Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement

TD2

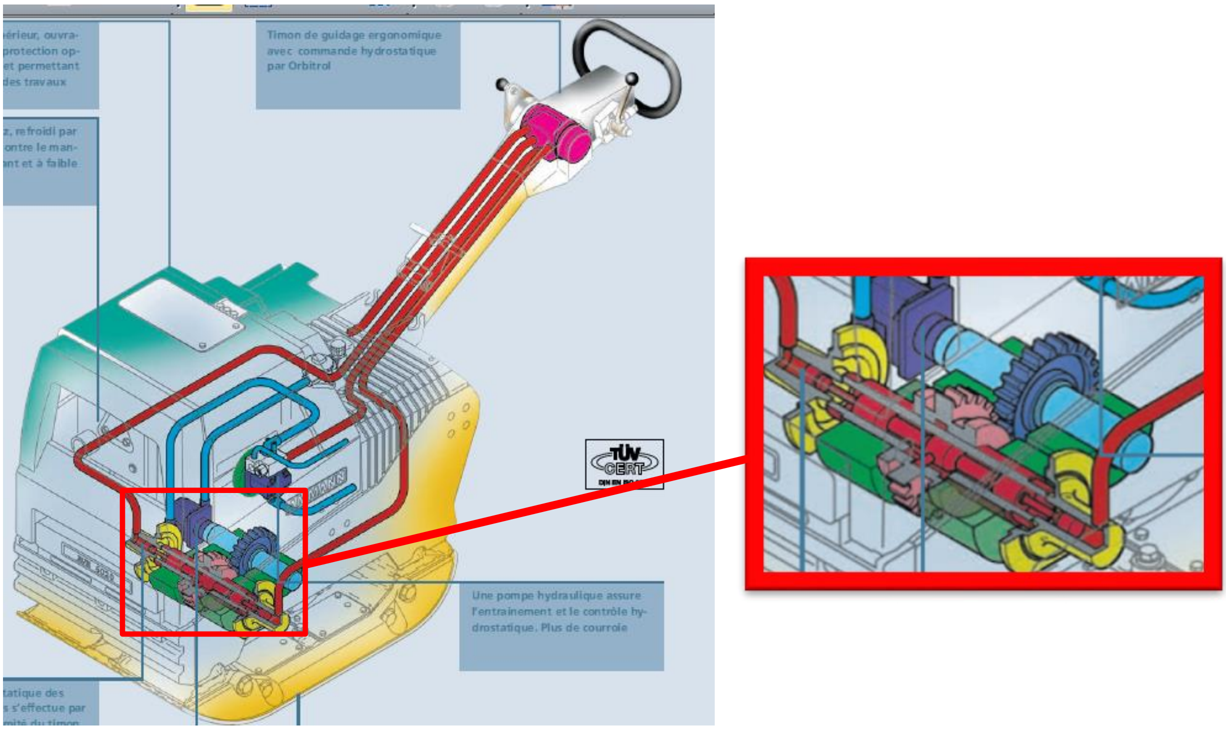
Torseurs cinétique et dynamique des solides
Principe Fondamental de la Dynamique
Théorème de l'énergie cinétique

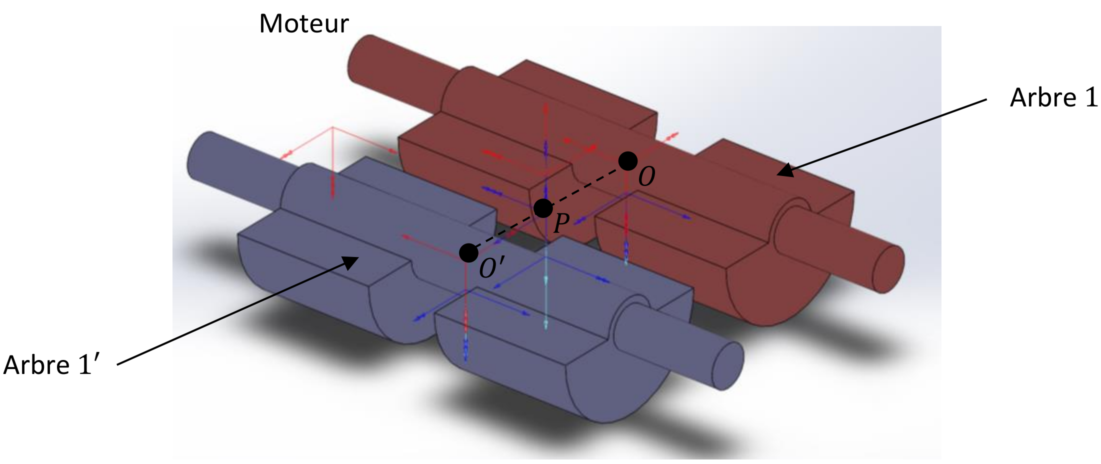
Programme - Compétences		
C12	RESOUDRE	Choix des isolements Choix des méthodes de résolution Actions mécaniques dans les liaisons Equations différentielles du mouvement
B212	MODELISER	Caractéristiques d'inertie d'un solide indéformable (masse, opérateur d'inertie) Lien entre forme de la matrice d'inertie et géométrie du solide associé Signification des termes de la matrice d'inertie
B223	MODELISER	Modélisation dynamique des solides Torseur cinétique et dynamique et énergie cinétique d'un solide ou système de solides Puissances des actions intérieures et extérieures par rapport à un référentiel galiléen
B224	MODELISER	Principe fondamental de la dynamique et théorème de l'énergie cinétique pour la détermination d'actions de liaisons et d'équations différentielles du mouvement

Exercice 1: Plaques vibrantes hydrauliques

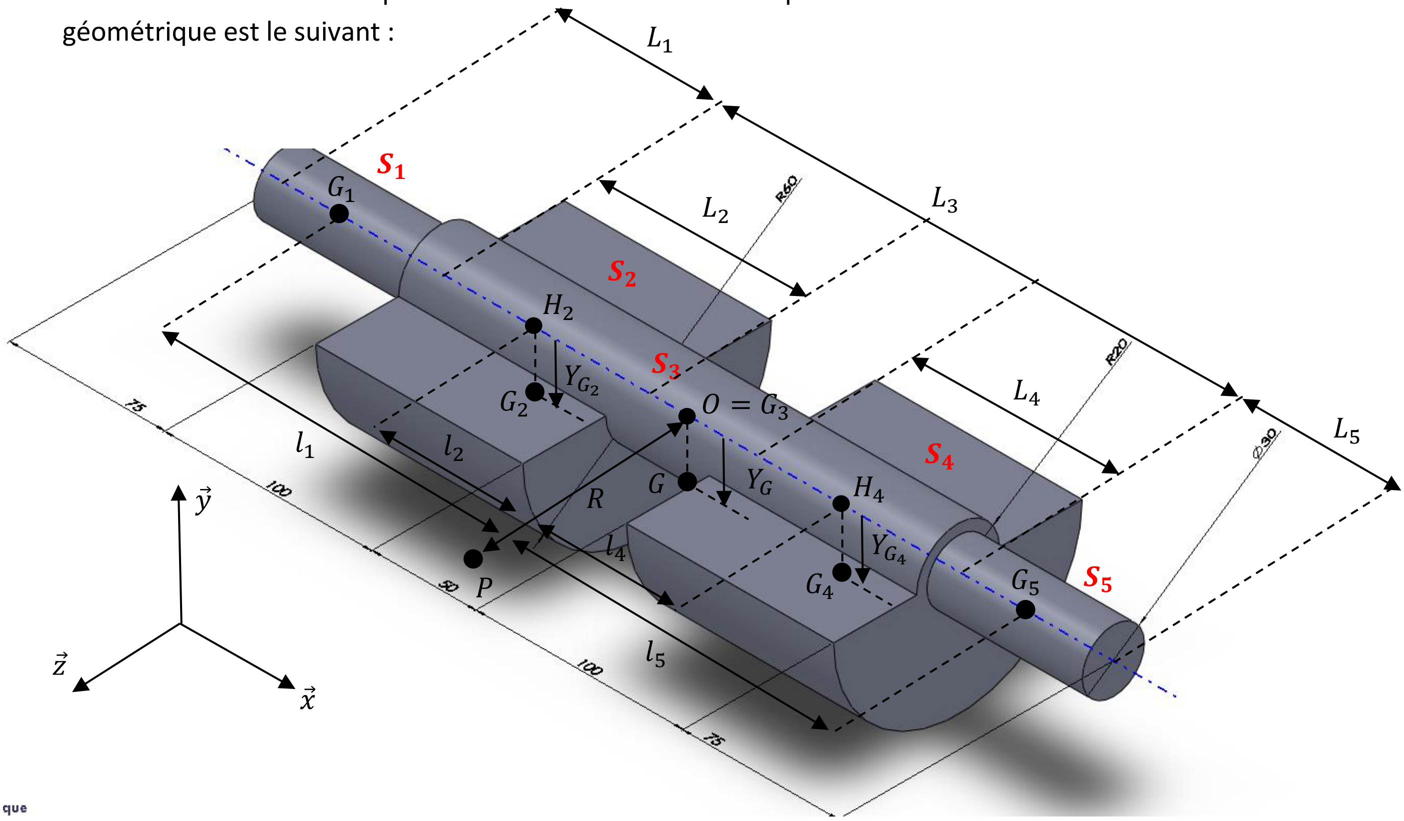
Notre étude porte sur un système de plaques vibrantes utilisé sur les engins de chantier manuels pour compacter les sols.

Le principe repose sur la mise en mouvement de plaques par l'intermédiaire de deux arbres vibrants mis en rotation par un moteur hydraulique et un train d'engrenages. On arrive alors à créer des efforts internes induisant le décollement de l'ensemble de la machine du sol à chaque tour de l'arbre.





La vibration est obtenue par l'intermédiaire de la forme particulière des arbres dont un modèle géométrique est le suivant :



Les deux arbres étant identiques, on s'intéresse à l'un d'eux, celui qui est directement entraîné par le moteur, nommé 1, en liaison pivot parfaite d'axe $\vec{x}$ par rapport au bâti 0. La base $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est liée au bâti. Le second arbre 1' est entraîné par le premier à l'aide d'un engrenage à dentures droites de point de contact P de rapport de réduction -1.

$$\{\mathcal{T}_{1'\to 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_P & 0 \\ Z_P & 0 \end{Bmatrix}_P^{B_0} \quad ; \quad \frac{Y_P}{Z_P} = cste$$

P est le centre du segment $[OO']$.

$$\overrightarrow{OP} = R\vec{z}$$

On appelle G le centre de gravité de l'arbre 1 et on définit : $\overrightarrow{OG} = Y_G\overrightarrow{y_1}$

La base $\mathfrak{B}_1$ liée à 1 et est telle que, sur la représentation de l'arbre ci-dessus, les bases $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}_1$ sont confondues à l'instant de la « photo ». À tout moment, $\vec{x} = \overrightarrow{x_1}$.

On définit l'angle θ tel que $\theta = (\vec{y},\overrightarrow{y_1}) = (\vec{z},\overrightarrow{z_1})$ et on appelle $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse de rotation de l'arbre 1.

L'arbre est en acier de masse volumique $\rho = 7850\ Kg/m^3$

On néglige l'inertie des roues dentées associées aux arbres 1 et $1'$.

On suppose que les liaisons pivots réalisées entre chaque arbre 1 et 1' et le bâti sont réalisées chacune à l'aide d'une seule liaison pivot respectivement aux points 0 et 0'.

La machine complète sans les arbres a une masse de $M_t = 100\ Kg$.

L'accélération de la pesanteur vaut : $g = 9.81\ m/s^2$.

On note M la masse d'un arbre.

Lors de la mise en marche du système, on souhaite que le système soit fonctionnel après 1 seconde. Le moteur envoie une consigne de couple en tout ou rien. On ne prend en compte que l'inertie des deux arbres, on négligera l'inertie des autres éléments en rotation.

Nous allons :

- Mettre en place la matrice d'inertie du solide dans son repère.
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique intégralement (6 équations) dans le but
  - D'analyse l'intérêt de chaque équation
  - De déterminer les efforts générés par la rotation de l'arbre sur la machine
  - D'obtenir l'équation régissant le mouvement de l'arbre autour de son axe
- En déduire la vitesse de rotation minimale permettant le décollement de la machine du sol
- Déterminer le couple moteur permettant de réaliser la mise en marche demandée
- Conclure sur une méthode rapide permettant de mener cette étude au plus vite

On découpe l'arbre en 5 solides tels que :

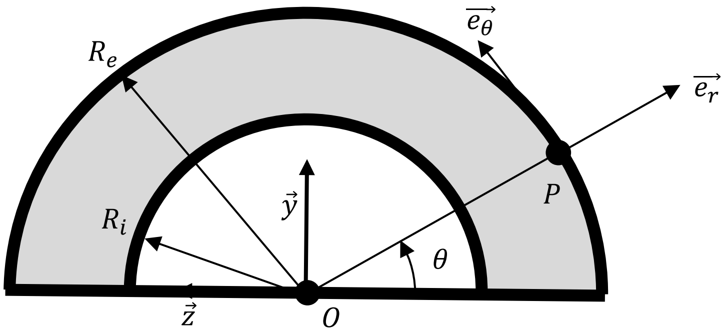
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre
$D_1 = 30\ mm$ $L_1 = 75\ mm$	$D_2 = 120\ mm$ $d_2 = 40\ mm$ $L_2 = 100\ mm$	$D_3 = 40\ mm$ $L_3 = 250\ mm$	$D_4 = 120\ mm$ $d_4 = 40\ mm$ $L_4 = 100\ mm$	$D_5 = 30\ mm$ $L_5 = 75\ mm$
$\overrightarrow{OG_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$ $l_1 = 162.5\ mm$	$\overrightarrow{OG_2} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ Y_{G2} \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$ $l_2 = 75\ mm$	$\overrightarrow{OG_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$	$\overrightarrow{OG_4} = \begin{bmatrix} l_4 \\ Y_{G4} \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$ $l_4 = 75\ mm$	$\overrightarrow{OG_5} = \begin{bmatrix} l_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_1}$ $l_5 = 162.5\ mm$

On appelle

- H_i les projections H_2 et H_4 des centres de gravité des parties S_2 et S_4 sur l'axe $(O, \vec{x})$
- R_i et r_i les rayons associés aux diamètres D_i et d_i
- M_i la masse du S_i

Centre de gravité

Soit la surface suivante, indépendamment du repère du problème étudié :



Question 1: Déterminer l'ordonnée Y du centre de gravité de cette surface
Question 2: En déduire les coordonnées des centres de gravité des solides S_2 et S_4
Question 3: Déterminer la masse M_i des solides S_i et la masse totale M de l'arbre 1
Question 4: En déduire la position G du centre d'inertie de l'arbre 1 dans $\mathfrak{B}_1$

Matrice d'inertie

Question 5: Proposer la forme de la matrice d'inertie de l'arbre 1 en O dans la base B_1
Question 6: Rappeler la matrice d'inertie $I(G_i,S_i)$ en son centre G_i d'un cylindre plein S_i de rayon R_i, de longueur L_i et de masse M_i, d'axe $(G_i,\vec{x})$ dans la base B_i
Question 7: En déduire la matrice $I(O,S_1+S_3+S_5)$ des parties S_1, S_3 et S_5 de l'arbre 1 en O dans la base B_1
Question 8: Déterminer la matrice d'inertie $I(H_i,S_i)$ en H_i d'un demi-cylindre creux dans le demi plan $y>0$, de rayon intérieur r_i, de rayon extérieur R_i et de longueur L_i, d'axe $\overrightarrow{x_i}$ dans la base B_i
Question 9: En déduire la matrice d'inertie de chaque cylindre creux 2 et 4 aux points H_i dans la base B_1
Question 10: En déduire la matrice d'inertie $I(O,S_2+S_4)$ des cylindres creux 2 et 4 au point O dans la base B_1
Question 11: En déduire la matrice $I(O,1)$ de l'arbre 1 dans la base B_1.
Question 12: En déduire la matrice $I(G,1)$ de l'arbre 1 dans B_1.

Pour la suite, on donne :

$$Y_G = -19{,}46\ mm$$
$$M = 11.19\ Kg$$
$$I(G,1) = \begin{bmatrix} 1{,}21*10^{-2}kg.m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}44*10^{-2}kg.m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}01*10^{-2}kg.m^2 \end{bmatrix}^{B_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_1}$$

Torseur dynamique

Question 13: Déterminer la résultante dynamique $\overrightarrow{R_{d_{10}}}$ dans B_1.
Question 14: Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(G,1/0)$ dans B_1.
Question 15: Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}(G,1/0)$ dans B_1.
Question 16: Déterminer $\{D(1/0)\}$ en G dans B_1.
Question 17: En déduire $\{D(1/0)\}$ en O dans B.

Equations du PFD

Le système que nous étudions est composé de deux pièces et d'un « bâti ».
Si on traitait le problème en statique, il faudrait déterminer les actions inconnues dans les deux liaisons pivots et au contact dans la ponctuelle entre les deux arbres en fonction du couple moteur ou des poids, une relation existant entre ceux-ci. Il faut donc faire de même en dynamique. Il suffit d'effectuer deux isolements parmi les 3 possibles (1, 1' ou 1+1') afin de résoudre le problème dynamique. Compte tenu de la similarité des deux arbres, nous allons étudier l'un d'eux puis déterminer les résultats du second par analogie.
Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\{\mathcal{D}(1/0)\} = \{\mathcal{T}_{\bar{1}\to 1}\}$$

Question 18: Enumérer les actions extérieures s'exerçant sur 1 et exprimer leurs torseurs en O dans la base B.
Question 19: Donner le torseur général des actions de l'extérieur sur l'arbre 1 $\{\mathcal{T}_{\bar{1}\to 1}\}$ en O dans la base B.
Question 20: Déterminer les 6 équations issues du PFD dans la base B.

Etudions maintenant le second arbre. On peut remarquer que l'étude que nous avons menée sur l'arbre 1 peut être étendue à l'arbre 1'. En effet, les géométries des deux arbres sont identiques, et dans les calculs que nous avons effectués, les changements sont les suivants :

$$\theta \to -\theta \quad ; \quad \dot{\omega} \to -\dot{\omega} \quad ; \quad C_m = 0 \quad R \to -R$$

$$\{\mathcal{T}_{0\to 1}\} \to \{\mathcal{T}_{0\to 1'}\} \quad ; \quad O \to O' \quad ; \quad \{\mathcal{T}_{1'\to 1}\} \to -\{\mathcal{T}_{1\to 1'}\}$$

Question 21: Par analogie avec l'étude de l'arbre 1, déterminer le système d'équations issu du PFD appliqué à 1' en O'
Question 22: Faire un bilan du nombre d'inconnues et du nombre d'équations de ce système et conclure sur sa solvabilité

PFD et actions de liaisons

Question 23: Déterminer les torseurs $\{\mathcal{T}_{0\rightarrow 1}\}$ et $\{\mathcal{T}_{0\rightarrow 1'}\}$ des actions dans les liaisons pivot des pièces 1 et 1' sur le bâti en O et O'.

On remarquera que ces actions sont pour l'instant dépendantes de l'action au contact dans l'engrenage qui est inconnue. En statique, on déterminerait cette action à l'aide de l'équation en moment suivant l'axe de rotation des arbres $\vec{x}$, ce qui donnerait la relation entre Y_p et soit C_m, soit le poids des arbres. En dynamique, nous utiliserons l'équation différentielle du mouvement autour de cet axe x car l'inertie entre en compte dans cette action. Connaissant Y_p, on pourrait obtenir Z_p à l'aide de l'angle de contact dans l'engrenage. Nous ne détaillerons pas son calcul qui nous est inutile si nous ne nous intéressons pas à la composante suivant $\vec{z}$ des actions des arbres sur le bâti. En effet, l'action de la somme des 2 arbres sur le bâti ne contient pas cette inconnue qui se compense.

Question 24: En déduire le torseur $\{\mathcal{T}_{1U1'\rightarrow 0}\}$ de l'action de l'ensemble des deux arbres 1 et $1'$ sur le bâti 0 dans la base B au point P en fonction de l'inconnue Y_p

Vous remarquerez qu'un couple non nul est exercé par les deux arbres sur le bâti.

Question 25: Que vaut l'action verticale R_y des deux arbres sur le bâti lorsque la vitesse de rotation des arbres est constante

Question 26: Quel est l'intérêt d'utiliser deux arbres contra rotatifs ?

Question 27: Déterminer la vitesse de rotation minimale permettant de répondre au besoin posé.

Question 28: Que vaut la variation de force de compactage du sol ΔR_y ?

PFD et mouvement

On s'intéresse à la phase d'accélération et on ne supposera donc plus que la vitesse est constante.

Question 29: Donner l'équation différentielle du mouvement de l'arbre 1

Question 30: Donner l'équation différentielle du mouvement de l'arbre 1'

Question 31: Déterminer l'inconnue Y_P

Question 32: En déduire la relation liant C_m aux données du problème

Supposons, ce qui n'est pas réaliste, que l'on puisse négliger la gravité. Autrement dit, la machine est inclinée !!! On remarquera toutefois que la gravité a tendance à accélérer le mouvement sur un demi-tour et à le décélérer sur l'autre et que son action moyenne est nulle.

Question 33: Déterminer l'expression du couple C_m permettant d'obtenir une vitesse de rotation ω en un temps T.

Question 34: En déduire C_m afin de répondre au cahier des charges.

Questions subsidiaires

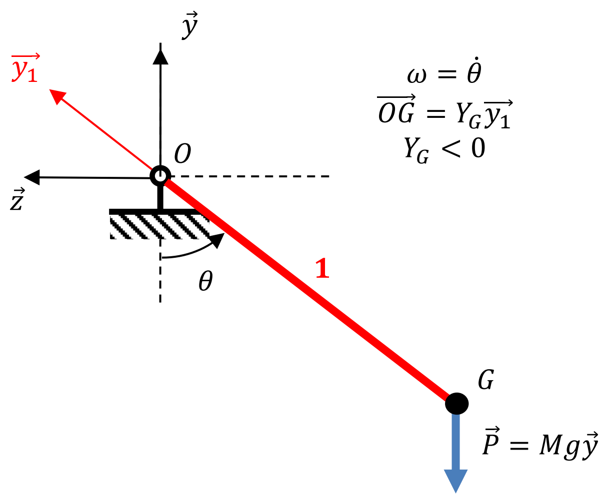
Question 35: Connaissant Y_P, déterminer l'expression du couple non nul du torseur $\{\mathcal{T}_{1U1'\rightarrow 0}\}$ de l'action de l'ensemble des deux arbres 1 et $1'$ sur le bâti 0 dans la base B au point P

Question 36: Proposer un graphe des liaisons de l'ensemble du système (Sol, Machine, Arbre 1, Arbre 1', Moteur)

Question 37: En déduire le torseur de l'action de l'ensemble des arbres 1 et $1'$ et du moteur $\{\mathcal{T}_{1U1'UM\rightarrow 0}\}$ sur le bâti 0 dans la base B au point P

TEC et mouvement

On isole les deux arbres 1 et 1'. On rappelle la situation de l'arbre 1 :



Question 38: Exprimer $I_{1_O}^{x}$, moment d'inertie de l'arbre 1 autour de l'axe $(O, \vec{x})$

Question 39: Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble $1U1'$

Question 40: Donner l'expression des puissances extérieures aux deux arbres

Question 41: Retrouver l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TEC.

Bilan

Au bilan, nous souhaitons analyser quelles équations il aurait suffi d'écrire pour répondre aux questions posées dans le cas de cette étude.

Question 42: Quelles équations permettraient de déterminer l'action des deux arbres sur le bâti R_y ?

Question 43: Quelle équation permet de mettre en relation le couple moteur avec l'accélération de l'arbre ?