

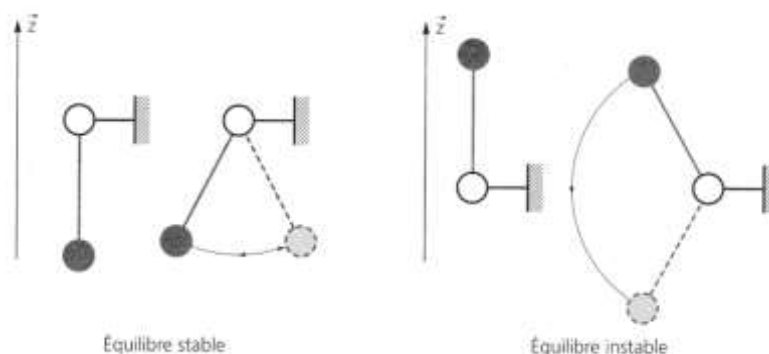
Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II. Stabilité d'un système bouclé

A.II.1 Introduction sur la notion d'équilibre

A.II.1.a Pendule

Prenons l'exemple d'un pendule en liaison pivot par rapport à un bâti immobile, \vec{z} représentant la direction verticale.

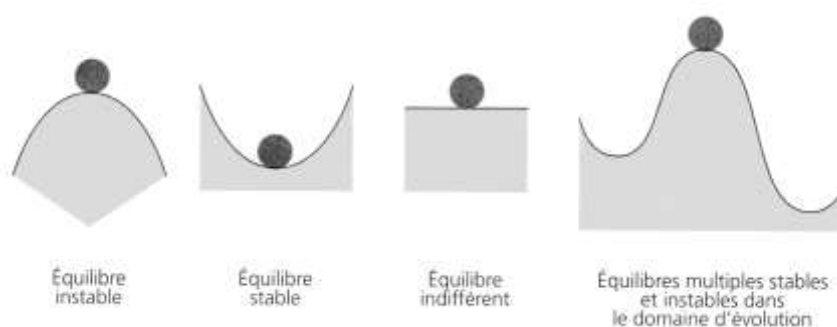


Ce pendule présente une position d'équilibre stable (en bas) et une position d'équilibre instable (en haut).

A.II.1.b Masse en contact ponctuel parfait

Ce deuxième exemple permet d'introduire de nouvelles notions d'équilibre.

Soit une masse soumise à la gravité en contact parfait sur un support.



On nomme équilibre indifférent le cas où, écarté de sa position par une cause extérieure passagère, le système reste écarté lorsque la cause disparaît. Il ne tend pas à revenir vers la position de départ mais ne diverge pas.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.2 Définitions

A.II.2.a Equilibre Stable - Instable

La stabilité d'un système est communément associée à la notion d'équilibre stable et instable.

Dans une position d'équilibre stable, si on écarte le système de sa position et qu'on le laisse libre, il revient dans cette position.

Dans une position d'équilibre instable, si on écarte le système de sa position et qu'on le laisse libre, il s'écarte d'avantage et ne revient pas dans cette position.

A.II.2.b Système à la limite de la stabilité

Un système est dit à la limite de la stabilité si, écarté de sa position par une cause extérieure, il ne revient pas vers cette position lorsque la cause disparaît, sans toutefois diverger (réponse constante ou sinusoïdale non amortie : réponse impulsionnelle d'un oscillateur non amorti).

Ce type de systèmes est stable au sens entrée bornée / sortie bornée, mais on peut faire la distinction avec un système asymptotiquement stable en précisant qu'il est à la limite de la stabilité.

A.II.2.c Système stable

On retiendra la définition suivante :

Un système est stable si, **à toute** entrée bornée, il répond par une sortie bornée.

Il est dit asymptotiquement stable s'il converge vers une valeur finie

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.3 Condition fondamentale de stabilité d'un système

A.II.3.a Pôles d'une fonction de transfert

Soit un système défini par une fonction de transfert $H(p)$ causale (degré de $D(p) >$ degré de $N(p)$) telle que :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 D(p) &= p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod \left[[p - (a_j + ib_j)][p - (a_j - ib_j)] \right]^n \\
 [p - (a_j + ib_j)][p - (a_j - ib_j)] &= [(p - a_j) - (ib_j)][(p - a_j) + (ib_j)] \\
 &= (p - a_j)^2 - (ib_j)^2 = (p - a_j)^2 + b_j^2 \\
 D(p) &= p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $H(p)$ possède des pôles nuls, des pôles réels p_i simples ou multiples et des pôles complexes conjugués de la forme $a_j + ib_j$ simples ou multiples.

A.II.3.b Réponse impulsionnelle

A.II.3.b.i Forme de la réponse dans Laplace

On impose à ce système une impulsion à partir de la position initiale $s(0) = 0$.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$e(t) = \delta(t) \rightarrow E(p) = 1$$

On a donc :

$$S(p) = H(p)$$

La décomposition en éléments simples de $H(p)$ représentant un système causal nous permet de proposer une forme générale suivante :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{p^i} + \prod \frac{B_i}{(p - p_i)^n} + \prod \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \prod \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.3.b.ii Forme de la réponse temporelle

L'application des tables de transformation de Laplace permet de prévoir la forme des fonctions composant la réponse $s(t)$:

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
$D(p)$	p^α	$\prod (p - p_i)^n$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$
$s(t)$	$K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$	$\sum K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}$	$\sum K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$	$\sum K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$

Remarque : pour les termes en $[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$, $n \geq 2$, on pourra consulter l'exemple décrit dans le cours de 1^o année pour $n = 2$ et admettre qu'il se généralise.

A.II.3.b.iii Analyse de stabilité

Etudions les conditions dans lesquelles la réponse est bornée pour chacun des types de termes rencontrés.

• Termes de type 1

Pôles réels nuls ... p^α		
$K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$	Pôle 0 simple $\alpha = 1$	Pôle 0 multiple $\alpha > 1$
Comportement de $s(t)$	Constant	Terme en puissance
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Instable

Remarque : la stabilité liée au pôle nul unique n'est vérifiée que pour l'entrée impulsionnelle, nous le verrons au prochain paragraphe.

• Termes de type 2

Pôles réels non nuls p_i ... $(p - p_i)^n$			
$K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}$	$p_i < 0$	$p_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{p^n}$	$p_i > 0$
Comportement de $s(t)$	Exponentielles décroissantes	Cas non présent puisque intégré dans la classe	Exponentielles croissantes
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente		Instable

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

• **Termes de type 3**

Pôles complexes conjugués simples ... $(ap^2 + bp + c)$ avec $\Delta < 0$ ou $[(p - a_j)^2 + b_j^2]$			
$K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (b_j t)$	$a_j < 0$	$a_j = 0$	$a_j > 0$
Comportement de $s(t)$	Sinusoïdales encadrées par exponentielles décroissantes	Sinusoïdales	Sinusoïdales encadrées par exponentielles croissantes
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Stable Oscillante	Instable

• **Termes de type 4**

Pôles complexes conjugués multiples ... $(ap^2 + bp + c)^n$ avec $\Delta < 0$ ou $[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$; $n > 1$			
$K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (b_j t)$	$a_j < 0$	$a_j = 0$	$a_j > 0$
Comportement de $s(t)$	Forme particulière convergente	Oscillations autour d'une pente moyenne non nulle	Forme particulière divergente
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Instable	Instable

A.II.3.b.iv Conclusions

On remarque que pour une réponse impulsionnelle :

- Les pôles à partie réelle strictement négative permettent d'obtenir une réponse stable convergente
- Un pôle nul simple induit une réponse soit stable et convergente
- Un pôle nul multiple induit une réponse divergente
- Les pôles imaginaires pur conjugués simples (partie réelle nulle) induisent une réponse stable et oscillante
- Les pôles imaginaires pur conjugués multiples (partie réelle nulle) induisent une divergence

A ce stade, il semble qu'un système converge pour une réponse impulsionnelle si :

- La partie réelle de ses pôles est strictement négative – Convergence asymptotique
- Les pôles à partie réelle nulle sont simples – Réponse constante ou oscillante

Toutefois, cela ne répond pas à la question : le système est-il stable, c'est-à-dire à toute entrée bornée, il répond par une sortie bornée.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.3.c Entrées quelconques

Nous avons imposé une entrée impulsionnelle qui nous a mené à étudier directement $H(p)$ et de voir l'influence de ses pôles sur la stabilité du système causal associé.

Traisons maintenant le cas d'une entrée quelconque.

A.II.3.c.i Forme de la réponse dans Laplace

Quelle que soit l'entrée, la sortie $S(p)$ s'exprimera avec un même dénominateur dans le domaine de Laplace que la réponse impulsionnelle augmenté de quelques termes liés à cette entrée.

Ecrivons $H(P)$ et $E(p)$ sous la forme suivante :

$$H(P) = \frac{N(P)}{D(p)} \quad ; \quad E(p) = \frac{N_e(p)}{D_e(p)} \quad \Rightarrow \quad S(p) = H(P)E(P) = \frac{N(P) N_e(p)}{D(p) D_e(p)}$$

Le nouveau dénominateur $D_n(p)$ de $S(p)$ sera donc composé du dénominateur $D(p)$ de $H(p)$ et du dénominateur caractéristique de l'entrée $D_e(p)$:

$$D_n(p) = p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n D_e(p)$$

Supposons que le dénominateur de l'entrée soit de la forme :

$$D_e(p) = p^\beta \prod (p - p_k)^m \prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$$

On aura donc :

$$D_n(p) = p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n p^\beta \prod (p - p_k)^m \prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$$

On a alors :

- Le regroupement des termes p^α et p^β en $p^{\alpha+\beta}$
- Le regroupement des termes $\prod (p - p_i)^n$ et $\prod (p - p_k)^m$ en un produit $\prod (p - p_i)^n$
- Le regroupement des termes irréductibles $\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$ et $\prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$ en produit $\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$

On aura finalement un dénominateur de la sortie dans le domaine de Laplace de la forme :

$$D_n(p) = p^{\alpha+\beta} \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$$

Et donc la forme de la réponse temporelle associée :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha+\beta} \frac{A_i}{p^i} + \prod \frac{B_i}{(p - p_i)^n} + \prod \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \prod \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.3.c.ii Forme de la réponse temporelle

On peut voir de grandes similitudes de cette réponse par rapport à la réponse impulsionnelle. Il reste en réalité deux cas à regarder pour conclure sur la condition de stabilité associés à la présence de pôles à partie réelle nulle qui en présence d'une impulsion, ne causaient pas de divergence de la sortie temporelle :

• Cas du pôle nul réel

En supposant que la fonction de transfert possède un pôle nul au moins $\left(\frac{1}{p^\alpha}, \alpha \geq 1\right)$ et que l'entrée est quelconque bornée avec un terme $\frac{1}{p^\beta}, \beta \geq 1$ borné, il reste dans la réponse $S(p)$ un terme $\frac{A_i}{p^{\alpha+\beta}}$

La réponse temporelle associée est donc :

$$K \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha + \beta - 1)!} ; \quad \alpha + \beta \geq 2$$

Ce terme diverge.

La présence d'un pôle nul dans $H(p)$ rend le système instable.

• Cas des pôles complexes conjugués d'ordre 1 à partie réelle nulle

En supposant que la fonction de transfert possède deux pôles complexes conjugués à partie réelle nulle simples $\left(\frac{Ap+A'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]}\right)$ et que l'entrée est quelconque bornée avec un terme $\frac{Bp+B'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]^\beta}, \beta \geq$

1 borné, il reste dans la réponse $S(p)$ un terme $\frac{Ap+A'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]^{\beta+1}}$

Comme nous l'avons vu précédemment, la puissance étant supérieure ou égale à 2, la réponse temporelle associée diverge.

A.II.3.c.iii Conclusions

Pour qu'un système réponde par une sortie bornée à une quelconque entrée bornée, il faut qu'aucun pôle ne soit à partie réelle positive ou nulle.

A.II.3.d Conclusion : condition fondamentale de stabilité

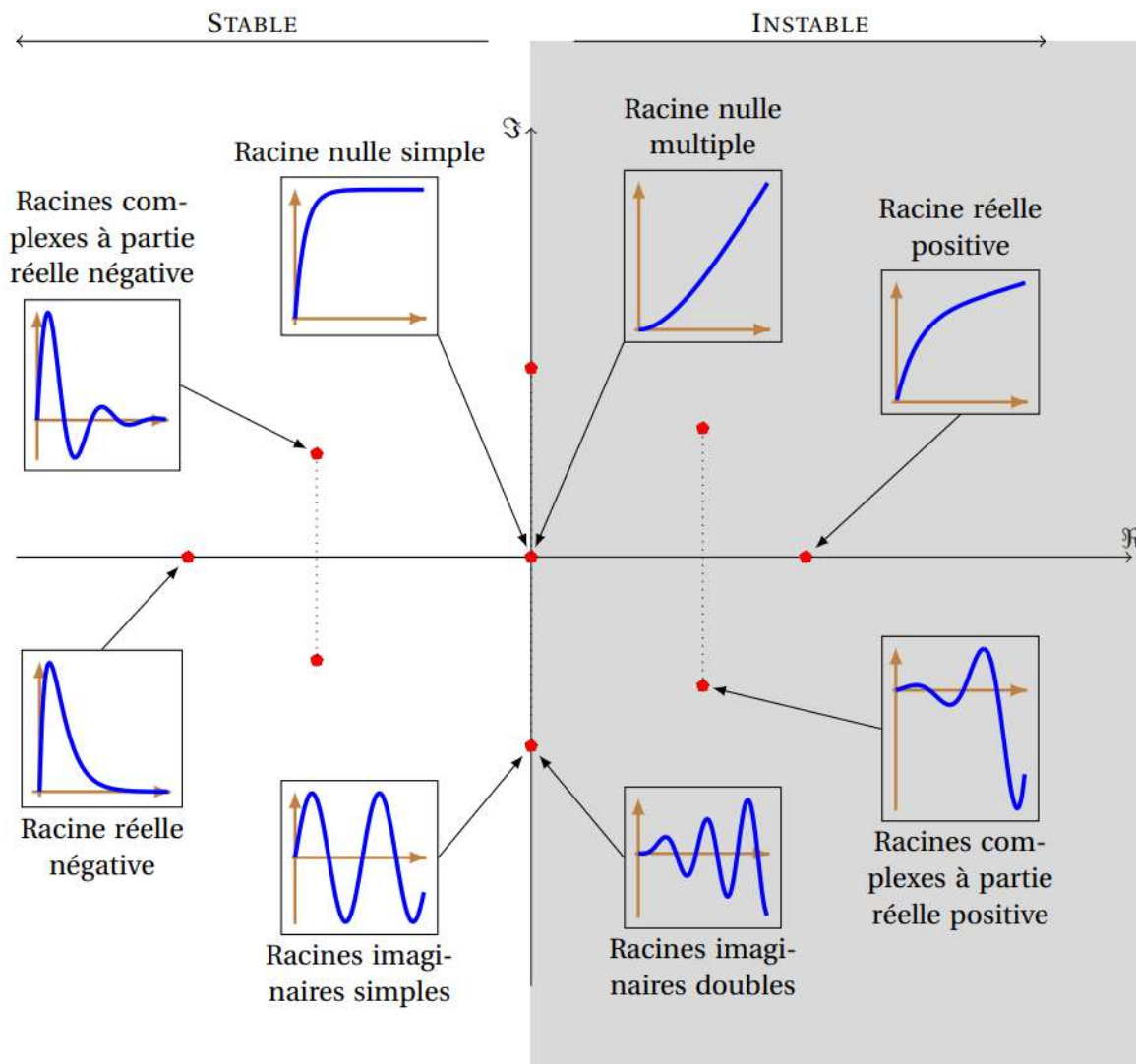
On retiendra la condition fondamentale de stabilité suivante :

Un système linéaire est **stable** si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II.3.e Stabilité et plan complexe : Plan des pôles

On peut selon la position des pôles dans le plan complexe définir la zone de stabilité du système à une réponse impulsionnelle.



Source : cours de Robert Papanicola

A.II.3.f Remarque : Critère de Routh

Un critère hors programme nommé « critère de Routh » permet de connaître le nombre de racines à partie réelle strictement négatives d'un polynôme quelconque. Nous ne l'étudierons donc pas puisqu'il est hors programme mais il était au programme avant la dernière réforme, il est donc possible que vous en entendiez parler.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.4 Stabilité des systèmes du premier et du second ordre

A.II.4.a Système du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Le seul pôle de cette fonction de transfert est :

$$p = -\frac{1}{\tau}$$

Il est à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

⇒ Un système du premier ordre est stable

A.II.4.b Système du second ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont :

$z > 1$	$z = 1$	$z < 1$
$\Delta > 0$ Soient p_1 et p_2 les racines de $D(p)$ $p_i = \omega_0 \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right)$ Comme $z > 1$ $0 < z^2 - 1 < z^2$ $\sqrt{z^2 - 1} < z$ Soit : $sign \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) = sign(-z)$	$\Delta = 0$ Soit p_0 la racine double de $D(p)$ $p_0 = -z\omega_0$	$\Delta < 0$ $H(p) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2z\omega_0 p + p^2}$ $D(p) = p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2$ $\Delta = 4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2$ $\Delta = -4\omega_0^2(1 - z^2) < 0$ $p_i = -z\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - z^2}$

La partie réelle de tous ces pôles est :

$$sign(R_e(p_0)) = sign(-z\omega_0) = -1$$

Cette partie réelle est strictement négative, le système est donc stable.

⇒ Un système du deuxième ordre est stable

A.II.4.c Conclusion

Toute FTBF du 1° ou du 2° ordre correspond à un système stable. Soit non divergent, quelle que soit l'entrée. On ne se limite pas aux entrées connues !!! (Échelon, Dirak).

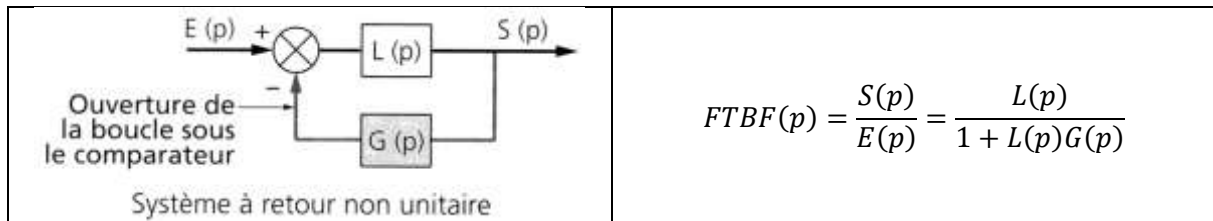
Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5 Mise en place du critère du Revers

Le critère du Revers est un critère graphique qui va nous permettre d'étudier la stabilité d'un système bouclé en étudiant le lieu de transfert de sa FTBO.

A.II.5.a Equation caractéristique des systèmes bouclés

Qu'un système bouclé soit à retour unitaire ou non, on établit sa fonction de transfert en fonction de la FTBO.



Ainsi, l'équation caractéristique de la FTBF d'un système bouclé est

$$1 + L(p)G(p) = 1 + FTBO(p) = 0$$

On peut donc dire qu'un système de fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$ sera stable en boucle fermée si les racines du polynôme $1 + FTBO(p)$ sont toutes à partie réelle strictement négative.

On remarque que lorsque $FTBO(p)$ se rapproche de la valeur -1 , le dénominateur de la fonction de transfert tend vers 0. Sans le démontrer, nous allons voir que ce point de coordonnées $(|H_{j\omega}|, \varphi_{j\omega}) = (1, -180^\circ)$ ou $(G, \varphi_{j\omega}) = (0, -180^\circ)$ dans le plan de Nyquist est un point critique pour la stabilité des systèmes.

Nous l'appellerons donc « point critique ».

Le critère graphique du revers consiste donc à étudier la position de la courbe de réponse harmonique en boucle ouverte par rapport au point critique pour en déduire des conditions de stabilité.

A.II.5.b Principe d'application du critère du Revers

Le critère du revers s'applique à l'étude de la stabilité des systèmes bouclés dont la FTBO est stable. Il donne ainsi la stabilité d'un système bouclé à partir de la connaissance de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Etude de la FTBO \longrightarrow Stabilité de la FTBF

Nous avons vu que les systèmes du premier ordre et du second ordre sont intrinsèquement stables, sauf cas des seconds ordres à amortissement nul, inexistant dans la réalité. Le critère du Revers est donc parfaitement adapté à ces systèmes.

Le critère du Revers est un critère issu du critère de Nyquist, applicable à des systèmes dont la FTBO présente de pôles à partie réelle strictement positive, notion hors programme.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.5.c Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist ne sert qu'à l'introduction du critère du revers. Il s'applique quelle que soit la FTBO d'un système.

Un système continu à boucle fermée est asymptotiquement stable (pas de pôles à partie réelle positive ou nulle) si le lieu de Nyquist complet de la boucle ouverte parcourue dans le sens des ω croissants fait autour du point critique un nombre de tours dans le sens horaire identique au nombre de pôles instables de sa FTBO.

Remarques :

- Pour en savoir plus, voici quelques mots clés à ce sujet : contour de Bromwich – Théorème de Cauchy
- Par lieu de transfert complet, on entend un tracé pour $\omega \in [-\infty, \infty]$

A.II.5.d Critère de Nyquist simplifié

A.II.5.d.i Critère

Le critère de Nyquist simplifié est une conséquence du critère de Nyquist, dans le cas où **la boucle ouverte est stable**.

Extension : Le critère de Nyquist simplifié **reste vrai en présence d'un pôle nul** (intégrateur) dans la BO

La formulation du critère devient la suivante :

Un système continu à boucle fermée est asymptotiquement stable si le lieu de Nyquist complet de la BO (avec au plus un pôle nul) parcouru dans le sens des ω croissants ne fait pas le tour du point critique dans le sens horaire.

Attention : Le fait que le critère soit fréquentiel ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée du système est sinusoïdale. Tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en séries de Fourier et donc considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.d.ii Exemples

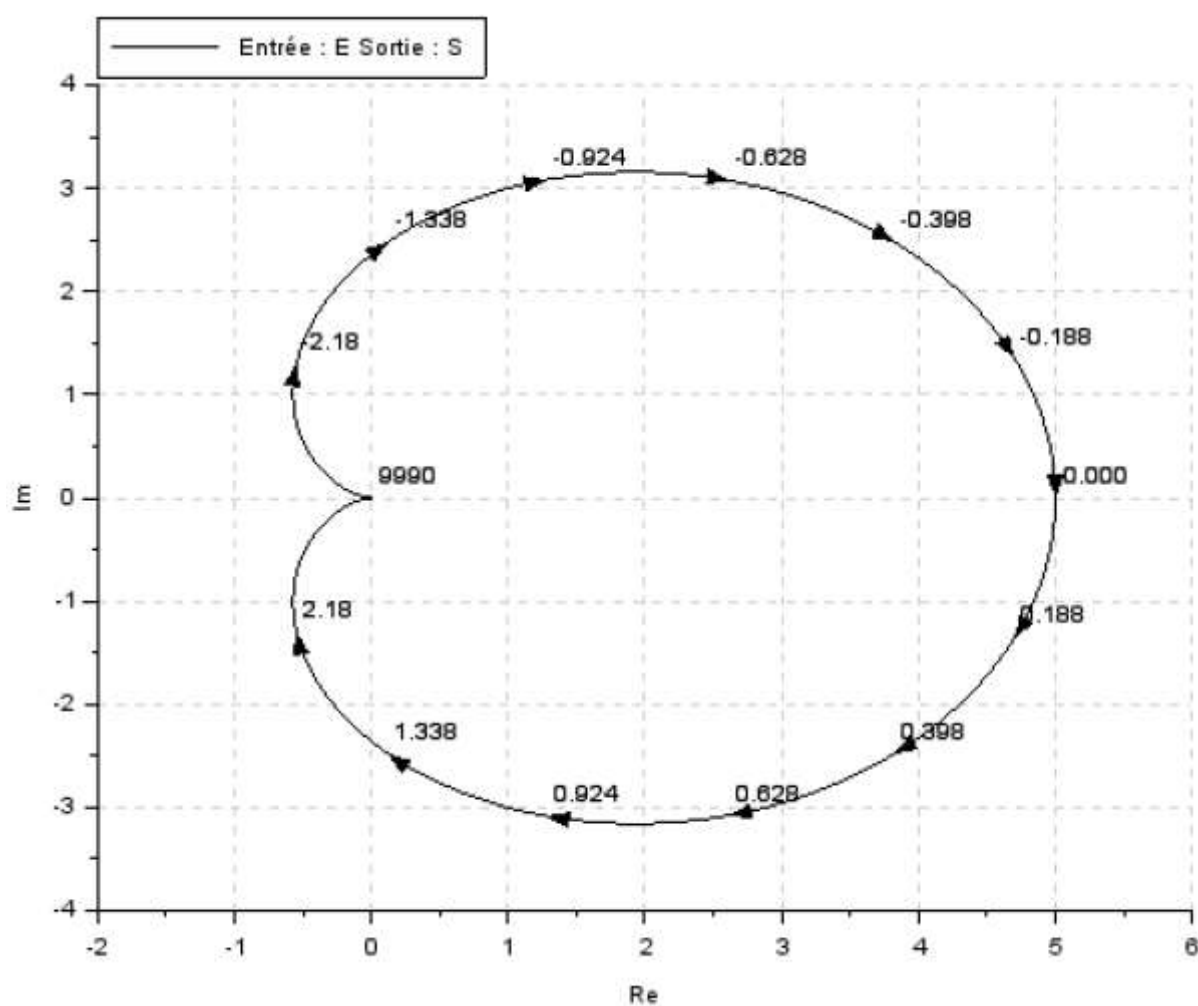
Ne traitons que des exemples du critère de Nyquist simplifié ou la FTBO est stable.

• Systeme stable

Soit $H(p) = \frac{10}{(p+1)(p+2)}$

Les deux pôles de $H(p)$ valent -1 et -2 et sont donc à partie réelle strictement négative.

Voici le lieu de Nyquist complet de $H(p)$ pour $\omega \in [-\infty, \infty]$:



La fonction de transfert $H(p)$ possédant 2 pôles réels négatifs, le système en boucle fermée n'est stable que si le point critique n'est pas entouré en sens horaire, ce qui est le cas ici.

Le système est stable en boucle fermée.

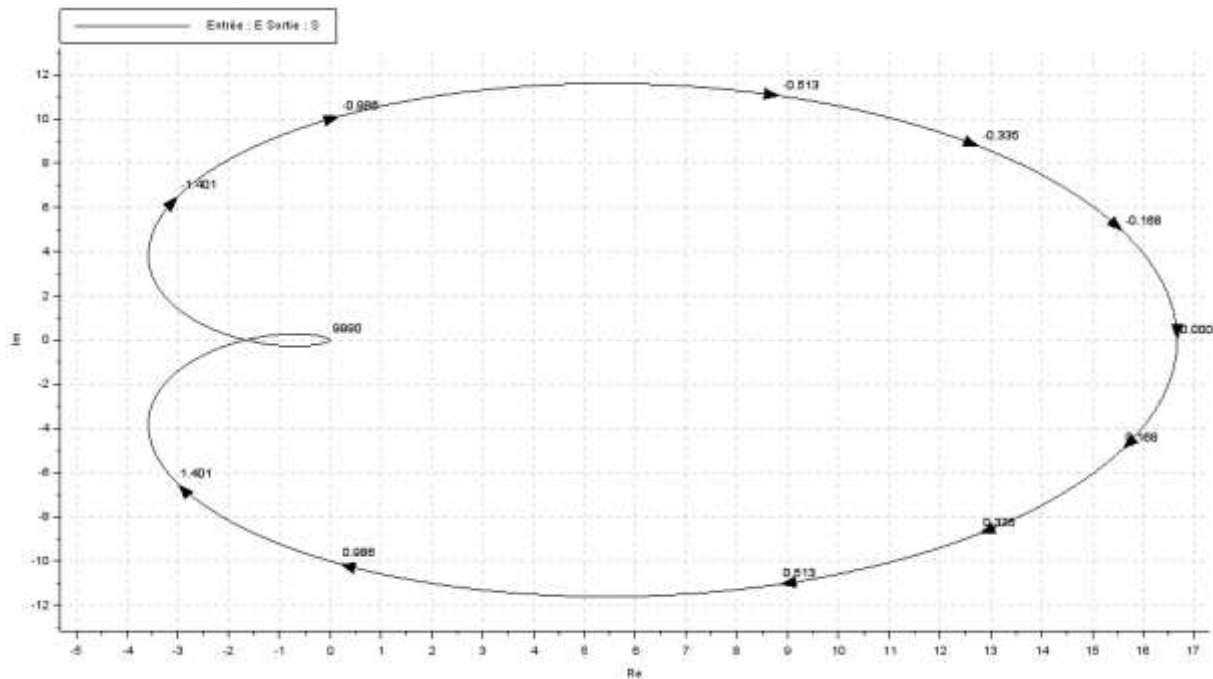
Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

• **Système instable**

Soit $H(p) = \frac{100}{(p+1)(p+2)(p+3)}$

Les trois pôles de $H(p)$ valent -1 , -2 et -3 et sont donc à partie réelle strictement négative.

Voici le lieu de Nyquist complet de $H(p)$ pour $\omega \in [-\infty, \infty]$:



La fonction de transfert $H(p)$ possédant 3 pôles réels négatifs, le système en boucle fermée n'est stable que si le point critique n'est pas entouré en sens horaire, ce qui n'est le cas ici.

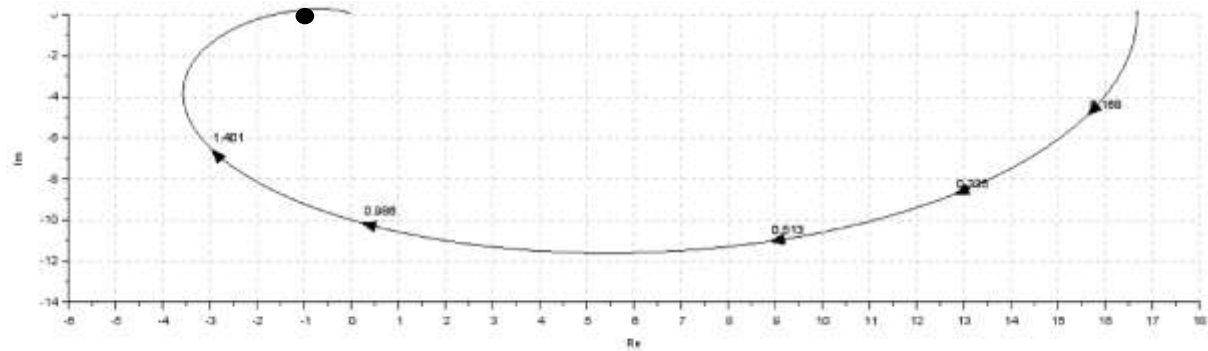
Le système est instable en boucle fermée.

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II.5.e Critère du Revers

Le critère du Revers découle directement du critère de Nyquist simplifié et permet d'étudier le passage du lieu de Nyquist sur l'intervalle $\omega \in [0, \infty]$.

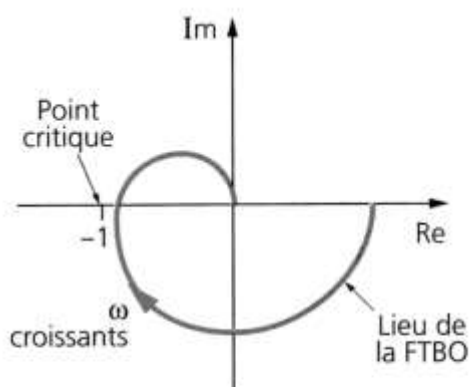
En effet, étudier le lieu de Nyquist complet sur l'intervalle $\omega \in [-\infty, \infty]$ et regarder si le point critique est entouré en sens horaire revient à n'étudier que la moitié de la courbe sur l'intervalle $\omega \in [0, \infty]$ et à regarder si le point critique est laissé à gauche de la courbe lorsqu'on la parcourt dans le sens des pulsations ω croissantes.



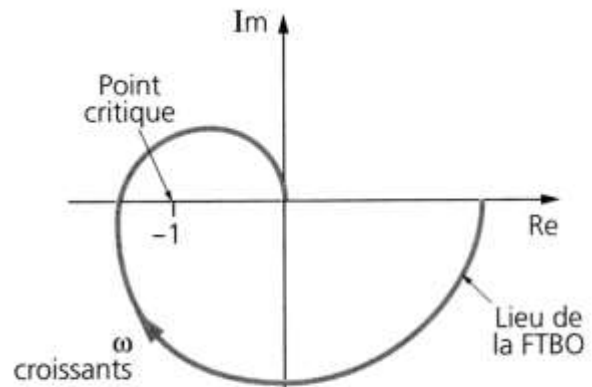
Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e.i Dans Nyquist

En supposant la FTBO stable en acceptant au plus un pôle nul, un système asservi linéaire est stable en boucle fermée si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de Nyquist, on laisse le point critique à gauche du lieu. Dans le cas contraire, il est instable.

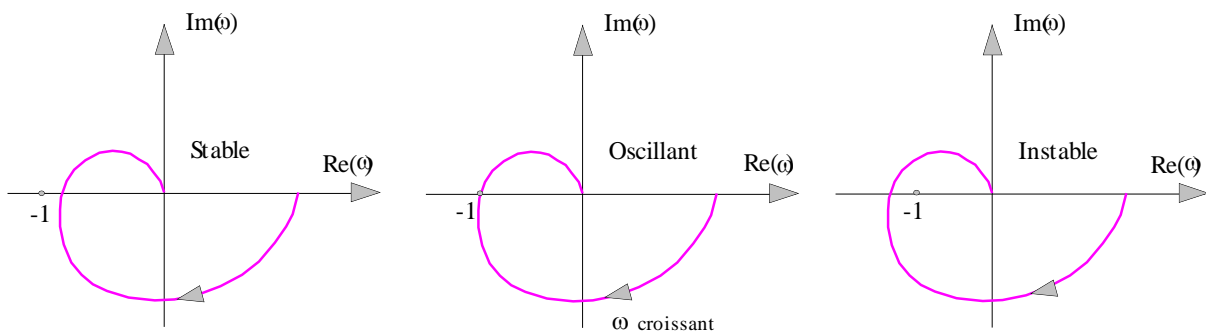


Le point critique est à gauche
Le système est **stable**
en boucle fermée



Le point critique est à droite
Le système est **instable**
en boucle fermée

Stabilité graphique dans le plan de Nyquist

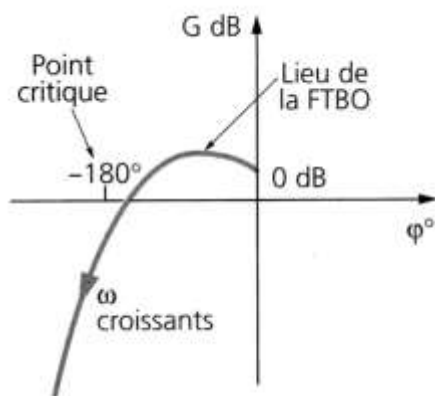


NYQUIST – PC à GAUCHE

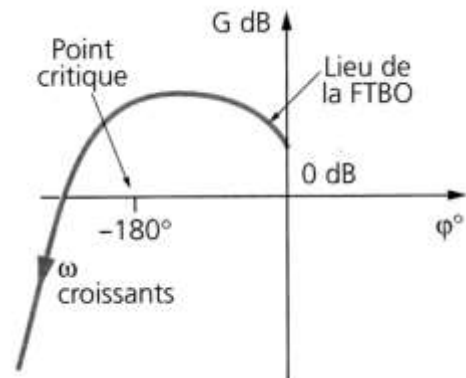
Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e.ii Dans black

En supposant la FTBO stable en acceptant au plus un pôle nul, un système est stable en boucle fermée si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de Black, on laisse le point critique à droite du lieu. Dans le cas contraire, il est instable.

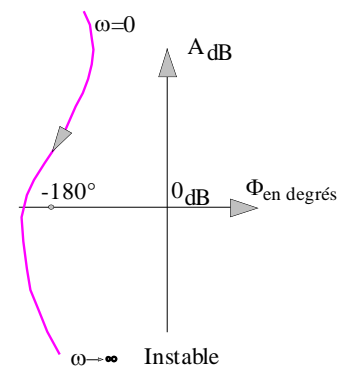
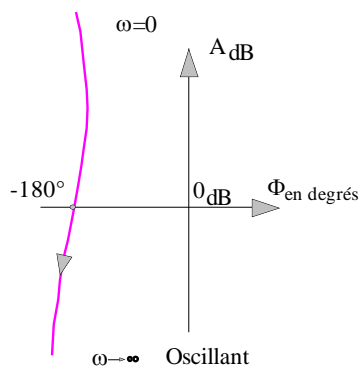
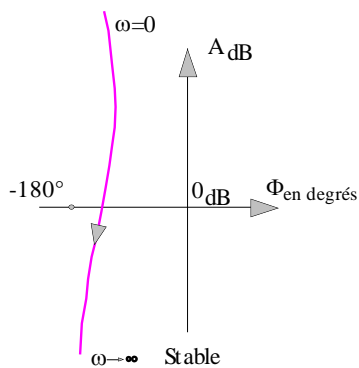


Le point critique est à droite
Le système est stable
en boucle fermée



Le point critique est à gauche
Le système est instable
en boucle fermée

Stabilité graphique dans le plan de Black



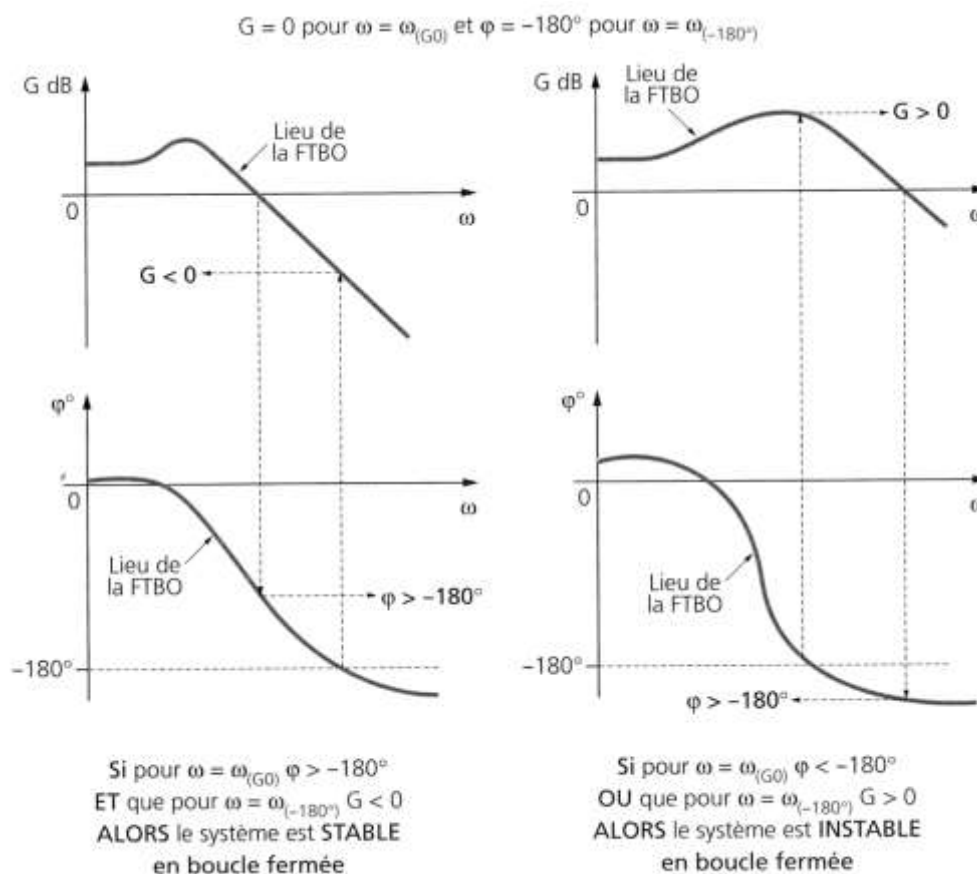
BLACK – PC à DROITE

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e.iii Dans Bode

En supposant la FTBO stable en acceptant au plus un pôle nul, un système est stable en boucle fermée si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le diagramme de Bode, on respecte les deux conditions :

- à la pulsation de coupure ω_{c_0} pour laquelle $G = 0 \text{ dB}$, le déphasage est supérieur à -180°
- à la pulsation ω_{-180° pour laquelle le déphasage est égal à -180° , le gain est inférieur à 0 dB

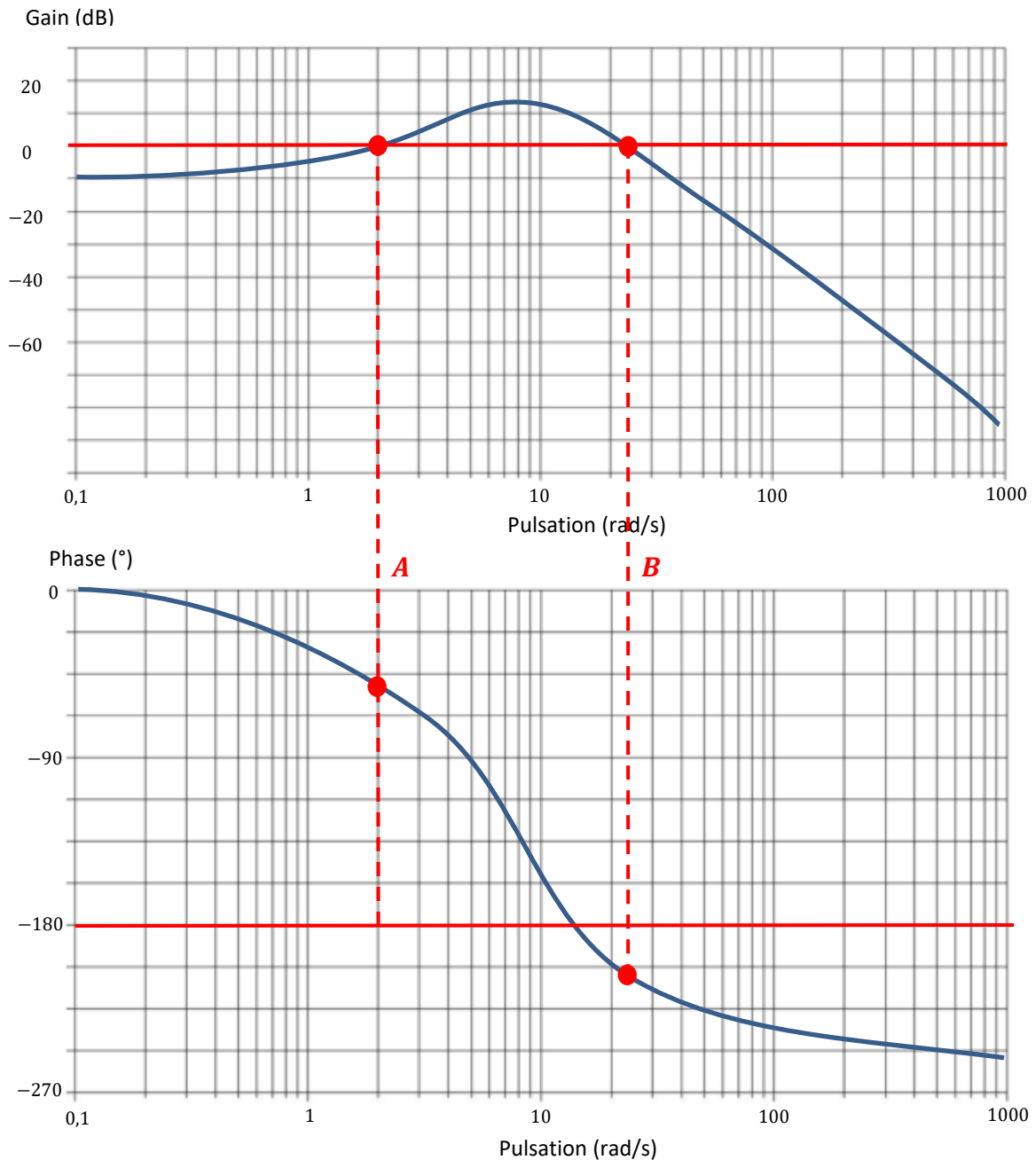


Stabilité dans le diagramme de Bode

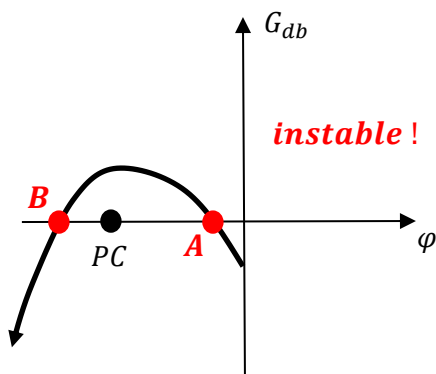
Remarques :

- Lorsqu'une fonction est monotone décroissante, une seule des conditions peut être vérifiée, l'autre étant automatiquement aussi vérifiée
- Lorsque vous avez le moindre doute, vous pourrez vous reporter au critère appliqué dans Nyquist, ou encore plus simplement, dans Black puisque vous avez directement le gain et la phase de Bode (cf exemple en page suivante).
- Si $K_{BO} < 1$ et si le gain ne remonte pas, ω_{c_0} n'existe pas et on ne pourra pas vérifier le critère de phase. De même si la phase ne descend pas en dessous de -180° , ω_{-180} n'existe pas, on ne pourra pas vérifier le critère de gain.
 - o Si les fonctions sont monotones décroissantes, on pourra simplement vérifier le second critère
 - o Sinon, on se rapportera à Black par exemple

Exemple de cas indéterminé dans Bode :



Le système est-il stable en BO ? Le mieux est de se rapporter au diagramme de Black ! Qui ressemble dans la forme à :



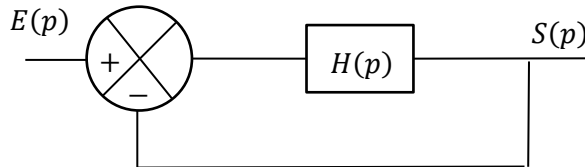
On peut imaginer pas mal de situations différentes, par exemple si la phase remonte au dessus de -180° ... Je ne définirai pas de règles qui doivent probablement exister sur l'un ou l'autre des critères, surtout qu'il est souhaitable que les concours ne vous posent pas ce genre de cas. Toutefois, maintenant, vous savez traiter les cas non communs

A.II.5.f Applications

A.II.5.f.i Préliminaires

Nous avons montré précédemment que tout système du premier et du second ordre est stable.

Etudions à titre d'exemples la stabilité de systèmes bouclés à retour unitaire dont la FTBO est du premier ou du second ordre.



Nous pouvons appliquer le critère du Revers à des systèmes bouclés dont la FTBO $H(p)$ est du 1° ou du 2° ordre puisque la FTBO est stable.

A.II.5.f.ii Système du premier ordre bouclé à retour unitaire

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

• Calcul de la FTBF

On peut étudier les pôles de la FTBF pour conclure sur la stabilité :

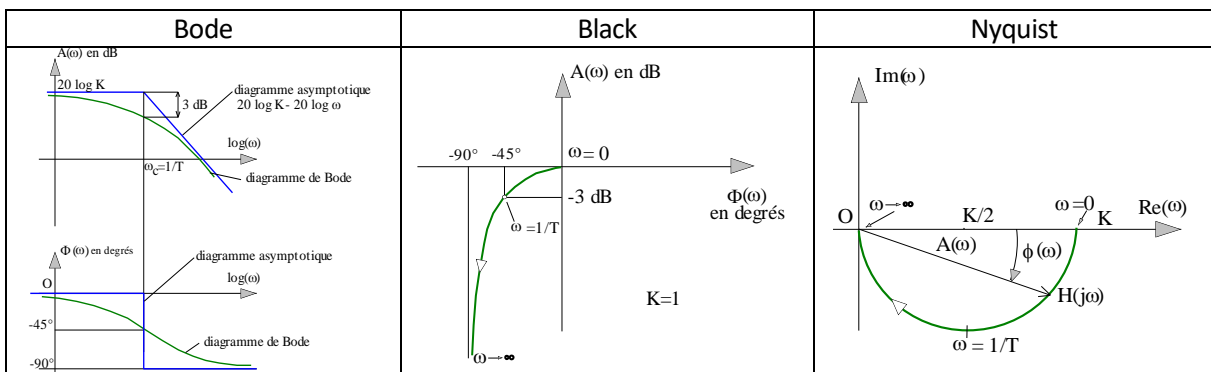
$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K}{1 + K + \tau p} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K} p}$$

La FTBF d'un système bouclé du premier ordre à retour unitaire est du premier ordre, nous avons vu précédemment que ses pôles sont à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

1° ordre en BF – Stable en BF grâce aux pôles

• Critère du Revers (FTBO)

Application du critère du Revers : on trace le lieu de la FTBO



L'application du critère du Revers dans les 3 diagrammes montre **qu'un système bouclé à retour unitaire du 1° ordre est stable.**

1° ordre en BO – Stable en BF grâce au Revers

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II.5.f.iii Système du second ordre bouclé à retour unitaire

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

• Calcul de la FTBF

On peut étudier les pôles de la FTBF pour conclure sur la stabilité :

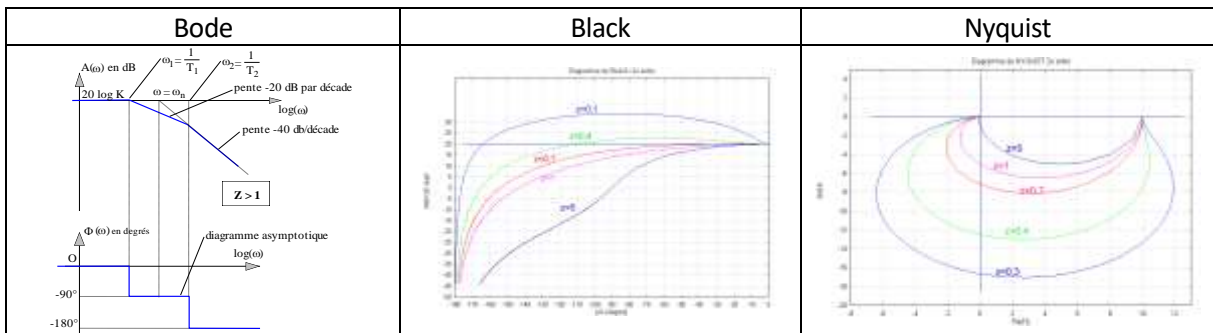
$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{1 + K + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{2z}{(1 + K)\omega_0} p + \frac{p^2}{(1 + K)\omega_0^2}} \end{aligned}$$

La FTBF d'un système bouclé du second ordre à retour unitaire est du second ordre, nous avons vu précédemment que ses pôles sont à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

2° ordre en BF – Stable en BF grâce aux pôles

• Critère du Revers (FTBO)

Application du critère du Revers : on trace le lieu de la FTBO



L'application du critère du Revers dans les 3 diagrammes montre **qu'un système bouclé à retour unitaire du 2° ordre est stable.**

2° ordre en BO – Stable en BF grâce au Revers

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.f.iv Conclusions

Pour qu'un système bouclé à retour unitaire puisse être instable, il faut que sa fonction de transfert en boucle ouverte soit au moins du troisième ordre.

Cependant, l'étude précédente montre qu'un système dont la FTBO est du second ordre passe plus près du point critique qu'un système dont la FTBO est du premier ordre. On introduit alors la notion de « marge de stabilité », c'est-à-dire de distance de sécurité par rapport à un fonctionnement instable, souvent très néfaste aux systèmes. De plus, les systèmes du premier et du second ordre que nous étudions ne sont qu'une modélisation de systèmes réels dont l'ordre est souvent supérieur.

A.II.5.g Marges de stabilité

A.II.5.g.i Définitions

• Marge de gain

On appelle « marge de gain », exprimée en décibel, la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain.

Elle correspond à l'opposé du gain lorsque la phase vaut -180° :

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|}$$

Si la phase reste au-dessus de -180° , on dit que la marge de gain est infinie.

• Marge de phase

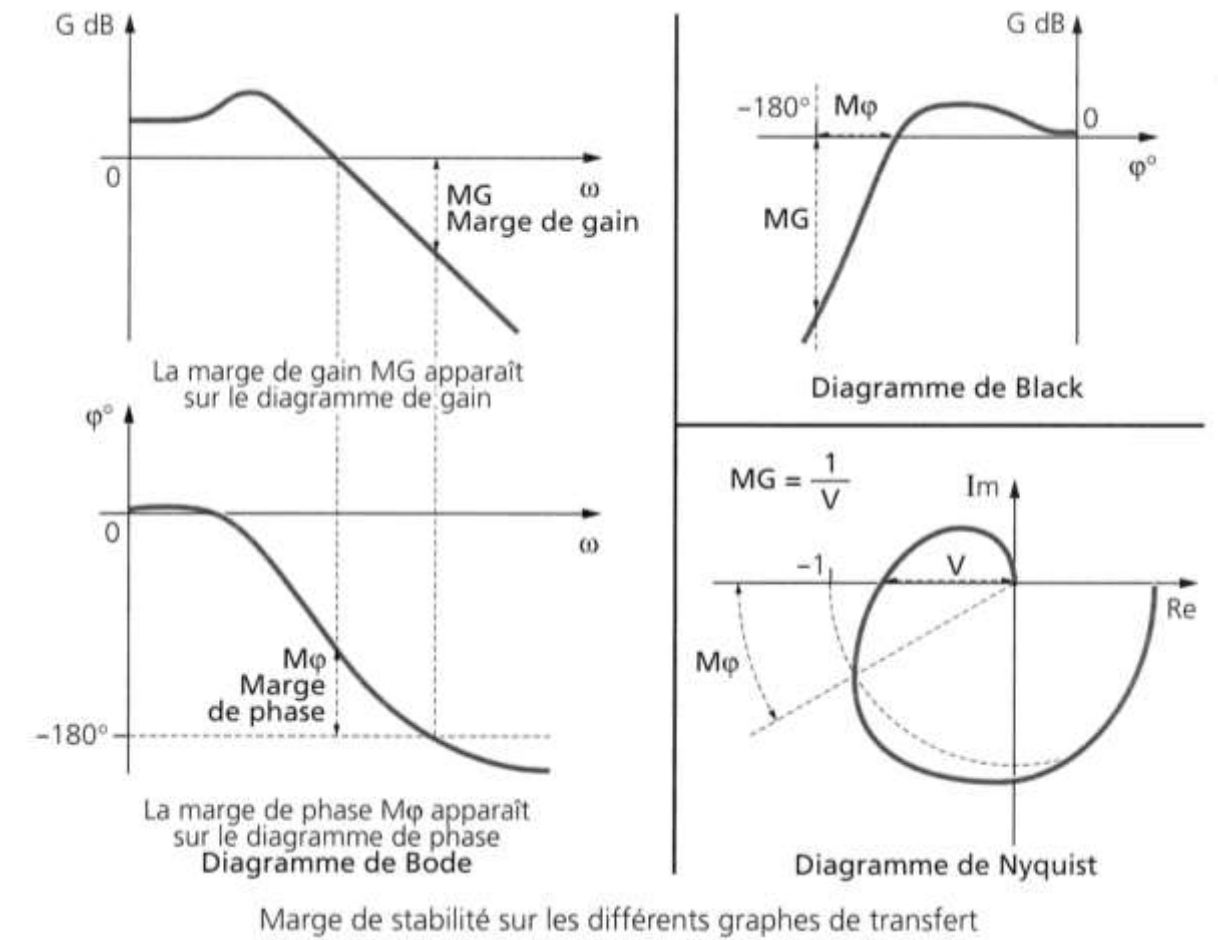
On appelle « marge de phase », exprimée en degré, la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique mesurée parallèlement à l'axe de la phase.

Elle correspond à la différence entre la phase lorsque le gain est nul et la valeur $-\pi$:

$$\Delta \varphi = \arg H(j\omega_{c_0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c_0})$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.g.ii Calcul graphique des marges



Explication de la marge de gain associée au module $\frac{1}{V}$:

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|} = 20 \log \frac{1}{V}$$

Remarque : On remarque très clairement que si le gain augmente, les marges de stabilité diminuent.

A.II.5.g.iii Calcul analytique des marges

• Marge de gain

Lorsque la phase vaut -180° , la marge de gain est l'opposé du gain.

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|}$$

Il faut donc déterminer ω_{-180° :

$$\arg H(j\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$$

Il est souvent plus aisé de calculer la marge de phase que de résoudre cette équation, qui n'a pas forcément de solution (2^e ordre par exemple).

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

• **Marge de phase**

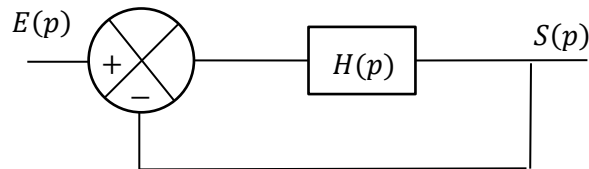
Lorsque le gain est nul, soit à la pulsation de coupure à 0 dB ω_{c_0} , la marge de phase est la distance entre la phase et $-\pi$:

$$\Delta\varphi = \arg H(j\omega_{c_0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c_0})$$

Il faut donc déterminer ω_{c_0} .

Que ce soit un 1° ordre ou un 2° ordres, pour qu'il existe une pulsation de coupure à 0 dB, il est nécessaire que K_{BO} soit supérieur à 1 car l'asymptote horizontale aux faibles pulsations vaut $20 \log K_{BO}$.

Exemple d'un premier ordre bouclé : $K_{BO} > 1$



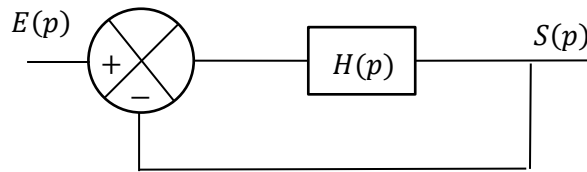
$$H(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}$$

$$|H(j\omega_{c_0})| = \frac{K_{BO}}{\sqrt{1 + \tau_{BO}^2 \omega_{c_0}^2}} = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau_{BO}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K_{BO}^2 - 1}}$$

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c_0}) = \pi - \tan^{-1}(\tau_{BO}\omega_{c_0}) = \pi - \tan^{-1}\left(\sqrt{K_{BO}^2 - 1}\right)$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

Exemple d'un second ordre bouclé : $K_{BO} > 1$



$$H(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2z_{BO}}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{2z}{(1 + K_{BO})\omega_0} p + \frac{p^2}{(1 + K_{BO})\omega_0^2}} \quad ; \quad z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$$

On indicera pas les pulsation avec « BO ».

$$|H(j\omega_{c_0})| = \frac{K_{BO}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\frac{z_{BO}^2 \omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 2(2z_{BO}^2 - 1)\frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2} + 1 - K_{BO}^2 = 0$$

$$X = \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2} > 0$$

$$X^2 + 2(2z_{BO}^2 - 1)X + 1 - K_{BO}^2 = 0$$

Comme $K_{BO} > 1$

$$\Delta = 4(2z_{BO}^2 - 1)^2 + 4(K_{BO}^2 - 1) > 0$$

$$X = \frac{(1 - 2z_{BO}^2)2 + \sqrt{4(2z_{BO}^2 - 1)^2 + 4(K_{BO}^2 - 1)}}{2}$$

$$X = (1 - 2z_{BO}^2) + \sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)}$$

Comme $\omega_{c_0} > 0$ (pulsation réelle)

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + (1 - 2z_{BO}^2)}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

Reprenons les formules de 1^o année pour mettre un lien entre la marge de phase de la FTBO et le coefficient d'amortissement z_{BF} :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c_0}) = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z_{BO} \frac{\omega_{c_0}}{\omega_0}\right)^2}} \right)$$

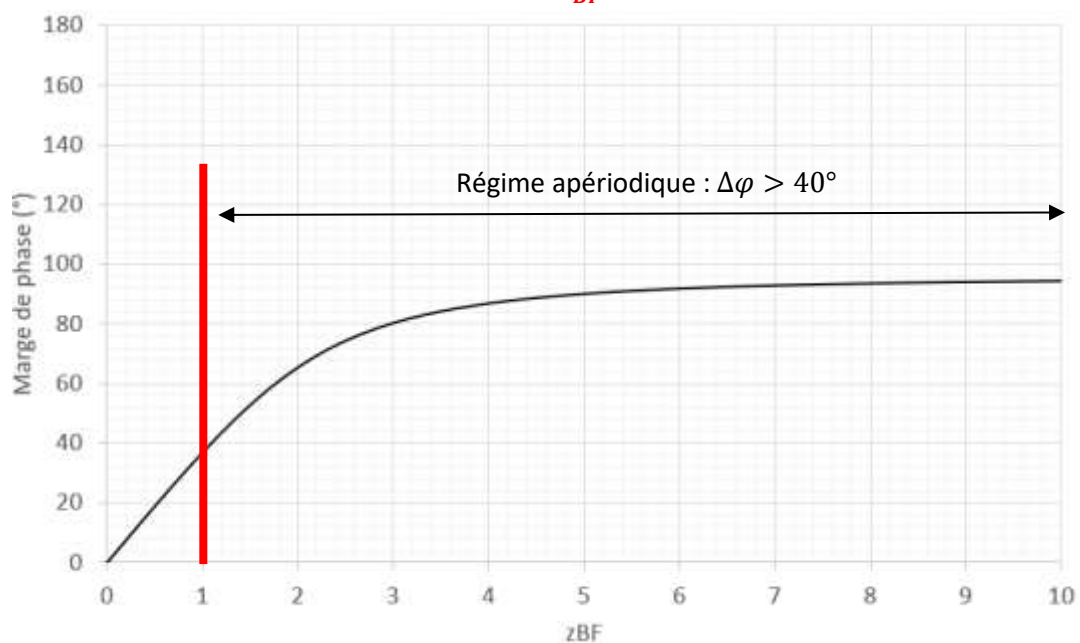
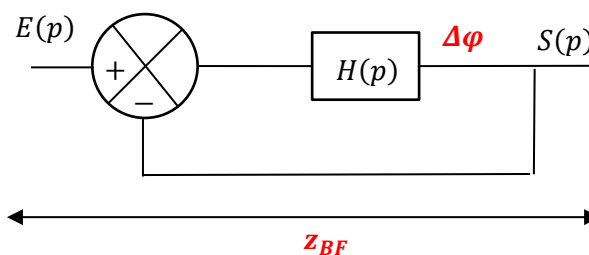
Formule dans laquelle on injecte ω_{c_0} :

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + (1 - 2z_{BO}^2)}$$

Dans laquelle on injecte z_{BO} :

$$z_{BO} = z_{BF} \sqrt{1 + K_{BO}}$$

Sans donner la formule à rallonge obtenue, voici la courbe de la marge de phase en fonction de z_{BF} pour $K_{BO} = 10$ par exemple :



On remarque que plus la marge de phase diminue, plus le coefficient d'amortissement z diminue. Le comportement oscillatoire est donc directement lié à la marge de phase du système.

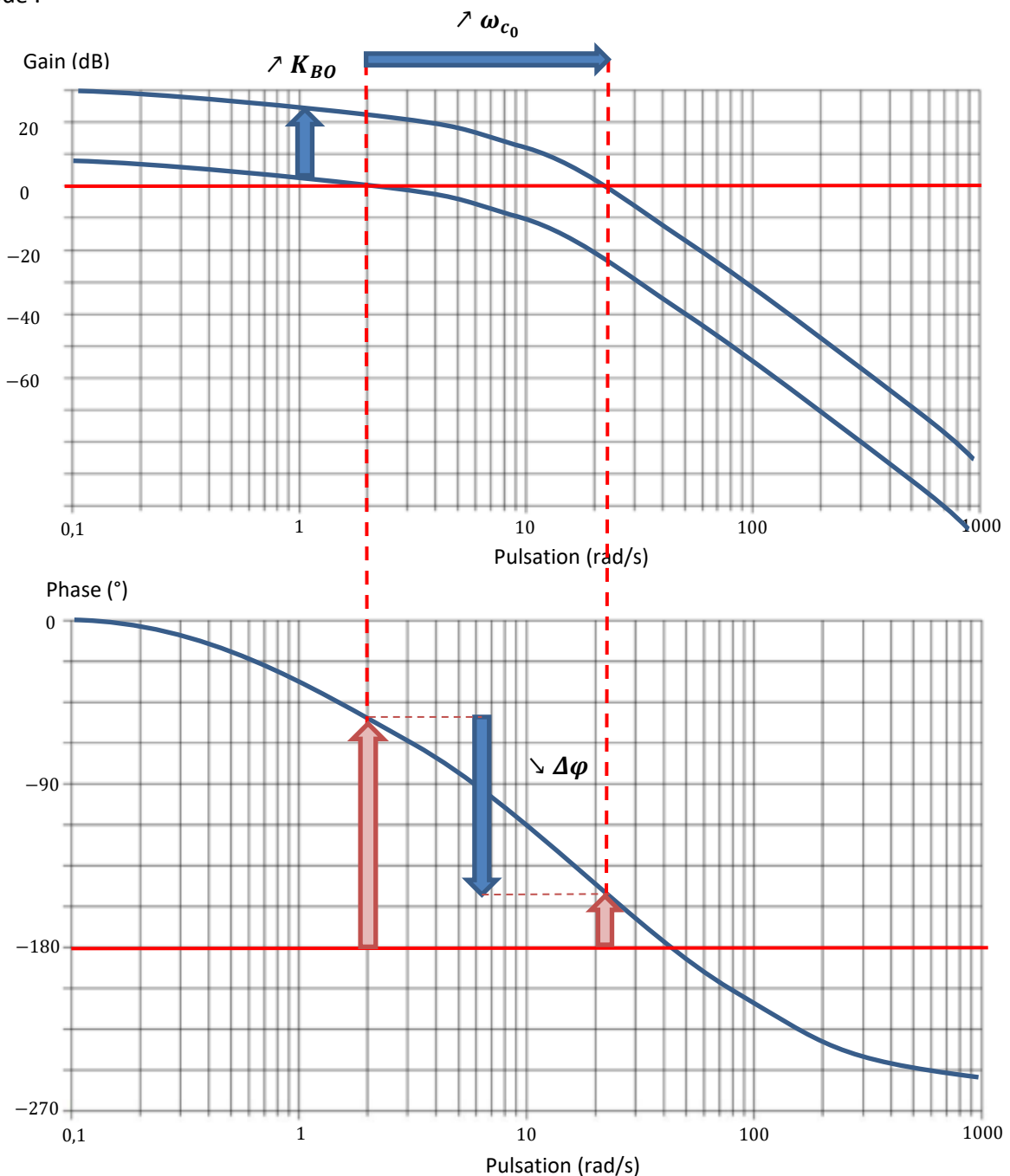
A.II.5.g.iv Valeurs générales

On retient, en général, pour des raisons expérimentales, les valeurs suivantes :

- Marge de gain minimale : 10 à 15 dB
- Marge de phase minimale : 45° à 60°

A.II.5.g.v Influence de K_{BO} sur la stabilité

Augmenter K_{BO} dans un système revient à remonter la courbe de gain sans influencer la phase. Dans les systèmes causaux (gain décroissant), augmenter K_{BO} augmente ω_{c_0} , diminue donc $\varphi_{\omega_{c_0}}$, diminue $\Delta\varphi$ et diminue donc la stabilité. Ce résultat est très simple à retrouver en traçant un diagramme de Bode :



Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.6 Conclusions sur la stabilité

Pour étudier la stabilité d'un système asservi, il est possible

- Soit de déterminer sa *FTBF* et de déterminer ses pôles qui doivent être à partie réelle strictement négative
- Soit d'étudier sa *FTBO* (si le système est bouclé) avec le critère du revers tant qu'elle n'a pas de pôles à partie réelle strictement positive. On pourra alors déterminer, si elles existent, marge de phase et marge de gain, c'est-à-dire la distance du lieu de transfert de la *FTBO* au point critique

Pour un système stable, plus le tracé est proche du point critique, plus les marges de stabilité diminuent.

Une diminution du gain de la FTBO diminue la pulsation de coupure à 0dB, augmente les marges et augmente donc la stabilité.

A.II.7 Remarque TVF

L'application du théorème de la valeur finale nécessite d'étudier la stabilité du système au préalable. Si un système est instable, ne pas parler de valeur finale. Exemple :

$$H(p) = \frac{1}{p-a} \text{ avec } a > 0 \quad ; \quad E(p) = \frac{1}{p} \quad ; \quad S(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{p-a} = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-a} \right)$$

Racine réelle positive $a \Rightarrow$ système instable

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{p-a} = -\frac{1}{a}$$

Or :

$$s(t) = -\frac{1}{a} (1 - e^{at}) u(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{a} (1 - e^{at}) \right] = +\infty$$

De même, en cas de réponse harmonique (limite de stabilité, système oscillant), le *TVF* donne un résultat faux