alors : $\chi_u(x) = \det \begin{pmatrix} xI_k - A & -B \\ 0 & xI_{n-k} - C \end{pmatrix} = \det(xI_k - A) \det(xI_{n-k} - C)$ et $\chi_v(x) = \det(xI_k - A)$. Conclusion :

χ_v divise χ_u .

- 2) $F_u(x)$ est une partie de \mathbb{K}^n , non vide (car $\mathbb{K}[X] \neq \emptyset$!), stable par combinaisons linéaires : si $y = P(u)(x)$ et $z = Q(u)(x)$ sont deux vecteurs de $F_u(x)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, j'ai :

$$\lambda y + z = (\lambda P + Q)(u)(x) \in F_u(x).$$

Ainsi, $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n et, si $y \in F_u(x)$, je dispose de P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$. Alors $u(y) = Q(u)(x)$ avec $Q(X) = XP(X)$. Donc $u(y) \in F_u(x)$. Conclusion :

$$\boxed{F_u(x) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}^n, \text{ stable par } u.}$$

- 3) a) La famille $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ comporte $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n , donc est liée : l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} / (x, u(x), \dots, u^k(x)) \text{ liée}\}$ n'est pas vide. Il est inclus dans \mathbb{N} donc admet un plus petit élément q , et $q \leq n$. ($x \neq 0$ donc (x) est libre : $q \geq 1$)

- b) $(x, u(x), \dots, u^q(x))$ est liée : soit donc $(a_0, \dots, a_q) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=0}^q a_k \cdot u^k(x) = 0$. Je pose

$$\text{alors } S(X) = \sum_{k=0}^q a_k \cdot X^k, \text{ ainsi : } \sum_{k=0}^q a_k \cdot u^k = S(u) \text{ et donc } S(u)(x) = 0. \text{ Si } a_q \text{ était nul il resterait}$$

$$\sum_{k=0}^{q-1} a_k \cdot u^k(x) = 0 \text{ avec } (a_0, \dots, a_{q-1}) \neq (0, \dots, 0), \text{ ce qui est faux car la famille } (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)) \text{ est libre par définition de } q. \text{ Donc}$$

$$\boxed{a_q \neq 0.}$$

Par suite : $u^q(x) \in \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ et, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^{q+k}(x) \in \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)).$$

Finalement : $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad y = P(u)(x) \in \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ donc la famille est génératrice. Elle est libre, donc

$$\boxed{(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)) \text{ est une base de } F_u(x).}$$

- c) J'ai, avec les notations de l'énoncé : $u^q(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 u(x) - \dots - \alpha_{q-1} u^{q-1}(x)$. La matrice de v dans la base $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & 0 & -\alpha_{q-2} \\ (0) & & & 1 & -\alpha_{q-1} \end{pmatrix} \quad \text{d'où, pour } \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda I_q - M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & & \vdots & \alpha_1 \\ & -1 & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & \lambda & \alpha_{q-2} \\ (0) & & & -1 & \lambda + \alpha_{q-1} \end{pmatrix}.$$

Je calcule (habilement) $\chi_v(\lambda)$ grâce à l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^q \lambda^{i-1} \cdot L_i$:

$$\chi_v(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \\ -1 & \lambda & & \vdots & \alpha_1 \\ & -1 & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & \lambda & \alpha_{q-2} \\ (0) & & & -1 & \lambda + \alpha_{q-1} \end{vmatrix} = (-1)^{q+1} P(\lambda) (-1)^{q-1} = P(\lambda)$$

en développant par rapport à la première ligne, avec

$$P(\lambda) = \alpha_0 + \sum_{i=2}^{q-1} \lambda^{i-1} \cdot \alpha_{i-1} + \lambda^{q-1} (\lambda + \alpha_{q-1}) = \sum_{k=0}^q \alpha_k \cdot \lambda^k \quad (\text{puisque } \alpha_q = 1)$$

En particulier :

$$\chi_v(u)(x) = \sum_{k=0}^q \alpha_k \cdot u^k(x) = \frac{1}{\alpha_q} \sum_{k=0}^q a_k \cdot u^k(x) = 0.$$

On a vu que χ_v divise χ_u , donc $\chi_u(X) = Q(X) \cdot \chi_v(X)$ et $\chi_u(u) = Q(u) \circ \chi_v(u)$, par suite : $\chi_u(u)(x) = 0$.

Cela vient d'être prouvé pour tout x non nul de \mathbb{K}^n , mais c'est banal pour $x = 0$! Finalement :

$$\boxed{\chi_u(u) = 0 \text{ (théorème de Cayley-Hamilton !).}}$$

Partie II

1) a) Tous calculs faits,

$$\boxed{\text{Sp } A_0 = \{1, 2\} ; \text{Sp } B_0 = \{0, 1\}.}$$

b) Pour $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$, je trouve :

$$h_{A_0, B_0}(M) = \begin{pmatrix} -2m_{1,1} + m_{1,2} + 2m_{2,1} & -2m_{1,1} + m_{1,2} + 2m_{2,2} \\ -m_{1,1} + m_{2,1} + m_{2,2} & -m_{1,2} - 2m_{2,1} + 4m_{2,2} \end{pmatrix}$$

d'où, le système des coordonnées de M dans \mathcal{B} étant $(m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2})$:

$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.}$$

(J'ai ici reconnu l'expression analytique de h_{A_0, B_0} ; on peut aussi expliciter les images des éléments de \mathcal{B} .)

Il vient : $\chi_{H_0}(X) = X(X-2)(X-1)^2$, donc $\text{Sp } H_0 = \{0, 1, 2\}$ et je vérifie bien :

$$\boxed{\text{Sp } H_0 = \{0, 1, 2\} = \{a - b, (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A_0 \times \text{Sp}_{\mathbb{C}} B_0\}}$$

c) A_0 et B_0 , d'ordre 2, ont 2 valeurs propres distinctes donc sont diagonalisables. Pour H_0 , les sous-espaces propres associés aux valeurs propres simples 0 et 2 sont de dimension 1 et

$$(H_0 - I_4) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -2x + 2t = 0 \\ -x + t = 0 \\ -y - 2z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}.$$

($L_2 = 2L_3$ et $L_4 = L_2 + L_3 - L_1$). Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 2, donc H_0 est diagonalisable. Finalement :

$$\boxed{A_0, B_0 \text{ et } H_0 \text{ sont diagonalisables.}}$$

2) Si b est valeur propre de B , alors elle est aussi valeur propre de ${}^t B$ (puisque $\chi_{{}^t B} = \chi_B$). Je dispose donc de V non nul dans \mathbb{C}^n tel que $AV = a.V$ et de W non nul dans \mathbb{C}^n tel que ${}^t B W = b.W$, d'où en transposant : ${}^t W B = b.{}^t W$. Alors :

$$\tilde{h}_{A,B}(V {}^t W) = AV {}^t W - V {}^t W B = a.V {}^t W - b.V {}^t W = (a - b).V {}^t W$$

et $V {}^t W \neq 0_n$ (en effet, si je note v_i les composantes de V et w_j celles de W , alors $V {}^t W$ est la matrice $(v_i w_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ et il existe au moins un couple (i, j) tel que $v_i \neq 0$ et $w_j \neq 0$) ; par conséquent, $a - b$ est valeur propre de $\tilde{h}_{A,B}$, d'où l'inclusion souhaitée :

$$\boxed{\{a - b, (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A \times \text{Sp}_{\mathbb{C}} B\} \subset \text{Sp } \tilde{h}_{A,B} .}$$

3) Soit P (resp. Q) la matrice de passage de la base canonique à la base (X_1, \dots, X_n) (resp. (Y_1, \dots, Y_n)). On a : $X_i = PC_i$, où C_i est la colonne nulle sauf un 1 en position i , et $Y_j = QC_j$ donc

$$X_i {}^t Y_j = PC_i {}^t C_j {}^t Q = PE_{i,j} {}^t Q$$

où les matrices $E_{i,j}$ constituent la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi, la famille $(X_i {}^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est l'image de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ par l'automorphisme $M \mapsto PM {}^t Q$ (clairement linéaire et injectif, donc bijectif !). Il en résulte que

$$\boxed{(X_i {}^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est une base de } M_n(\mathbb{R}) .}$$

On suppose A et B diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$: soit donc (V_i) (resp. (W_j)) une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A (resp. B). Alors la famille $(V_i {}^t W_j)$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ d'après le résultat précédent, formée de vecteurs propres de $h_{A,B}$ (reprendre dans \mathbb{R} le calcul du 2)). Par conséquent,

$$\boxed{h_{A,B} \text{ est diagonalisable.}}$$

Plus précisément, si je note a_i (resp. b_j) la valeur propre associée à V_i (resp. W_j), le calcul précédent montre que $V_i^t W_j$ est vecteur propre associé à la valeur propre $a_i - b_j$. Or la trace de $h_{A,B}$ est la somme de ces valeurs propres :

$$\text{Tr } h_{A,B} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i - b_j) = n \sum_{i=1}^n a_i - n \sum_{j=1}^n b_j,$$

autrement dit :

$$\boxed{\text{Tr } h_{A,B} = n \cdot (\text{Tr } A - \text{Tr } B).}$$

4) Avec les notations de l'énoncé : $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ d'où $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^n (B - a_k I_n)$ et

$$\det \chi_A(B) = \prod_{k=1}^n \det(B - a_k I_n). \text{ Par suite :}$$

$$\det \chi_A(B) \neq 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \det(B - a_k I_n) \neq 0 \Leftrightarrow \forall a \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A \quad a \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}} B$$

Autrement dit :

$$\boxed{\chi_A(B) \text{ est inversible si et seulement si } \text{Sp}_{\mathbb{C}} A \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}} B = \emptyset.}$$

5) a) Par hypothèse : $AM - MB = \lambda M$, soit : $A \times M = M \times (B + \lambda I_n)$. D'où (récurrence simple) : pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k \times M = M \times (B + \lambda I_n)^k$ (banal pour $k = 0$!) et par linéarité :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad P(A) \times M = M \times P(B + \lambda I_n).}$$

b) En particulier si on prend $P = \chi_A$, on a : $\chi_A(A) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton !), donc $M \times \chi_A(B + \lambda I_n) = 0_n$, ce qui implique que $\chi_A(B + \lambda I_n)$ n'est pas inversible (sinon M serait nulle ce qui est faux).

$$\boxed{\chi_A(B + \lambda I_n) \text{ est non inversible.}}$$

c) D'après 4), j'en déduis que A et $B + \lambda I_n$ ont une valeur propre commune, soit a :

$$\det(B + \lambda I_n - a I_n) = 0 \text{ donc } b = a - \lambda \text{ est valeur propre de } B \text{ et } \lambda = a - b.$$

Ainsi $\lambda \in \{a - b, (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A \times \text{Sp}_{\mathbb{C}} B\}$ et je viens de prouver cela pour tout $\lambda \in \text{Sp } \tilde{h}_{A,B}$; une première inclusion ayant été établie au 2), je conclus :

$$\boxed{\text{Sp } \tilde{h}_{A,B} = \{a - b, (a, b) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A \times \text{Sp}_{\mathbb{C}} B\}}$$

6) Il existe M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$ si et seulement si $\text{Ker } \tilde{h}_{A,B} \neq \{0\}$, autrement dit si et seulement si $0 \in \text{Sp } \tilde{h}_{A,B}$ ou encore, d'après ce qui précède, si et seulement si

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}} A \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}} B \neq \emptyset.}$$

7) a) Soit $u_{i,j}$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont $M_{i,j}$ est la matrice dans la base canonique. La matrice de $u_{i,j}$ dans la base (V_1, \dots, V_n) est $E_{i,j}$, ce qui définit entièrement $u_{i,j}$ donc $M_{i,j}$. De plus

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \quad \lambda_{i,j} = 0.$$

Donc la famille $(M_{i,j})$ est libre, formée de n^2 matrices :

$$\boxed{(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b) On a : $AV_k = \lambda_k V_k$ et $M_{i,j} V_k = \delta_{j,k} V_i$ d'où

$$h_A(M_{i,j}) V_k = AM_{i,j} V_k - M_{i,j} AV_k = \delta_{j,k} AV_i - \lambda_k M_{i,j} V_k = \delta_{j,k} \lambda_i V_i - \lambda_k M_{i,j} V_k = (\lambda_i - \lambda_k) M_{i,j} V_k$$

Or $M_{i,j} V_k = \delta_{j,k} V_i$ et, pour tout (i, j, k) ,

$$(\lambda_i - \lambda_k) \cdot \delta_{j,k} = (\lambda_i - \lambda_j) \cdot \delta_{j,k} \quad \left(= \begin{cases} \lambda_i - \lambda_j & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \right)$$

J'ai donc bien :

$$\boxed{\forall (i, j, k) \in \mathbb{N}_n^3 \quad h_A(M_{i,j}) V_k = (\lambda_i - \lambda_j) M_{i,j} V_k}$$

Pour (i, j) fixé, je viens de voir que les endomorphismes de matrices $h_A(M_{i,j})$ et $(\lambda_i - \lambda_j) M_{i,j}$ coïncident sur la base (V_k) , donc : $h_A(M_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j) M_{i,j}$.

De plus $M_{i,j} \neq 0$, puisque $M_{i,j}V_j = V_j$. Ainsi :

$$\boxed{M_{i,j} \text{ est vecteur propre de } h_A.}$$

c) La matrice de h_A dans la base des $(M_{i,j})$ est diagonale, avec sur la diagonale $\lambda_i - \lambda_j$. $\text{Ker } h_A$ est engendré par les matrices $M_{i,j}$ pour lesquelles $\lambda_i = \lambda_j$, c'est à dire pour $(i, j) \in J$:

$$\boxed{\text{Ker } h_A = \text{Vect} \{M_{i,j}, (i, j) \in J\}.}$$

Les $J_k = \{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2 / \lambda_i = \lambda_j = \mu_k\}$ forment une partition de J et $\text{Card } J_k = m_k^2$. Comme les $M_{i,j}$ forment une famille libre, j'en déduis que

$$\boxed{\dim \text{Ker } h_A = \sum_{k=1}^p m_k^2.}$$

d) De $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ et $m_k \geq 1$ donc $m_k^2 \geq m_k$, je déduis : $\dim \text{Ker } h_A \geq n$. On a égalité si et seulement si $\forall k \quad m_k^2 = m_k$ c'est à dire $\forall k \quad m_k = 1$ (car $m_k \neq 0$!) ce qui signifie que $p = n$ et que les valeurs propres de A sont toutes distinctes.

e) A est supposée semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux d_k sont tous distincts. Alors :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 I_n + \lambda_1 D + \dots + \lambda_{n-1} D^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \forall k \quad \lambda_0 + \lambda_1 d_k + \dots + \lambda_{n-1} d_k^{n-1} = 0$$

Donc, si $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0$, le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ est de degré au plus $n - 1$ et admet n racines distinctes, donc est nul, donc tous les λ_i sont nuls. En conclusion, la famille (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est libre. C'est une famille d'éléments de $\mathbb{R}[A]$, donc $\text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) \subset \mathbb{R}[A]$; enfin, $\mathbb{R}[A] \subset \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$: pour $P \in \mathbb{R}[X]$, j'écris la division euclidienne de P par χ_A , $P = \chi_A \times Q + R$, avec $\deg R < n$, et, grâce au théorème de Cayley-Hamilton, $P(A) = R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$. Finalement :

$$\boxed{(I_n, A, \dots, A^{n-1}) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A].}$$

Remarquons enfin que $\mathbb{R}[A] \subset \text{Ker } h_A$ (tous les polynômes en A commutent avec A). Or je viens de voir que ces deux espaces vectoriels sont de dimension n , j'ai donc l'égalité :

$$\boxed{\text{Ker } h_A = \mathbb{R}[A].}$$

8) h_A étant diagonalisable, ses valeurs propres sont réelles. Si A , considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, n'admettait que des valeurs propres complexes non réelles, 2 à 2 conjuguées, alors pour $a \in \text{Sp}_{\mathbb{C}} A$, $a - \bar{a}$ serait valeur propre de h_A (cf. 2)) ce qui est faux puisque $a - \bar{a} \notin \mathbb{R}$. Donc A admet au moins une valeur propres réelle λ . Pour tout vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $UX = Y$ (compléter X pour obtenir une base de \mathbb{R}^n et définir U par l'image de cette base ...). $(P_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, je dispose donc d'une famille $(\alpha_{i,j})$ telle que

$$U = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_{i,j} \quad \text{d'où} \quad Y = UX = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_{i,j} X.$$

Donc

$$\boxed{\text{La famille } (P_{i,j} X) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^n.}$$

Je peux en extraire une base. Pour chaque vecteur $P_{i,j} X$ de cette base, j'ai

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad AP_{i,j} X - P_{i,j} AX = \lambda_{i,j} P_{i,j} X$$

d'où $AP_{i,j} X = (\lambda + \lambda_{i,j}) P_{i,j} X$, donc les vecteurs $P_{i,j} X$ sont vecteurs propres de A , qui possède ainsi une base de vecteurs propres :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

On a ainsi prouvé l'équivalence entre la diagonalisabilité de A et celle de h_A .

J'aimais — et j'aime encore — les mathématiques pour elles-mêmes, comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.