T.D. 01 – Compléments d'algèbre linéaire

1. © Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si $u(x)$ est colinéaire à x pour tout x de E, alors u est de la forme $\lambda.\mathrm{Id}_E$.

2. © Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v \ ; \quad \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u) \ ; \quad \operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v.$$

3. © Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$ et $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1} \Rightarrow \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^{k+2}$.

b) Énoncer et prouver des propriétés analogues concernant les images.

4. © Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $k \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$ (u est dit *nilpotent d'indice* k).

a) Soit $a \in E$; montrer que $\left(a, u(a), u^2(a), \ldots, u^{k-1}(a)\right)$ est libre si et seulement si $u^{k-1}(a) \neq 0$.

b) Montrer que l'on a les inclusions *strictes* : $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k-1} \subsetneq E$.

c) Montrer que, si E est de dimension finie n, alors $k \leq n$ (et donc $u^n = 0$).

5. Soient p, q projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Lorsque c'est le cas, déterminer $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q)$.

6. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et A, B deux sous-espaces de E. Montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \operatorname{Ker} f \subset B + \operatorname{Ker} f.$$

7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\begin{cases} \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\} \\ \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u = E \end{cases}$.
Que dire si E est de dimension finie ? Contre-exemple si E n'est pas de dimension finie.

8. © Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Établir que, pour tout sous-espace vectoriel E' de E,

$$\dim u(E') = \dim E' - \dim(E' \cap \operatorname{Ker} u).$$

9. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f, g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$f + g = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq \dim E.$$

Montrer que f et g sont des projecteurs.

10. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. M étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = M$, montrer que, pour $p \in \mathbb{N}$, $(I+M)^p$ s'exprime comme combinaison linéaire de I et de M. En déduire les puissances de $\begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

12. © Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F' (resp. G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (resp. G). Montrer que : $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$.

13. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 = f^2 + 2f$; on pose

$$E_1 = \operatorname{Ker} f \ ; \quad E_2 = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \ ; \quad E_3 = \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)\,.$$

Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$; exprimer f, puis f^k (pour $k \in \mathbb{N}$) en fonction de p_1, p_2, p_3, projecteurs associés à cette décomposition.

14. *Matrices de transvection et applications* : soit $n \geq 2$ et $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que, si i, j sont distincts dans $\mathbb{N}_n$ et α scalaire, $I_n + \alpha.E_{i,j} \in GL_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des matrices inversibles.

c) Montrer que : $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \forall M \in GL_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA\} = \mathbb{K}.I_n$.

15. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $S(M) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} m_{j,i}$. Montrer que, si A et B sont semblables, $S(A) = S(B)$.

16. © Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

Montrer que H peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne.

En déduire que $H^2 = \operatorname{Tr}(H).H$.

17. © Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et, pour z dans $\mathbb{C}$, $A(z) = (a_{i,j} + z)$.

Montrer que la fonction $z \mapsto \det A(z)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

Application : pour a, b, c dans $\mathbb{C}$, calculer le déterminant d'ordre n $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & \cdots & c & a & b \\ c & \cdots & \cdots & c & a \end{vmatrix}$.

18. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} (0) & & a_n \\ & \diagup & \\ a_1 & & (0) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

19. Soient p, q dans $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad (-x)^q \det(AB - xI_p) = (-x)^p \det(BA - xI_q)$$

(on pourra multiplier la matrice $\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}$ *par des matrices bien choisies).*

20. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Calculer $\det M$ en fonction de $\det A$ et de $\det B$.

21. Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que, si C et D commutent, alors $\det M = \det(AD - BC)$ *(on pourra commencer par le cas où D est inversible, en multipliant M par une matrice "sympathique", également définie par blocs).*

Établir un résultat analogue dans le cas où B et D commutent.

Étudier le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.