Algèbre linéaire (corrigé niveau 3).

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

92. a. Classiquement, ils sont inclus dans E, stables par combinaison linéaire et contiennent tous trois la fonction nulle.

b. Soit f une fonction dans E.

Si f se décompose suivant ces trois espaces en : $f = f^+ + f^- + f_0$, alors :

$\forall\ x \geq 0,\ f(x) = f^+(x) + f^-(x) + f_0(x) = f^+(x) + f_0(x)$,

$\forall\ x \leq 0,\ f(x) = f^+(x) + f^-(x) + f_0(x) = f^-(x) + f_0(x)$,

et en particulier : $f(0) = f_0(0)$, ce qui donne f_0, puis :

$\forall\ x \geq 0,\ f(x) = f^+(x) + f_0(0)$, d'où : $f^+(x) = f(x) - f_0(0)$, et de même :

$\forall\ x \leq 0,\ f^-(x) = f(x) - f_0(0)$.

Réciproquement, les trois fonctions définies par :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f_0(0) = f(0)$,

$\forall\ x \geq 0,\ f^+(x) = f(x) - f_0(0)$, et : $\forall$ x < 0, $f^+(x) = 0$,

$\forall\ x \leq 0,\ f^-(x) = f(x) - f_0(0)$, et : $\forall$ x > 0, $f^-(x) = 0$,

conviennent.

En effet :

- f_0 est évidemment constante,
- f^+ est nulle sur $\mathbb{R}^-$* ainsi qu'en 0, car : $f^+(0) = f(0) - f_0(0) = 0)$,

Elle est continue sur $\mathbb{R}^+$* et $\mathbb{R}^-$*, et en 0, puisque :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f^+(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} 0 = 0 = f^+(0)$, et : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f^+(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 0 = f(0) - f_0(0) = 0$, car f est continue.

Donc f^+ est bien dans E^+.

- De même, f^- est bien dans E^-.
- Enfin on a évidemment : $f = f^+ + f^- + f_0$, en le vérifiant immédiatement pour tout réel x.

Finalement, on a bien : $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$.

93. Il est immédiat que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $C^0([-1,1],\mathbb{C})$.

Si maintenant h est un élément de $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$, s'écrivant : $h = f + g$, avec : $f \in F$, $g \in G$, alors :

$\int_{-1}^{+1} h(t).dt = \int_{-1}^{+1} f(t).dt + \int_{-1}^{+1} g(t).dt = 0 + 2.C$, où C est la valeur constante de g sur [-1,+1].

Donc : $C = \frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt$, puis : $\forall\ x \in$ [-1,+1], $f(x) = h(x) - C$.

Réciproquement, si on pose : $\forall\ x \in$ [-1,+1], $g(x) = \frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt$, puis : $f(x) = h(x) - \frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt$,

alors on a : $h = f + g$, g est constante sur [-1,+1], et :

$\int_{-1}^{+1} f(t).dt = \int_{-1}^{+1} h(t).dt - 2.\frac{1}{2}.\int_{-1}^{+1} h(t).dt = 0$, d'où : $f \in F$.

Finalement, F et G sont bien supplémentaires dans $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$.

94. F et G sont évidemment des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Puis si (u_n) est un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, s'écrivant : $(u_n) = (f_n) + (g_n)$, avec : $(f_n) \in F$, $(g_n) \in G$, alors :

- $u_0 = g_0$, $u_1 = g_1$, et (g_n) est ainsi entièrement déterminée.

Pour mémoire (mais ça n'est pas nécessaire ici) les éléments de G s'écrivent :

$\forall\ (a_n) \in G$, $(a_n) = \beta.(4^n) + \beta.(1)$, puisque 4 et 1 sont les racines de l'équation caractéristique associée.

D'où les constantes pour la suite (g_n) précédente qui valent : $\alpha = \dfrac{u_1 - u_0}{3}$, $\beta = \dfrac{4.u_0 - u_1}{3}$.

• Puis : $(f_n) = (u_n) - (g_n)$.

Réciproquement, la suite (g_n) ainsi trouvée est dans G, on a bien : $(u_n) = (f_n) + (g_n)$, et :

$f_0 = u_0 - g_0 = 0$, $f_1 = u_1 - g_1 = 0$, et : (f_n) $\in F$.

Finalement, F et G sont bien supplémentaires dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Applications linéaires, projecteurs.

95. a. Puisque f^{p-1} est non nul, il existe x dans E tel que : $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Montrons alors que la famille ($x, f(x), ..., f^{p-1}(x)$) est libre.

Soit pour cela : $a_0.x + a_1.f(x) + ... + a_{p-1}.f^{p-1}(x) = 0$.

En prenant l'image de cette combinaison linéaire par f^{p-1}, on obtient : $a_0.f^{p-1}(x) + 0 = 0$, et : $a_0 = 0$.

Puis par récurrence, on montre que : $\forall\ 0 \leq k \leq p-1$, $a_k = 0$, en composant par f^{p-1-k}, les combinaisons linéaires obtenues de proche en proche.

Donc la famille proposée est bien libre.

b. Le nombre de vecteurs de cette famille (de vecteurs libres) vérifie donc : $p \leq n$.

Puis : $f^n = f^p o f^{n-p} = 0 o f^{n-p} = 0$.

96. a. Immédiatement : $\varphi = D^2 - 3.D + 2.id_E = (D - id_E) o (D - 2.id_E)$.

b. • Soit : $f \in \ker(D - id_E) \cap \ker(D - 2.id_E)$.

Alors : $D(f) = f$, et : $D(f) = 2.f$, soit : $f = 2.f$, et donc : $f = 0$.

La somme des deux noyaux est donc directe.

• Soit : $f \in \ker(D - id_E)$

Alors : $\varphi(f) = (D^2 - 3.D + 2.id_E)(f) = (D - 2.id_E)((D - id_E)(f)) = (D - 2.id_E)(0) = 0$,

de même : $\forall\ f \in \ker(D - 2.id_E)$, $\varphi(f) = 0$,

d'où : $\ker(D - id_E) \oplus \ker(D - 2.id_E) \subset \ker(\varphi)$.

• Soit enfin : $f \in \ker(\varphi)$.

Si on peut trouver : $(f_1, f_2) \in \ker(D - id_E) \times \ker(D - 2.id_E)$, tel que : $f = f_1 + f_2$, alors :

$D(f) = D(f_1) + D(f_2) = f_1 + 2.f_2$.

D'où : $f_2 = D(f) - f$, et : $f_1 = 2.f - D(f)$.

On vérifie alors que :

- $f_1 + f_2 = f$,
- $(D - 2.id_E)(f_2) = (D - 2.id_E) o (D - id_E)(f) = \varphi(f) = 0$, et de même :
- $(D - id_E)(f_1) = 0$.

Donc on vient de montrer que : $\ker(\varphi) \subset \ker(D - id_E) \oplus \ker(D - 2.id_E)$, et finalement l'égalité.

c. Puisque : $\ker(D - id_E) = \{x \mapsto \alpha.e^x,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, et : $\ker(D - 2.id_E) = \{x \mapsto \beta.e^{2.x},\ \beta \in \mathbb{R}\}$, on en déduit que $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions s'écrivant : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \alpha.e^x + \beta.e^{2.x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

97. Notons (i) et (ii) les deux propositions (dans cet ordre).

Il est immédiat avec le théorème du rang que : (i) $\Rightarrow$ (ii).

Puis soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $\dim(F) + \dim(G) = n$.

Notons ($e_1, ..., e_p$) une base de $F \cap G$, ($e_{p+1}, ..., e_r$) une famille de vecteurs de E telle que ($e_1, ..., e_r$) soit une base de G (autrement dit une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans G) et ($a_{p+1}, ..., a_k$) complétant ($e_1, ..., e_p$) en une base de F.

Soit enfin ($e'_{k+1}, ..., e'_n$) une base complétant celle de F en une base de E.

On a donc : $k = \dim(F)$, $r = \dim(G)$, et : $k + r = n$

On définit alors l'endomorphisme u de E par :

- $\forall\ 1\le i\le p$, $u(e_i)=0$, et : $\forall\ p+1\le i\le k$, $u(a_i)=0$,
- $\forall\ k+1\le i\le r$, $u(e'_i)=e_{i-k}$.

Puisqu'on donne l'image de tous les vecteurs d'une base de E, u est bien défini.
Calculons alors $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Puisque $e'_{k+1},...,e'_n$ ont pour image une famille libre de E, on a : $rg(u)\ge n-k=r$.

De plus $e_1,...,e_p,a_{p+1},...,a_k$ sont dans $\ker(u)$, donc : $rg(u)\le n-k=r$.

Finalement : $rg(u)=n-k=r$.

Puis $\mathrm{Im}(u)$ contient $u(e'_{k+1}),...,u(e'_n)$ autrement dit $e_1,...,e_r$, c'est-à-dire G qui est aussi de dimension r, donc on en déduit que : $\mathrm{Im}(u)=G$.

Enfin $\ker(u)$ est de dimension k et contient F, donc : $\ker(u)=F$.
Autrement dit, on a démontré l'implication réciproque.

98. La bonne formulation de la question serait plutôt : « montrer que l'application de F_2 dans F_1 définie par p est un isomorphisme d'espaces vectoriels ».

Pour démontrer cela, montrons que cette application que l'on va noter p' est injective et surjective.

- Soit : $x\in F_2$, tel que : $p'(x)=0$.

Alors : $p'(x)=p(x)=0$, donc on a aussi : $x\in\ker(p)=E'$, et : $x\in E'\cap F_2$, et : $x=0$.
Donc p' est injective.

- Soit : $y\in F_1$.

Alors on peut écrire : $y=p(y)$, d'une part, et : $y=x_2+x'$, avec : $x'\in E'$, et : $x_2\in F_2$.

On constate alors que : $y=p(y)=p(x')+p(x_2)=p(x_2)=p'(x_2)$, puisque : $x'\in$ E', donc : $p(x')=0$.

Autrement dit : $p'(x_2)=y$, et p' est bien surjective.

Finalement, p' est bien un isomorphisme de F_2 sur F_1.

Remarque : ce résultat généralise le fait que deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel ont même dimension dans un espace de dimension finie.

99. a. On a donc : $\mathrm{Im}(f_0)=\ker(f_1)=\{0\}$, donc f_1 est injective.

De même : $\mathrm{Im}(f_n)=\ker(f_{n+1})=E_n$, donc f_n est surjective.

b. Soit k un entier donné entre 1 et n.

Alors : $\dim(\ker(f_k))+\dim(\mathrm{Im}(f_k))=\dim(E_{k-1})$, soit : $\dim(\ker(f_k))+\dim(\ker(f_{k+1}))=\dim(E_{k-1})$.

On en déduit que : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\dim(E_k)=(-1)^n.\dim(E_n)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.[\dim(\ker(f_{k+1}))+\dim(\ker(f_{k+2}))]$.

D'où : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\dim(E_k)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.\dim(\ker(f_{k+1}))-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.\dim(\ker(f_{k+1}))+(-1)^n.\dim(E_n)$,

soit finalement : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\dim(E_k)=\dim(\ker(f_1))-(-1)^n.\dim(\ker(f_{n+1}))+(-1)^n.\dim(E_n)=0$.

c. Considérons les 4 applications linéaires :

f_0 de {0} dans $F\cap G$, définie par : $f_0=0$,

f_1 de $F\cap G$ dans $F\times G$, définie par : $\forall\ x\in F\cap G$, $f_1(x)=(x,-x)$,

f_2 de $F\times G$ dans F+G, définie par : $\forall\ (x,y)\in F\times G$, $f_2((x,y))=x+y$,

f_3 de $F+G$ dans {0}, définie par : $f_3=0$.

Alors la suite ainsi construite est exacte puisque :

- f_1 est injective de façon immédiate, et donc : $\mathrm{Im}(f_0)=\ker(f_1)=\{0\}$,
- $\ker(f_2)=\mathrm{Im}(f_1)$, car : $\forall$ (x,y) $\in F\times G$,

($f_2((x,y))=0$) $\Leftrightarrow$ ($x+y=0$) $\Leftrightarrow$ ($y=-x$, avec : $x\in F\cap G$) $\Leftrightarrow$ ($(x,y)=(x,-x)$, $x\in F\cap G$),

$\Leftrightarrow$ ($(x,y)\in\mathrm{Im}(f_1)$).

- $\ker(f_3) = F + G = \mathrm{Im}(f_2)$, de façon immédiate.

On en déduit que : $(-1)^0.\dim(F \cap G) + (-1)^1.\dim(F \div G) + (-1)^2.\dim(F + G) = 0$, ce qui donne :
$\dim(F \cap G) + \dim(F + G) = \dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Matrices.

100. Commençons par rappeler les matrices de la base canonique :
ces matrices sont notées $E_{p,q}$, et leur coefficient générique vaut : $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $E_{i,j}^{p,q} = \delta_{i,p}.\delta_{j,q}$.
Soit C maintenant une matrice de $\mathcal{M}_n$(**K**).
Si on note : $C' = E_{p,q}.C$, et : $C'' = C.E_{p,q}$, alors :
$$\forall\ 1 \leq i, j \leq n,\ c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}.E_{k,j}^{p,q} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}.\delta_{k,p}.\delta_{j,q} = c_{i,p}.\delta_{j,q},$$
autrement dit toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne q dont les coefficients valent : $c'_{i,q} = c_{i,p}$.
De même : $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $c''_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}^{p,q}.c_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,p}.\delta_{k,q}.c_{k,j}. = \delta_{i,p}.c_{q,j}$,
autrement dit toutes les lignes sont nulles sauf la ligne p qui vaut : $c''_{p,j} = c_{q,j}$.
Si maintenant on suppose que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n$(**K**), $X.C = C.X$, alors : $\forall\ 1 \leq p, q \leq n$, $E_{p,q}.C = C.E_{p,q}$.
Les matrices précédentes sont donc égales et leurs éléments sont tous nuls sauf celui se trouvant à l'intersection de la p ème ligne et de la q ème colonne, soit :
- $c_{p,p} = c'_{p,q} = c''_{p,q} = c_{q,q}$,
- $\forall\ 1 \leq i \neq p \leq n$, $c_{i,p} = 0$,
- $\forall\ 1 \leq j \neq q \leq n$, $c_{q,j} = 0$.

Finalement, tous les coefficients de la matrice C en dehors de la diagonale sont nuls et ceux de la diagonale sont égaux entre eux, ce qui se résume en : $\exists\ \lambda \in$ **K**, $C = \lambda.I_n$.
Réciproquement, la matrice $\lambda.I_n$ commute avec toute matrice X de $\mathcal{M}_n$(**K**), pour toute valeur λ.
Conclusion : le centre de $\mathcal{M}_n$(**K**) est l'ensemble $\{C = \lambda.I_n,\ \lambda \in$ **K**$\}$.

101. Puisque A est une matrice de rang r, on sait qu'il existe deux matrices inversibles de tailles respectives $p \times p$ et $q \times q$, notées P et Q telles que : $A = P.\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.Q = P.\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}.Q$.
Si maintenant on note : $B = P.\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$, et : $C = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}.Q$, alors : $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, et : $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$.
Evidemment, on a aussi : $A = B.C$.

102. Remarquons tout d'abord qu'une matrice nilpotente est non inversible car :
$\forall\ N \in \mathcal{M}_n$(**K**), ($\exists\ p \in \mathbb{N}^*$, $N^p = 0$) $\Rightarrow$ ($(\det(N))^p = 0$) $\Rightarrow$ ($\det(N) = 0$).
• Pour : $n = 1$, la seule matrice nilpotente est la matrice nulle qui est bien semblable (en fait égale) à une matrice triangulaire supérieure stricte.
• Soit : $n \geq 1$, tel que le résultat soit supposé vrai et soit : $N \in \mathcal{M}_{n+1}$(**K**), nilpotente.
Alors : $\exists\ p \in \mathbb{N}^*$, $N^p = 0$.
Si on appelle f l'endomorphisme de **K**$^{n+1}$ canoniquement associé à N, f n'est pas bijectif, donc pas injectif, et on peut considérer un vecteur e_1 non nul dans $\ker(f)$.
On complète alors ce vecteur e_1 en une base $(e_1, ..., e_{n+1})$ de **K**$^{n+1}$.
La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est la matrice par blocs : $A = mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0_{n,1} & N' \end{pmatrix}$.
Les matrices A et N sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphismes dans deux bases différentes de **K**$^{n+1}$.

Donc A est également nilpotentes puisque : $\exists\ P \in \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbf{K})$, $A = P^{-1}.N.P$, et : $A^p = P^{-1}.N^p.P = 0$.

Or un calcul par blocs montre que : $A^p = \begin{pmatrix} 0 & L.N'^{p-1} \\ 0_{n,1} & N'^p \end{pmatrix}$, donc : $N'^p = 0$.

Il existe alors : $Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{K})$, et T triangulaire supérieure stricte telle que : $T = Q^{-1}.N'.Q$.

On note alors : $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$, et R est inversible puisque : $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix} = I_{n+1}$.

Enfin : $R^{-1}.A.R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0_{n,1} & N' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0_{n,1} & Q^{-1}.N'.Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0_{n,1} & T \end{pmatrix}$.

Cette dernière matrice étant triangulaire supérieure stricte, A lui est semblable et par transitivité, N lui est également semblable, ce qui termine la récurrence.

103. On peut calculer les liens entre A^{n+1} et A^n, pour tout entier n, avec : $A^{n+1} = A.A^n$.
On en déduit que : $\forall\ n \geq 1$, $a_{n+1} = a.a_n + b.c_n$, $b_{n+1} = a.b_n + b.d_n$, $c_{n+1} = c.a_n + d.c_n$, $d_{n+1} = c.b_n + d.d_n$.
Donc : $a_{n+1} + d_{n+1} - b_{n+1} - c_{n+1} = (a-c).(a_n - b_n) + (b-d).(c_n - d_n)$.
On sait que $(a-c)$ et $(b-d)$ sont positifs, donc il suffit que les deux autres facteurs soient positifs pour obtenir le résultat voulu.
Or : $\forall\ n \geq 1$, $a_{n+1} - b_{n+1} = a.(a_n - b_n) + b.(c_n - d_n)$, et : $c_{n+1} - d_{n+1} = c.(a_n - b_n) + d.(c_n - d_n)$.
Il est alors immédiat par récurrence que pour tout entier : $n \geq 1$, $(a_n - b_n)$ et $(c_n - d_n)$ sont positifs.
Conclusion : $\forall\ n \geq 2$, on a : $b_n + c_n \leq a_n + d_n$.

Trace.

104. a. Puisque : $rg(H) \leq 1$, les colonnes de H sont toutes dans un espace de dimension 1, et en les notant H_j, on peut donc écrire : $\exists\ U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $\exists\ v_j \in \mathbf{K}$, $H_j = v_j.U$.

Si on note alors V la matrice colonne : $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors : $H = U.{}^tV$.

Puis les éléments diagonaux de H valent : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $h_{i,i} = u_i.v_i$, et : $tr(H) = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_i = {}^tU.V$.

Remarque : en fait ${}^tU.V$ est une matrice 1×1 que l'on confond avec l'élément qu'elle contient.

b. On calcule ensuite : $H^2 = U.{}^tV.U.{}^tV = U.(tr(H)).{}^tV = tr(H).H$.

c. On procède par double implication.
[⇐] c'est immédiat avec ce que l'on a montré aux points a et b : $A^2 = tr(A).A = 0$.
[⇒] si on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors : $u^2 = 0$, et : $\mathrm{Im}(u)\ker(u)$.
Dans ce cas : $rg(u) \leq \dim(\ker(u)) = 3 - rg(u)$, d'où : $2.rg(u) \leq 3$, et $rg(u)$ vaut 0 ou 1.
Si : $rg(u) = 0$, alors u (et A) sont nuls, et $tr(A)$ est également nulle.
Si : $rg(u) = 1$, celui de A aussi, et A est non nulle.
Donc dans ce dernier cas, on a : $A^2 = tr(A).A = 0$, et A étant non nulle, on en déduit que : $tr(A) = 0$.

105. Supposons que X et Y sont solutions du problème.
Alors en calculant la trace dans la première égalité, alors : $2.tr(X).tr(Y) = 0$.
Comme ces deux traces ne peuvent être nulles simultanément (toujours d'après la première égalité), et que les deux matrices X et Y sont non nulles (d'après la deuxième égalité), distinguons deux cas :

- si : $tr(X) = 0$, alors : $tr(Y) \neq 0$, d'où : $X = \frac{1}{tr(Y)}.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, et : $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$, $X = \lambda.\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Puis la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ étant inversible, on en déduit que :

$$Y=\frac{1}{\lambda}.\begin{pmatrix}4 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{12.\lambda}.\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{12.\lambda}.\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{4.\lambda}.\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, le couple trouvé convient car :

$$tr(X).Y+tr(Y).X=0.Y+\frac{1}{\lambda}.\lambda.\begin{pmatrix}4 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}, \text{ et : } X.Y=\frac{\lambda}{4.\lambda}.\begin{pmatrix}4 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}.$$

• si : $tr(Y)=0$, alors : $tr(X)\neq 0$, d'où : $\exists\ \mu\in\mathbb{R}^*$, $Y=\mu.\begin{pmatrix}4 & 8\\ 4 & -4\end{pmatrix}$, et : $X=\frac{1}{12.\mu}.\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 10\end{pmatrix}$.

Réciproquement, on constate de même que le couple trouvé convient.
Conclusion : les solutions au problème posé sont les deux couples précédents.

106. Raisonnons par double inclusion :

• si M est une matrice nilpotente, étant semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, sa trace est nulle.
Par linéarité de tr, tout élément de $Vect(N)$ est de trace nulle et : $Vect(N)\subset T$.

• Soit M une matrice de trace nulle.

Alors M s'écrit : $M=\sum_{1\le i\neq j\le n} m_{i,j}.E_{i,j}+\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.E_{i,i}$, où $(E_{i,j})_{1\le i\neq j\le n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

De plus, on a : $m_{n,n}=-m_{1,1}-\ldots-m_{n-1,n-1}$, puisque : $tr(M)=0$, et :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.E_{i,i}=\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}.(E_{i,i}-E_{n,n})=\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}.(E_{i,i}-E_{n,n}+E_{i,n}-E_{n,i})+\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}.(E_{n,i}-E_{i,n}).$$

Donc : $M=\sum_{1\le i\neq j\le n} m_{i,j}.E_{i,j}+\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}.(E_{n,i}-E_{i,n})+\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}.(E_{i,i}-E_{n,n}+E_{i,n}-E_{n,i})$.

Or : $\forall\ 1\le i\neq j\le n$, $E_{i,j}^2=0$, puisque : $\forall\ 1\le i,j,k,l\le n$, $E_{i,j}.E_{k,l}=\delta_{j,k}.E_{i,l}$.

Donc toutes les matrices apparaissant dans les deux premières sommes sont nilpotentes.
Enfin :

$$\forall\ 1\le i\le n-1, (E_{i,i}-E_{n,n}+E_{i,n}-E_{n,i})^2=(E_{i,i}-E_{i,n})+(E_{n,n}-E_{n,i})+(E_{n,i}-E_{i,i})+(E_{i,n}-E_{n,n})=0,$$

ce qui se constate mieux en écrivant explicitement le produit sous forme de tableau.
On constate que M apparaît comme une combinaison linéaire de matrices nilpotentes et : $T\subset Vect(N)$.
Finalement, on a bien : $Vect(N)=T$.

Formes linéaires, dualité, hyperplans.

107. a. Notons : $n=\dim(E)$.

Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de F complétée en une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E.

Considérons alors $(e^*_1,\ldots,e^*_n)$ la base duale de la base précédente et donc définie par :

$\forall\ 1\le i,j\le n$, $e^*_i(e_j)=\delta_{i,j}$.

Alors : $\forall\ x\in$ E, $x=x_1.e_1+\ldots+x_n.e_n$, ($x\in$ F) $\Leftrightarrow$ ($x_{p+1}=\ldots=x_n=0$) $\Leftrightarrow$ ($e^*_{p+1}(x)=\ldots=e^*_n(x)=0$).

Autrement dit, F est l'intersection des $n-p$ hyperplans $\ker(e^*_i)$ (noyaux de formes linéaires non nulles), pour : $p+1\le i\le n$.

b. On va en fait montrer que : $\forall\ 1\le k\le n-1$, si $H_1,\ldots,H_k$ sont des hyperplans de E, alors l'intersection de ces hyperplans est de dimension au moins $n-k$ et pour cela on procède par récurrence sur k.

• Si : $k=1$, le résultat est immédiat (un seul hyperplan).

• S'il est vrai pour : $1\le k\le n-2$, soit $k+1$ hyperplans de E.

La formule de Grassmann donne :

$$\dim(H_1\cap\ldots\cap H_{k+1})=\dim(H_1\cap\ldots\cap H_k)+\dim(H_{k+1})-\dim((H_1\cap\ldots\cap H_k)+H_{k+1}).$$

Or la somme $(H_1\cap\ldots\cap H_k)+H_{k+1}$ est de dimension au plus n, donc :

$$\dim(H_1\cap\ldots\cap H_{k+1})\ge(n-k)+(n-1)-n=n-k-1=n-(k+1),$$

ce qui termine la récurrence.

Si maintenant on veut que m hyperplans de E aient une intersection égale à F, alors on doit avoir : $\dim(F) \geq n - m$, c'est-à-dire : $m \geq n - \dim(F)$, soit le minorant annoncé.
Comme enfin, on a trouvé effectivement $(\dim(E) - \dim(F))$ hyperplans dont l'intersection donne F (à savoir ceux de la question a), le nombre minimum effectif cherché est bien $(\dim(E) - \dim(F))$.

108. a. Si A et B vérifient l'hypothèse, alors : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $tr((A - B).X) = 0$.
Notons alors : $C = A - B$.
Deux méthodes pour montrer que C est nulle :
- on utilise en place de X les matrices $E_{p,q}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,
- on essaie la matrice ${}^tC$.

En notant : $C' = C.E_{p,q}$, alors : $\forall$ 1 ≤ i,j ≤ n, $c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}^{p,q}.c_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,p}.\delta_{k,q}.c_{k,j}. = \delta_{i,p}.c_{q,j}$,
autrement dit toutes les lignes sont nulles sauf la ligne p qui vaut : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $c'_{p,j} = c_{q,j}$.
Donc : $tr(C.E_{p,q}) = tr(C') = c'_{p,p} = c_{q,p} = 0$, et ceci étant vrai : $\forall\ 1 \leq p,q \leq n$n, $C = 0$, soit : $A = B$.
Si on utilise ${}^tC$, alors : $C.{}^tC = D$, avec : $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}.c_{j,k}$,
d'où : $tr(C.{}^tC) = tr(D) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}^2 = 0$, et donc : $C = 0$, soit encore : $A = B$.

b. Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$ qui à une matrice F fait correspondre $\varphi_F : X \mapsto tr(X.F)$.
L'application ainsi définie φ_F de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dans **K** est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (c'est immédiat).
Montrons que ϕ est linéaire et bijective.
Pour cela : $\forall\ (F, G) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$,
$\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\varphi_{\lambda.F+\mu.G}(X) = tr(X.(\lambda.F + \mu.G)) = \lambda.tr(X.F) + \mu.tr(X.G) = \lambda.\varphi_F(X) + \mu.\varphi_G(X)$,
autrement dit : $\varphi_{\lambda.F+\mu.G} = \lambda.\varphi_F + \mu.\varphi_G$, ou encore : $\phi(\lambda.F + \mu.G) = \lambda.\phi(F) + \mu.\phi(G)$, et ϕ est linéaire.
Puis, soit : $F \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $.\phi(F) = 0$.
Alors : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $tr(X.F) = tr(F.X) = 0$, et : $F = 0$, d'après la question a.
Donc ϕ est injective et puisque : $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*) = n^2$, ϕ est bijective.
Par conséquent : $\forall\ f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$, $\exists\,!\ F \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f = \phi(F)$, soit telle que :
$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A) = tr(A.F)$.

c. Soit : $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^*$, vérifiant l'hypothèse.
Notons F une matrice telle que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(X) = tr(X.F)$.
Alors : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $f(A.B) = f(B.A)$, soit : $tr(A.B.F) = tr(B.A.F) = tr(B.F.A)$.
Donc : $\forall\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $tr(B.(A.F - F.A)) = 0$, et : $A.F = F.A$.
Or cette dernière égalité étant vraie pour tout : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on en déduit que : $\exists\ \lambda \in \mathbf{K}$, $F = \lambda.I_n$ (voir exercice sur le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
On en déduit donc que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(X) = tr(X.\lambda.I_n) = \lambda.tr(X)$, soit : $f = \lambda.tr$.

109. a. La famille proposée est la base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ associée à la famille $(a_0, ..., a_n)$.
Pour mémoire, elle comporte $n+1$ vecteurs et est libre car si : $\lambda_0.P_0 + ... + \lambda_n.P_n = 0$, en évaluant cette combinaison linéaire en a_k, on obtient : $\lambda_k.1 = 0$.
Puis, pour : $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si on note : $P = \lambda_0.P_0 + ... + \lambda_n.P_n$, si on évalue cette égalité en a_k, on obtient :
$\forall\ 1 \leq k \leq n$, $\lambda_k = P(a_k)$.
On vient de déterminer les formes linéaires coordonnées associées à cette base.
Ces formes linéaires forment une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$ appelée base duale de la base de Lagrange.

b. Si un tel polynôme existe, il ne peut valoir que : $Q = b_0.P_0 + ... + b_n.P_n$, d'après la question précédente, et ce polynôme convient par évidence.

c. Puisque $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t).dt$, est une forme linéaire sur ℝn[X], elle peut s'écrire en fonction de la base duale trouvée à la question a, soit : $\exists\ (c_0,...,c_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \varphi = c_0.P_0{}^* + ... + c_n.P_n{}^*$,

ce qui s'écrit encore : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(t).dt = \sum_{k=0}^{n} c_k.P(a_k)$.

d. Il suffit de choisir pour P les polynômes de la base de Lagrange, à savoir :

$\forall\ 0 \le i \le n,\ \int_0^1 P_i(t).dt = \sum_{k=0}^{n} c_k.P_i(a_k) = c_i$.

110. a. Soit une combinaison linéaire nulle de ces trois formes : $a_0.y_0 + a_1.y_1 + a_2.y_2 = 0$.

Alors : $\forall\ P \in \mathbb{R}_2[X],\ a_0.P(a) + a_1.P'(a) + a_2.P''(a) = 0$.

Si on choisit : $P = (X-a)^2$, alors : $2.a_3 = 0$, soit : $a_3 = 0$.

Puis on utilise le polynôme : $P = (X-a)$, et : $a_2 = 0$, et enfin le polynôme : $P = 1$, conduit à : $a_1 = 0$.
La famille proposée est donc bien libre.

b. Le même raisonnement permet de montrer que la famille $(y_0,...,y_n)$ est libre, à l'aide des polynômes (utilisés dans cet ordre) $(X-a)^n,...,(X-a),1$.

c. Puisque la famille précédente comporte $n+1$ formes linéaires, c'est bien une base de ℝn[X]*.
Pour déterminer sa base antéduale, on peut s'inspirer de ce qu'on a fait au-dessus, et proposer :

$\forall\ 0 \le k \le n,\ P_k = \dfrac{(X-a)^k}{k!}$.

On constate bien que : ∀ 0 ≤ j,k ≤ n, $y_j(P_k) = \delta_{j,k}$.

En effet :

- si : $j < k$, a reste une racine de $P_k^{(j)}$, et : $P_k^{(j)}(a) = 0$,
- si : $j = k$, $P_k^{(k)} = 1$, et : $P_k^{(k)}(a) = 1$,
- si : $j > k$, l'ordre de dérivation est supérieur au degré du polynôme, d'où :
  $P_k^{(j)} = 0$, et : $P_k^{(j)}(a) = 0$.

111. La famille proposée <u>peut</u> être libre car elle comporte 4 formes linéaires dans E* qui est de dimension 4.
Considérons les polynômes $(X-a).(X-b)$, $(X-a).(X-c)$ et $(X-b).(X-c)$, d'une part et le polynôme $(X-a).(X-b).(X-c)$ d'autre part.
Les trois premiers forment une base de ℝ2[X] (à des facteurs multiplicatifs près, c'est une base de Lagrange) et le dernier n'étant pas dans ℝ2[X], il engendre une droite supplémentaire de ℝ2[X] dans ℝ3[X].
Donc ces quatre polynômes forment une base de ℝ3[X].
Considérons maintenant : $\lambda_a.y_a + \lambda_b.y_b + \lambda_c.y_c + \lambda.y = 0$.

Evaluée sur le premier polynôme, on obtient : $\lambda_c.(c-a).(c-b) + \lambda.\int_a^b (t-a).(t-b).dt = 0$, soit :

$\lambda_c = -\lambda.\dfrac{1}{(c-a).(c-b)}.\int_a^b (t-a).(t-b).dt$.

De même avec les deux suivants, on obtient :

$\lambda_b = -\lambda.\dfrac{1}{(b-a).(b-c)}.\int_a^b (t-a).(t-c).dt$, et : $\lambda_a = -\lambda.\dfrac{1}{(a-b).(a-c)}.\int_a^b (t-b).(t-c).dt$.

Enfin, évaluée sur le dernier polynôme, on a : $\lambda.\int_a^b (t-a).(t-b).(t-c).dt = 0$.

Cette dernière intégrale vaut : $\int_a^b (t-a).(t-b).(t-c).dt = \dfrac{1}{6}.(a-b)^2.(c-\dfrac{a+b}{2})$.

Distinguons alors deux cas :

- si : $c \neq \dfrac{a+b}{2}$, alors λ est nul, ainsi que les trois autres scalaires et la famille est libre.

• si : $c = \dfrac{a+b}{2}$, on peut poser :

$$\lambda = 1,\ \lambda_c = \frac{-\int_a^b (t-a).(t-b).dt}{(c-a).(c-b)},\ \lambda_b = \frac{-\int_a^b (t-a).(t-c).dt}{(b-a).(b-c)},\ \lambda_a = \frac{-\int_a^b (t-b).(t-c).dt}{(a-b).(a-c)},$$

La combinaison linéaire obtenue avec ces scalaires est la forme linéaire nulle puisqu'elle s'annule sur les 4 polynômes de la base précédente, et un des coefficients au moins (par exemple λ) est non nul.
On conclut que dans ce cas, la famille est liée.

112. On sait que $\ker(y^*)$ et $\ker(z^*)$ sont des hyperplans H_y et H_z de E.
Deux possibilités ensuite :
• soit : $H_y = H_z$, et il existe x dans E hors de cet hyperplan, et donc tel que : $y^*(x) \neq 0$, $z^*(x) \neq 0$, et donc le produit $y^*(x).z^*(x)$ est non nul.
• soit : $H_y \neq H_z$, et : $\exists\ x_y \in H_y$, $x_y \notin H_z$ et : $\exists\ x_z \in H_z$, $x_z \notin H_y$.
Dans ce cas le vecteur : $x = x_y + x_z$, n'est ni dans H_y ni dans H_z.
En effet, si on avait : $x \in H_y$, alors par différence, on aurait : $x_z \in H_y$, ce qui est impossible.
Il est aussi impossible d'avoir : $x \in H_z$.
Donc : $y^*(x) \neq 0$, et : $z^*(x) \neq 0$, donc le produit est encore non nul.

Formes multilinéaires.

113. Puisque u est linéaire et que $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alternée, il est clair que f est n-linéaire.
De plus, pour : $(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{E}^n$, si par exemple : $x_1 = x_2$, alors :

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},\dots,x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x,u(x),x_3,\dots,x_n) + \det_{\mathscr{B}}(u(x),x,x_3,\dots,x_n),$$

puisque tous les autres déterminants comportent deux vecteurs identiques.
Et comme la forme $\det_{\mathscr{B}}$ est alternée, ces deux derniers déterminants sont opposés (on y inverse les deux premiers vecteurs).
f est donc bien n-linéaire alternée sur E.
Donc : $\exists\ \alpha \in \mathbf{K}$, $f = \alpha.\det_{\mathscr{B}}$.

Pour terminer, si : $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$, et : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i$, alors :

$$f(e_1,\dots,e_n) = \alpha.\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_{i-1},u(e_i),e_{i+1},\dots,e_n).$$

Or : $\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_{i-1},u(e_i),e_{i+1},\dots,e_n) = \begin{vmatrix} 1 & & a_{1,i} & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{i,i} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & a_{n,i} & & 1 \end{vmatrix} = a_{i,i}$, d'où : $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = tr(u)$.

114. a. On utilise la n-linéarité du déterminant et on développe complètement pour obtenir en tout 2^n termes.
Chaque terme est un déterminant du type $\det_{\mathscr{B}}(y_1,\dots,y_n)$, où y_i vaut soit x_i, soit a.
Trois possibilités se présentent alors pour chaque nouveau déterminant :
• il ne comporte pas de a, et donc il vaut : $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$ (un seul terme),
• il comporte un a, et donc il vaut : $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n)$ (n termes),
• il comporte plus de deux fois le vecteur a, et donc il est nul.

Finalement : $\det_{\mathscr{B}}(a+x_1,a+x_2,\dots,a+x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n)$.

b. On applique le résultat précédent avec : $a = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, et : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

où tous les coefficients sont nuls sauf le $i^{\text{ème}}$.

On en déduit que : $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} \left(b_j . \prod_{i \neq j} a_i \right) = \prod_{i=1}^{n} a_i . \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{a_j} \right)$,

la dernière égalité étant valable lorsque tous les a_i sont non nuls.

Calculs de déterminants.

115. Notons : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $P_j = (X + j - 1)^2$.

Ces polynômes étant de degré 2 (donc dans $\mathbb{R}_2[X]$), la famille $(P_1, ..., P_n)$ est liée si : $n \geq 4$.

• Plaçons dans le cas : où : $n \geq 4$.

Alors : $\exists\ (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, non tous nuls, tel que : $\alpha_1 . P_1 + ... + \alpha_n . P_n = 0$.

Alors : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $\alpha_1 . P_1(j) + ... + \alpha_n . P_n(f) = 0$, et la même relation lie les colonnes de la matrice A.

Dans ce cas, on a donc : $\det(A) = 0$.

• On complète alors avec :

$n = 1$, et : $\det(A) = 1$,

$n = 2$, et : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1$,

$n = 3$, et : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = -8$.

116. La matrice A vaut : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & \frac{n.(n+1)}{2} \end{pmatrix}$.

Pour calculer $\det(A)$, on enlève par exemple à chaque colonne la précédente en commençant par la dernière et on obtient : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & \cdots & \frac{n.(n+1)}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & n-1 & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$.

117. a. Les colonnes de D_n sont : $\forall\ 1 \leq j \leq n$, $C_j = a.C + x_j . E_j$.

b. Si on développe D_n par n-linéarité, on obtient 2^n termes répartis en trois type :

• le déterminant où n'apparaît jamais C qui vaut : $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix} = x_1 ... x_n$,

• ceux (il y en a n) avec une fois la colonne C qui valent : $\begin{vmatrix} x_1 & & a & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a & & x_n \end{vmatrix} = x_1 ... x_{j-1}.a.x_{j+1} ... x_n$,

• ceux qui comporte deux fois la colonne C et qui ainsi sont nuls.

Donc : $D_n = x_1 ... x_n + \sum_{j=1}^{n} x_1 ... x_{j-1}.a.x_{j+1} ... x_n$.

118. a. On commence donc par remplacer chaque colonne C_k par $C_k - C_n$, pour : $1 \leq k \leq n-1$, et :

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1 + b_1).(a_1 + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_1 + b_{n-1}).(a_1 + b_n)} & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_n + b_1).(a_n + b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_n + b_{n-1}).(a_n + b_n)} & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix} = \frac{(b_n - b_1)...(b_n - b_{n-1})}{(a_1 + b_n)...(a_n + b_n)}.D'_n.$$

Dans ce nouveau déterminant, on utilise cette fois la dernière ligne comme pivot, et :

$$D'_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_1 + b_1)} & \cdots & \frac{1}{(a_1 + b_{n-1})} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(a_n + b_1)} & \cdots & \frac{1}{(a_n + b_{n-1})} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_n - a_1}{(a_1 + b_1).(a_n + b_1)} & \cdots & \frac{a_n - a_1}{(a_1 + b_{n-1}).(a_n + b_{n-1})} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1} + b_1).(a_n + b_1)} & & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1} + b_{n-1}).(a_n + b_{n-1})} & 0 \\ \frac{1}{(a_n + b_1)} & \cdots & \frac{1}{(a_n + b_{n-1})} & 1 \end{vmatrix}.$$

On peut alors développer suivant la dernière colonne et factoriser dans chaque ligne.
On peut également changer les signes des termes du numérateur, et on aboutit à la formule proposée :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n)...(b_{n-1} - b_n).(a_1 - a_n)...(a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n)...(a_{n-1} + b_n).(a_n + b_n).(a_n + b_{n-1})...(a_n + b_1)}.D_{n-1}.$$

b. On remarque que : $D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$, et par récurrence : $\forall\ n \geq 2$, $D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).(b_i - b_j)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$.

c. Dans le cas particulier proposé, le numérateur vaut : $(1!.2!...(n-1)!)^2$, et le dénominateur quant à lui vaut : $(1+1).(2+1)...(n+1)...(1+n).(2+n)...(n+n) = \frac{(n+1)!}{1!} ... \frac{(2.n)!}{n!}$,

et le déterminant cherché vaut donc : $\Delta_n = \frac{(1!.2!...(n-1)!)^3.n!}{(n+1)!...(2.n)!}$.

119. a. On utilise la multilinéarité du déterminant, en particulier ici par rapport à la dernière colonne, et :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \forall\ p \in \mathbb{N},\ \varphi_p(x+1)-\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & 2.x+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p}{p-1} & \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}.x^k \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & \sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}.x^k \end{vmatrix}.$$

On remplace alors la dernière colonne par $C_{p+1}-\sum_{k=1}^{p} x^{k-1}.C_k$, et la valeur calculée devient :

$$\varphi_p(x+1)-\varphi_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \binom{2}{1} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \binom{p}{p-1} & 0 \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{p-1} & \binom{p+1}{p}.x^p \end{vmatrix} = x^p.(p+1)!\text{, puisque triangulaire.}$$

b. Si on écrit maintenant les égalités précédentes pour x prenant les valeurs $0,1,\ldots,n$ et en ajoutant les égalités obtenues, on arrive à : $\sum_{k=0}^{n}[\varphi_p(k+1)-\varphi_p(k)] = (p+1)!.\sum_{k=0}^{n}k^p$,

et comme : $\varphi_p(0)=0$, on conclut que : $\varphi_p(n+1) = (p+1)!.\sum_{k=1}^{n}k^p$, puisque la somme est télescopique.

c. On a alors (en développant les déterminants) : $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

- $\varphi_1(n+1) = (1+1)!.\sum_{k=1}^{n}k = \begin{vmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = n.(n+1)$, d'où : $\sum_{k=1}^{n}k = \dfrac{n.(n+1)}{2}$.
- $\varphi_2(n+1) = (2+1)!.\sum_{k=1}^{n}k^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 1 & 2 & (n+1)^2 \\ 1 & 3 & (n+1)^3 \end{vmatrix} = n.(n+1).(2.n+1)$, d'où : $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$.
- $\varphi_3(n+1) = (3+1)!.\sum_{k=1}^{n}k^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & n+1 \\ 1 & 2 & 0 & (n+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & (n+1)^3 \\ 1 & 4 & 6 & (n+1)^4 \end{vmatrix} = 6.n^2.(n+1)^2$, et : $\sum_{k=1}^{n}k^3 = \dfrac{6.n^2.(n+1)^2}{24} = \dfrac{n^2.(n+1)^2}{4}$.

120. a. Si n vaut 1, les matrices se confondent avec des complexes, et l'égalité est vérifiée pour tout : $A \in \mathbb{C}$.

b. On suppose dorénavant que : $n \geq 2$.

Si A répond au problème, en prenant : $X = A$, on obtient :

$\det(2.A) = 2.\det(A) = 2^n.\det(A)$, et donc : $\det(A) = 0$.

c. On sait qu'il existe : $(P,Q) \in Gl_n(\mathbb{C})^2$, $A = Q.\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.P$.

Posons alors : $X = Q.\begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{pmatrix}.P$, qui est bien une matrice de rang $n-r$ puisque P et Q sont inversibles.

On a alors : $A+X = Q.P$, et : $\det(A+X) = \det(Q.P) = \det(Q).\det(P) \neq 0$.

Or : $\det(AX) = \det(X)$.

Donc X est inversible, est donc de rang n, et : $r = 0$.
Puisque A est une matrice de rang 0, elle est nulle.