

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

Performances des systèmes asservis

Cours

Programme - Compétences		
B226	Modéliser	Systèmes non linéaires · Modèle de non linéarité (hystérésis, saturation, seuil, retard) ; · Linéarisation du comportement des systèmes non linéaires continus.
B227	Modéliser	Modélisation des systèmes asservis · Stabilité : - définition, nature de l'instabilité (apériodique, oscillatoire), - contraintes technologiques engendrées, - interprétation dans le plan des pôles, - critère du revers, - marges de stabilité, - dépassement.
B228	Modéliser	· Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle ; · Performances et réglages ; · Précision d'un système asservi en régime permanent pour une entrée en échelon, une entrée en rampe, une entrée en accélération ; · Rapidité d'un système asservi : - temps de réponse, - bande passante.
B229	Modéliser	· Amélioration des performances d'un système asservi ; - critères graphiques de stabilité dans les plans de Black, Bode, marges de stabilité ; - influence et réglage d'une correction proportionnelle, intégrale, dérivée ; - prise en compte d'une perturbation constante, créneau ou sinusoïdale.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A. Performances des systèmes asservis.....	5
A.I. Introduction	5
A.I.1 Objectifs	5
A.I.2 Remarque importante.....	5
A.II. Stabilité d'un système bouclé.....	6
A.II.1 Introduction sur la notion d'équilibre	6
A.II.1.a Pendule	6
A.II.1.b Masse en contact ponctuel parfait	6
A.II.2 Définitions.....	7
A.II.2.a Equilibre Stable - Instable	7
A.II.2.b Système à la limite de la stabilité	7
A.II.2.c Système stable	7
A.II.3 Condition fondamentale de stabilité d'un système	8
A.II.3.a Pôles d'une fonction de transfert	8
A.II.3.b Réponse impulsionnelle.....	8
A.II.3.b.i Forme de la réponse dans Laplace	8
A.II.3.b.ii Forme de la réponse temporelle	9
A.II.3.b.iii Analyse de stabilité.....	9
• Termes de type 1	9
• Termes de type 2	9
• Termes de type 3	10
• Termes de type 4	10
A.II.3.b.iv Conclusions.....	10
A.II.3.c Entrées quelconques.....	11
A.II.3.c.i Forme de la réponse dans Laplace	11
A.II.3.c.ii Forme de la réponse temporelle	12
• Cas du pôle nul réel	12
• Cas des pôles complexes conjugués d'ordre 1 à partie réelle nulle	12
A.II.3.c.iii Conclusions	12
A.II.3.d Conclusion : condition fondamentale de stabilité	12
A.II.3.e Stabilité et plan complexe : Plan des pôles.....	13
A.II.3.f Remarque : Critère de Routh.....	13
A.II.4 Stabilité des systèmes du premier et du second ordre.....	14
A.II.4.a Système du premier ordre	14
A.II.4.b Système du second ordre	14
A.II.4.c Conclusion	14
A.II.5 Mise en place du critère du Revers.....	15
A.II.5.a Equation caractéristique des systèmes bouclés	15
A.II.5.b Principe d'application du critère du Revers.....	15
A.II.5.c Critère de Nyquist	16
A.II.5.d Critère de Nyquist simplifié	16
A.II.5.d.i Critère.....	16
A.II.5.d.ii Exemples.....	17
• Système stable.....	17
• Système instable.....	18
A.II.5.e Critère du Revers	19
A.II.5.e.i Dans Nyquist.....	20

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e.ii Dans black.....	21
A.II.5.e.iii Dans Bode.....	22
A.II.5.f Applications.....	24
A.II.5.f.i Préliminaires.....	24
A.II.5.f.ii Système du premier ordre bouclé à retour unitaire.....	24
• Calcul de la FTBF.....	24
• Critère du Revers (FTBO).....	24
A.II.5.f.iii Système du second ordre bouclé à retour unitaire.....	25
• Calcul de la FTBF.....	25
• Critère du Revers (FTBO).....	25
A.II.5.f.iv Conclusions.....	26
A.II.5.g Marges de stabilité.....	26
A.II.5.g.i Définitions.....	26
• Marge de gain.....	26
• Marge de phase.....	26
A.II.5.g.ii Calcul graphique des marges.....	27
A.II.5.g.iii Calcul analytique des marges.....	27
• Marge de gain.....	27
• Marge de phase.....	28
A.II.5.g.iv Valeurs générales.....	31
A.II.5.g.v Influence de KBO sur la stabilité.....	31
A.II.6 Conclusions sur la stabilité.....	32
A.II.7 Remarque TVF.....	32
A.III. Précision.....	33
A.III.1 Introduction.....	33
A.III.1.a Systèmes stables.....	33
A.III.1.b Mise en place du problème.....	33
A.III.1.c Ecart - Erreur – Définition.....	34
A.III.1.d Calcul de l'écart statique.....	35
A.III.2 Calcul des écarts au comparateur A des systèmes.....	36
A.III.2.a Expression générale de l'écart au comparateur A	36
A.III.2.b Calcul de l'écart au comparateur A	37
A.III.2.c Conclusions.....	38
A.III.2.c.i Ecart statique.....	38
A.III.2.c.ii Ecart de vitesse.....	38
A.III.2.d Détermination de l'erreur en fonction de A	39
A.III.2.d.i Expression.....	39
A.III.2.d.ii Proportionnalité écart / erreur (Concours !!!).....	39
A.III.3 KBF des systèmes bouclés et erreur.....	40
A.III.3.a Détermination de KBF selon la classe.....	40
A.III.3.a.i FTBO de classe nulle: $\alpha = 0$	40
A.III.3.a.ii FTBO de classe au moins égale à 1 : $\alpha \geq 1$	41
A.III.3.b Erreur statique des systèmes connaissant KBF	41
A.III.4 Choix du gain avant comparateur.....	42
A.III.4.a Présentation du problème.....	42
A.III.4.b Idées reçues.....	42
A.III.4.c Choix de G'	43
A.III.4.d Modification de schéma bloc.....	44

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.III.4.e Erreur à ne pas faire.....	45
A.III.4.f Conclusions.....	46
A.III.5 Influence des perturbations.....	47
A.III.5.a Problème étudié.....	47
A.III.5.b Calcul de l'écart au premier comparateur.....	47
A.III.5.c Conclusions.....	49
A.III.6 Conclusions sur la précision.....	49
A.IV. Rapidité.....	50
A.IV.1 Définition.....	50
A.IV.2 Critères de rapidité.....	50
A.IV.2.a Temps de réponse à $X\%$	50
A.IV.2.b Temps de montée.....	50
A.IV.2.c Bande passante.....	51
A.IV.3 Application aux systèmes du premier et second ordre.....	52
A.IV.3.a Systèmes non bouclés.....	52
A.IV.3.a.i Premier ordre.....	52
• Temps de réponse à 5%.....	52
• Temps de montée.....	52
• Rapidité et bande passante.....	52
A.IV.3.a.ii Deuxième ordre.....	53
• Temps de réponse à 5%.....	53
• Temps de montée.....	54
• Rapidité et bande passante.....	55
A.IV.3.a.iii Conclusions.....	56
A.IV.3.b Systèmes bouclés.....	57
A.IV.3.b.i Premier ordre bouclé.....	57
• Temps de réponse à 5%.....	57
• Temps de montée.....	57
• Rapidité et bande passante.....	57
A.IV.3.b.ii Second ordre bouclé.....	58
• Temps de réponse à 5%.....	58
• Temps de montée.....	58
• Rapidité et bande passante.....	59
A.IV.3.b.iii Conclusions.....	59
A.IV.4 Conclusions sur la rapidité.....	59
A.V. Dépassement.....	60

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A. Performances des systèmes asservis

A.I. Introduction

A.I.1 Objectifs

L'objectif de ce cours est d'étudier les performances des systèmes asservis (stabilité, précision, rapidité) dans le but de répondre à un besoin de l'utilisateur.

L'asservissement est-il stable ? La valeur finale est-elle obtenue après un grand nombre d'oscillations ? Un équilibre peut-il être atteint ? Ne risque-t-on pas des oscillations permanentes ?

L'asservissement est-il précis ? L'écart ε entre la consigne affichée et la sortie obtenue est-il élevé ou faible, voire nul, pour une loi de consigne déterminée ?

L'asservissement est-il rapide ? La valeur de sortie est-elle atteinte au bout d'un temps suffisamment court pour être compatible avec le besoin de l'application ?

Nous étudierons ces différents aspects et verrons que la solution est toujours un compromis illustrant ce que l'on appelle le « dilemme stabilité-précision ».

Les performances en régime transitoire sont essentielles pour obtenir une commande de qualité conforme aux besoins de l'utilisateur. Les qualités demandées à un régime transitoire sont la rapidité et l'amortissement. Un système asservi de qualité doit être rapide et bien amorti.

Après avoir étudié ces différents aspects, nous verrons si nous pouvons les améliorer.

A.I.2 Remarque importante

Nous allons établir des résultats généraux d'influence de réglage de la FTBO d'un système asservi (bouclé) qui s'appliquent à nos systèmes réels, causaux, du premier et du deuxième ordre. Les fonctions de BODE (gain, phase) sont donc monotones décroissantes.

Ces résultats ne seront pas forcément vrais en présence de fonctions non monotones ! Il faudra alors appliquer les démarches du cours au cas par cas.

Rappelons qu'un second ordre du type : $H(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$ n'est pas un « second ordre classique » et ne devra pas être confondu avec un « vrai » second ordre de fonction de transfert canonique usuelle.

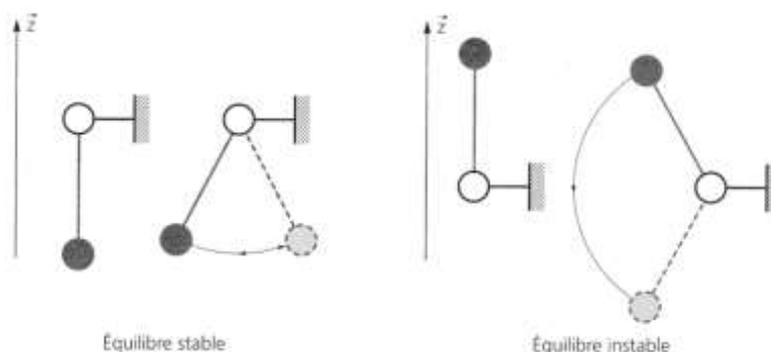
Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II. Stabilité d'un système bouclé

A.II.1 Introduction sur la notion d'équilibre

A.II.1.a Pendule

Prenons l'exemple d'un pendule en liaison pivot par rapport à un bâti immobile, \vec{z} représentant la direction verticale.

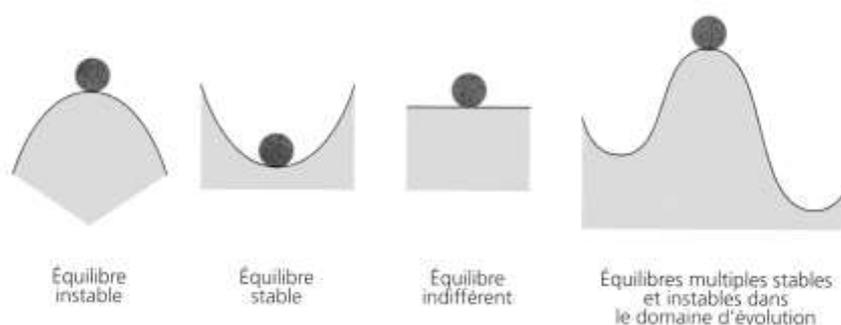


Ce pendule présente une position d'équilibre stable (en bas) et une position d'équilibre instable (en haut).

A.II.1.b Masse en contact ponctuel parfait

Ce deuxième exemple permet d'introduire de nouvelles notions d'équilibre.

Soit une masse soumise à la gravité en contact parfait sur un support.



On nomme équilibre indifférent le cas où, écarté de sa position par une cause extérieure passagère, le système reste écarté lorsque la cause disparaît. Il ne tend pas à revenir vers la position de départ mais ne diverge pas.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.2 Définitions

A.II.2.a Equilibre Stable - Instable

La stabilité d'un système est communément associée à la notion d'équilibre stable et instable.

Dans une position d'équilibre stable, si on écarte le système de sa position et qu'on le laisse libre, il revient dans cette position.

Dans une position d'équilibre instable, si on écarte le système de sa position et qu'on le laisse libre, il s'écarte d'avantage et ne revient pas dans cette position.

A.II.2.b Système à la limite de la stabilité

Un système est dit à la limite de la stabilité si, écarté de sa position par une cause extérieure, il ne revient pas vers cette position lorsque la cause disparaît, sans toutefois diverger (réponse constante ou sinusoïdale non amortie : réponse impulsionnelle d'un oscillateur non amorti).

Ce type de systèmes est stable au sens entrée bornée / sortie bornée, mais on peut faire la distinction avec un système asymptotiquement stable en précisant qu'il est à la limite de la stabilité.

A.II.2.c Système stable

On retiendra la définition suivante :

Un système est stable si, **à toute** entrée bornée, il répond par une sortie bornée.

Il est dit asymptotiquement stable s'il converge vers une valeur finie

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.3 Condition fondamentale de stabilité d'un système

A.II.3.a Pôles d'une fonction de transfert

Soit un système défini par une fonction de transfert $H(p)$ causale (degré de $D(p) >$ degré de $N(p)$) telle que :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 D(p) &= p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod \left[[p - (a_j + ib_j)][p - (a_j - ib_j)] \right]^n \\
 [p - (a_j + ib_j)][p - (a_j - ib_j)] &= [(p - a_j) - (ib_j)][(p - a_j) + (ib_j)] \\
 &= (p - a_j)^2 - (ib_j)^2 = (p - a_j)^2 + b_j^2 \\
 D(p) &= p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $H(p)$ possède des pôles nuls, des pôles réels p_i simples ou multiples et des pôles complexes conjugués de la forme $a_j + ib_j$ simples ou multiples.

A.II.3.b Réponse impulsionnelle

A.II.3.b.i Forme de la réponse dans Laplace

On impose à ce système une impulsion à partir de la position initiale $s(0) = 0$.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$e(t) = \delta(t) \rightarrow E(p) = 1$$

On a donc :

$$S(p) = H(p)$$

La décomposition en éléments simples de $H(p)$ représentant un système causal nous permet de proposer une forme générale suivante :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{p^i} + \prod \frac{B_i}{(p - p_i)^n} + \prod \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \prod \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.3.b.ii Forme de la réponse temporelle

L'application des tables de transformation de Laplace permet de prévoir la forme des fonctions composant la réponse $s(t)$:

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
$D(p)$	p^α	$\prod (p - p_i)^n$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$
$s(t)$	$K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$	$\sum K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}$	$\sum K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$	$\sum K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$

Remarque : pour les termes en $[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$, $n \geq 2$, on pourra consulter l'exemple décrit dans le cours de 1^o année pour $n = 2$ et admettre qu'il se généralise.

A.II.3.b.iii Analyse de stabilité

Etudions les conditions dans lesquelles la réponse est bornée pour chacun des types de termes rencontrés.

• Termes de type 1

Pôles réels nuls ... p^α		
$K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$	Pôle 0 simple $\alpha = 1$	Pôle 0 multiple $\alpha > 1$
Comportement de $s(t)$	Constant	Terme en puissance
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Instable

Remarque : la stabilité liée au pôle nul unique n'est vérifiée que pour l'entrée impulsionnelle, nous le verrons au prochain paragraphe.

• Termes de type 2

Pôles réels non nuls p_i ... $(p - p_i)^n$			
$K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}$	$p_i < 0$	$p_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{p^n}$	$p_i > 0$
Comportement de $s(t)$	Exponentielles décroissantes	Cas non présent puisque intégré dans la classe	Exponentielles croissantes
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente		Instable

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

• **Termes de type 3**

Pôles complexes conjugués simples ... $(ap^2 + bp + c)$ avec $\Delta < 0$ ou $[(p - a_j)^2 + b_j^2]$			
$K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (b_j t)$	$a_j < 0$	$a_j = 0$	$a_j > 0$
Comportement de $s(t)$	Sinusoïdales encadrées par exponentielles décroissantes	Sinusoïdales	Sinusoïdales encadrées par exponentielles croissantes
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Stable Oscillante	Instable

• **Termes de type 4**

Pôles complexes conjugués multiples ... $(ap^2 + bp + c)^n$ avec $\Delta < 0$ ou $[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$; $n > 1$			
$K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (b_j t)$	$a_j < 0$	$a_j = 0$	$a_j > 0$
Comportement de $s(t)$	Forme particulière convergente	Oscillations autour d'une pente moyenne non nulle	Forme particulière divergente
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Instable	Instable

A.II.3.b.iv Conclusions

On remarque que pour une réponse impulsionnelle :

- Les pôles à partie réelle strictement négative permettent d'obtenir une réponse stable convergente
- Un pôle nul simple induit une réponse soit stable et convergente
- Un pôle nul multiple induit une réponse divergente
- Les pôles imaginaires pur conjugués simples (partie réelle nulle) induisent une réponse stable et oscillante
- Les pôles imaginaires pur conjugués multiples (partie réelle nulle) induisent une divergence

A ce stade, il semble qu'un système converge pour une réponse impulsionnelle si :

- La partie réelle de ses pôles est strictement négative – Convergence asymptotique
- Les pôles à partie réelle nulle sont simples – Réponse constante ou oscillante

Toutefois, cela ne répond pas à la question : le système est-il stable, c'est-à-dire à toute entrée bornée, il répond par une sortie bornée.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.3.c Entrées quelconques

Nous avons imposé une entrée impulsionnelle qui nous a mené à étudier directement $H(p)$ et de voir l'influence de ses pôles sur la stabilité du système causal associé.

Traisons maintenant le cas d'une entrée quelconque.

A.II.3.c.i Forme de la réponse dans Laplace

Quelle que soit l'entrée, la sortie $S(p)$ s'exprimera avec un même dénominateur dans le domaine de Laplace que la réponse impulsionnelle augmenté de quelques termes liés à cette entrée.

Ecrivons $H(P)$ et $E(p)$ sous la forme suivante :

$$H(P) = \frac{N(P)}{D(p)} \quad ; \quad E(p) = \frac{N_e(p)}{D_e(p)} \quad \Rightarrow \quad S(p) = H(P)E(P) = \frac{N(P) N_e(p)}{D(p) D_e(p)}$$

Le nouveau dénominateur $D_n(p)$ de $S(p)$ sera donc composé du dénominateur $D(p)$ de $H(p)$ et du dénominateur caractéristique de l'entrée $D_e(p)$:

$$D_n(p) = p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n D_e(p)$$

Supposons que le dénominateur de l'entrée soit de la forme :

$$D_e(p) = p^\beta \prod (p - p_k)^m \prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$$

On aura donc :

$$D_n(p) = p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n p^\beta \prod (p - p_k)^m \prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$$

On a alors :

- Le regroupement des termes p^α et p^β en $p^{\alpha+\beta}$
- Le regroupement des termes $\prod (p - p_i)^n$ et $\prod (p - p_k)^m$ en un produit $\prod (p - p_i)^n$
- Le regroupement des termes irréductibles $\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$ et $\prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$ en produit $\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$

On aura finalement un dénominateur de la sortie dans le domaine de Laplace de la forme :

$$D_n(p) = p^{\alpha+\beta} \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$$

Et donc la forme de la réponse temporelle associée :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha+\beta} \frac{A_i}{p^i} + \prod \frac{B_i}{(p - p_i)^n} + \prod \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \prod \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.3.c.ii Forme de la réponse temporelle

On peut voir de grandes similitudes de cette réponse par rapport à la réponse impulsionnelle. Il reste en réalité deux cas à regarder pour conclure sur la condition de stabilité associés à la présence de pôles à partie réelle nulle qui en présence d'une impulsion, ne causaient pas de divergence de la sortie temporelle :

• Cas du pôle nul réel

En supposant que la fonction de transfert possède un pôle nul au moins $\left(\frac{1}{p^\alpha}, \alpha \geq 1\right)$ et que l'entrée est quelconque bornée avec un terme $\frac{1}{p^\beta}, \beta \geq 1$ borné, il reste dans la réponse $S(p)$ un terme $\frac{A_i}{p^{\alpha+\beta}}$

La réponse temporelle associée est donc :

$$K \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha + \beta - 1)!} ; \quad \alpha + \beta \geq 2$$

Ce terme diverge.

La présence d'un pôle nul dans $H(p)$ rend le système instable.

• Cas des pôles complexes conjugués d'ordre 1 à partie réelle nulle

En supposant que la fonction de transfert possède deux pôles complexes conjugués à partie réelle nulle simples $\left(\frac{Ap+A'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]}\right)$ et que l'entrée est quelconque bornée avec un terme $\frac{Bp+B'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]^\beta}, \beta \geq$

1 borné, il reste dans la réponse $S(p)$ un terme $\frac{Ap+A'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]^{\beta+1}}$

Comme nous l'avons vu précédemment, la puissance étant supérieure ou égale à 2, la réponse temporelle associée diverge.

A.II.3.c.iii Conclusions

Pour qu'un système réponde par une sortie bornée à une quelconque entrée bornée, il faut qu'aucun pôle ne soit à partie réelle positive ou nulle.

A.II.3.d Conclusion : condition fondamentale de stabilité

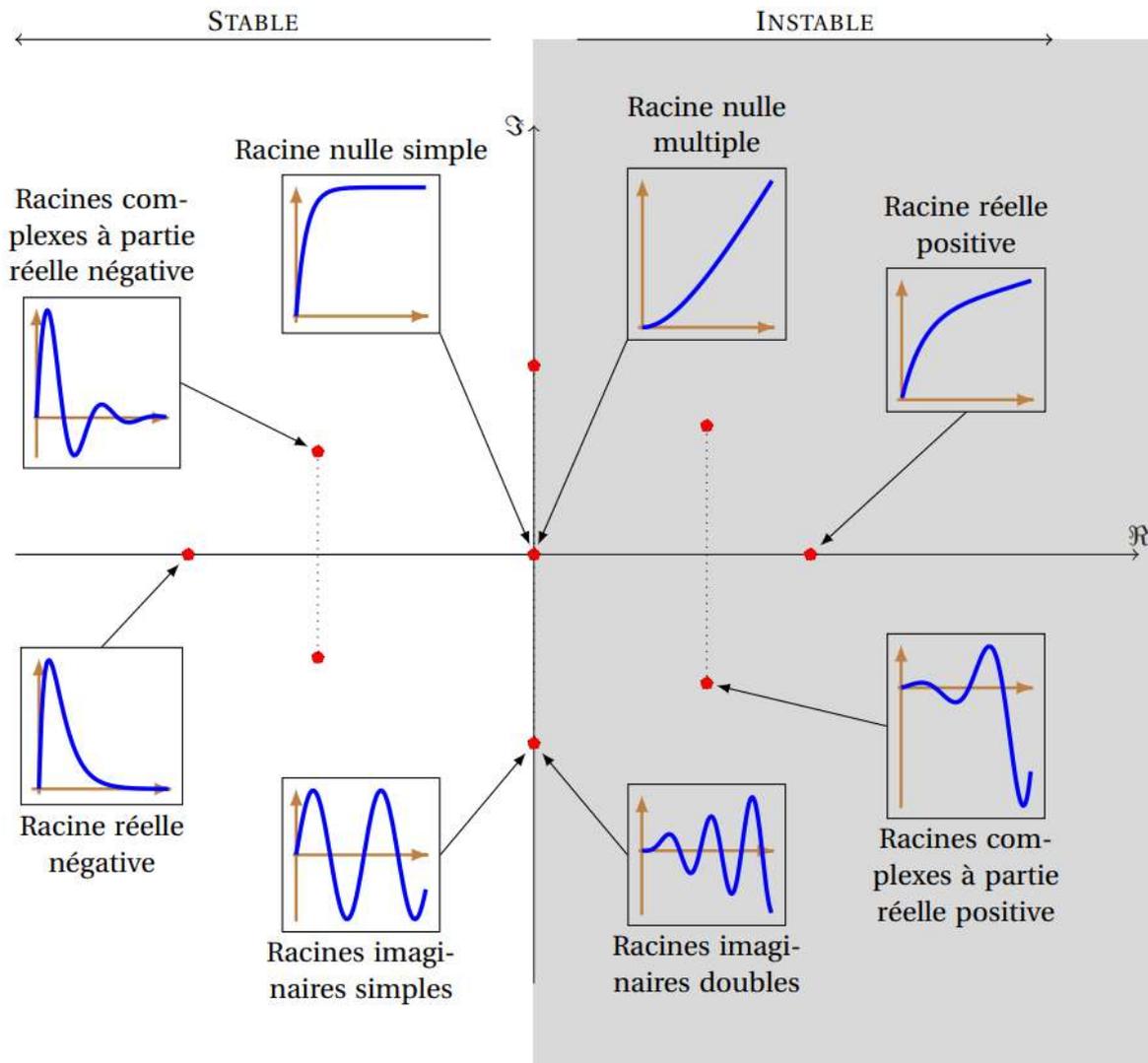
On retiendra la condition fondamentale de stabilité suivante :

Un système linéaire est **stable** si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II.3.e Stabilité et plan complexe : Plan des pôles

On peut selon la position des pôles dans le plan complexe définir la zone de stabilité du système à une réponse impulsionnelle.



Source : cours de Robert Papanicola

A.II.3.f Remarque : Critère de Routh

Un critère hors programme nommé « critère de Routh » permet de connaître le nombre de racines à partie réelle strictement négatives d'un polynôme quelconque. Nous ne l'étudierons donc pas puisqu'il est hors programme mais il était au programme avant la dernière réforme, il est donc possible que vous en entendiez parler.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.4 Stabilité des systèmes du premier et du second ordre

A.II.4.a Système du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Le seul pôle de cette fonction de transfert est :

$$p = -\frac{1}{\tau}$$

Il est à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

⇒ Un système du premier ordre est stable

A.II.4.b Système du second ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont :

$z > 1$	$z = 1$	$z < 1$
$\Delta > 0$ Soient p_1 et p_2 les racines de $D(p)$ $p_i = \omega_0 \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right)$ Comme $z > 1$ $0 < z^2 - 1 < z^2$ $\sqrt{z^2 - 1} < z$ Soit : $sign \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) = sign(-z)$	$\Delta = 0$ Soit p_0 la racine double de $D(p)$ $p_0 = -z\omega_0$	$\Delta < 0$ $H(p) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2z\omega_0 p + p^2}$ $D(p) = p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2$ $\Delta = 4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2$ $\Delta = -4\omega_0^2(1 - z^2) < 0$ $p_i = -z\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - z^2}$

La partie réelle de tous ces pôles est :

$$sign(R_e(p_0)) = sign(-z\omega_0) = -1$$

Cette partie réelle est strictement négative, le système est donc stable.

⇒ Un système du deuxième ordre est stable

A.II.4.c Conclusion

Toute FTBF du 1° ou du 2° ordre correspond à un système stable. Soit non divergent, quelle que soit l'entrée. On ne se limite pas aux entrées connues !!! (Échelon, Dirak).

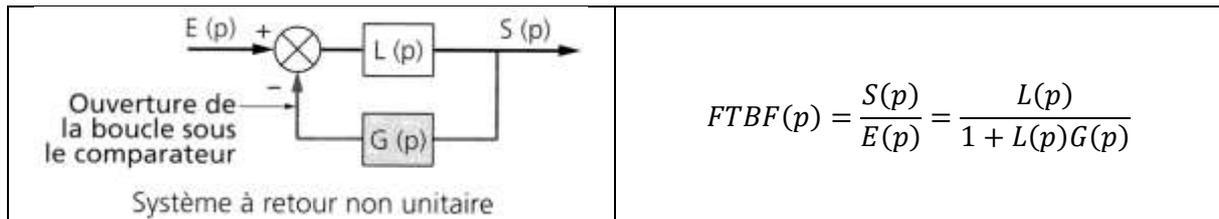
Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5 Mise en place du critère du Revers

Le critère du Revers est un critère graphique qui va nous permettre d'étudier la stabilité d'un système bouclé en étudiant le lieu de transfert de sa FTBO.

A.II.5.a Equation caractéristique des systèmes bouclés

Qu'un système bouclé soit à retour unitaire ou non, on établit sa fonction de transfert en fonction de la FTBO.



Ainsi, l'équation caractéristique de la FTBF d'un système bouclé est

$$1 + L(p)G(p) = 1 + FTBO(p) = 0$$

On peut donc dire qu'un système de fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$ sera stable en boucle fermée si les racines du polynôme $1 + FTBO(p)$ sont toutes à partie réelle strictement négative.

On remarque que lorsque $FTBO(p)$ se rapproche de la valeur -1 , le dénominateur de la fonction de transfert tend vers 0. Sans le démontrer, nous allons voir que ce point de coordonnées $(|H_{j\omega}|, \varphi_{j\omega}) = (1, -180^\circ)$ ou $(G, \varphi_{j\omega}) = (0, -180^\circ)$ dans le plan de Nyquist est un point critique pour la stabilité des systèmes.

Nous l'appellerons donc « point critique ».

Le critère graphique du revers consiste donc à étudier la position de la courbe de réponse harmonique en boucle ouverte par rapport au point critique pour en déduire des conditions de stabilité.

A.II.5.b Principe d'application du critère du Revers

Le critère du revers s'applique à l'étude de la stabilité des systèmes bouclés dont la FTBO est stable. Il donne ainsi la stabilité d'un système bouclé à partir de la connaissance de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Etude de la FTBO \longrightarrow Stabilité de la FTBF

Nous avons vu que les systèmes du premier ordre et du second ordre sont intrinsèquement stables, sauf cas des seconds ordres à amortissement nul, inexistant dans la réalité. Le critère du Revers est donc parfaitement adapté à ces systèmes.

Le critère du Revers est un critère issu du critère de Nyquist, applicable à des systèmes dont la FTBO présente de pôles à partie réelle strictement positive, notion hors programme.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.II.5.c Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist ne sert qu'à l'introduction du critère du revers. Il s'applique quelle que soit la FTBO d'un système.

Un système continu à boucle fermée est asymptotiquement stable (pas de pôles à partie réelle positive ou nulle) si le lieu de Nyquist complet de la boucle ouverte parcourue dans le sens des ω croissants fait autour du point critique un nombre de tours dans le sens horaire identique au nombre de pôles instables de sa FTBO.

Remarques :

- Pour en savoir plus, voici quelques mots clés à ce sujet : contour de Bromwich – Théorème de Cauchy
- Par lieu de transfert complet, on entend un tracé pour $\omega \in [-\infty, \infty]$

A.II.5.d Critère de Nyquist simplifié

A.II.5.d.i Critère

Le critère de Nyquist simplifié est une conséquence du critère de Nyquist, dans le cas où **la boucle ouverte est stable**.

Extension : Le critère de Nyquist simplifié **reste vrai en présence d'un pôle nul** (intégrateur) dans la BO

La formulation du critère devient la suivante :

Un système continu à boucle fermée est asymptotiquement stable si le lieu de Nyquist complet de la BO (avec au plus un pôle nul) parcouru dans le sens des ω croissants ne fait pas le tour du point critique dans le sens horaire.

Attention : Le fait que le critère soit fréquentiel ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée du système est sinusoïdale. Tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en séries de Fourier et donc considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.d.ii Exemples

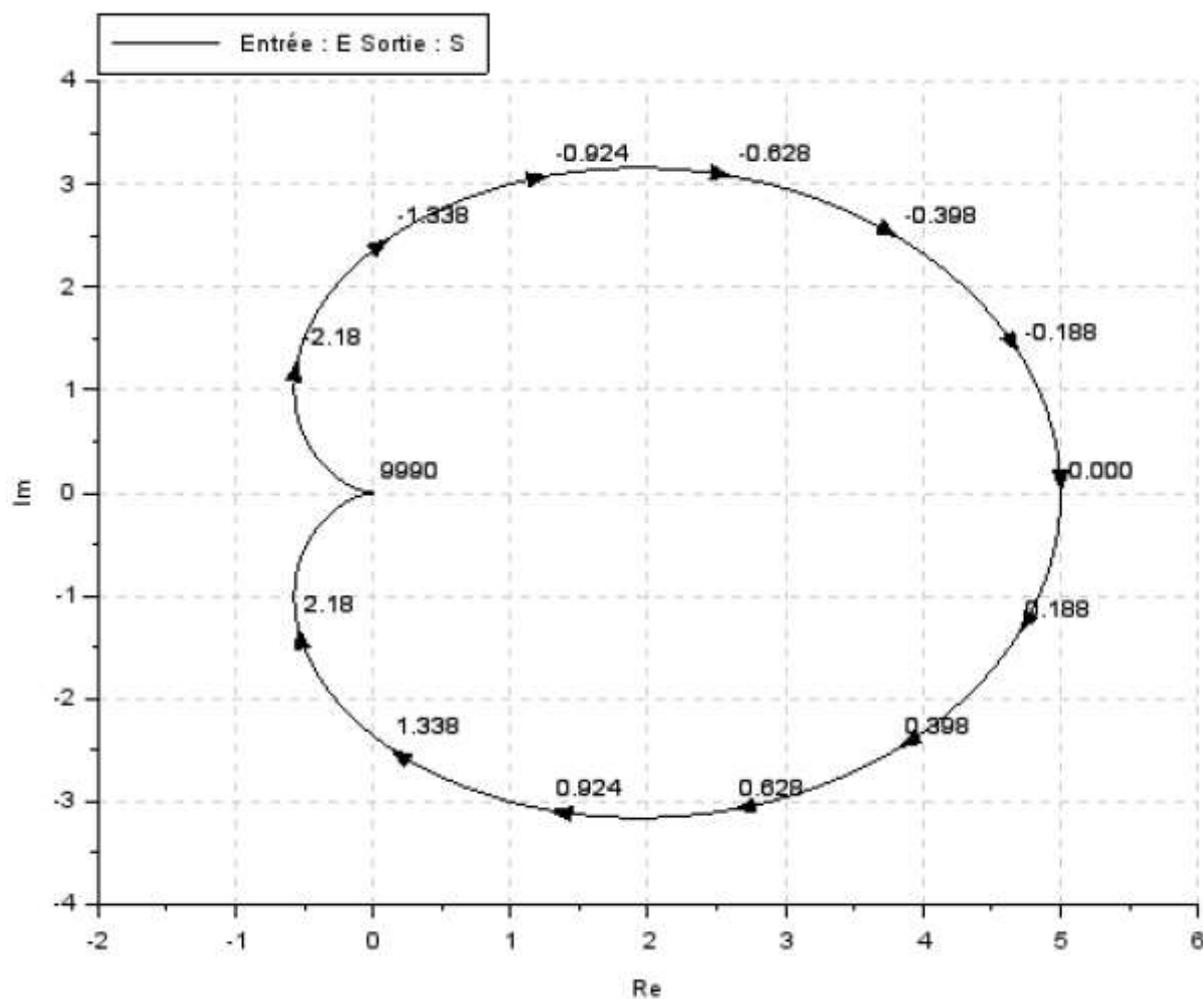
Ne traitons que des exemples du critère de Nyquist simplifié ou la FTBO est stable.

• Systeme stable

Soit $H(p) = \frac{10}{(p+1)(p+2)}$

Les deux pôles de $H(p)$ valent -1 et -2 et sont donc à partie réelle strictement négative.

Voici le lieu de Nyquist complet de $H(p)$ pour $\omega \in [-\infty, \infty]$:



La fonction de transfert $H(p)$ possédant 2 pôles réels négatifs, le système en boucle fermée n'est stable que si le point critique n'est pas entouré en sens horaire, ce qui est le cas ici.

Le système est stable en boucle fermée.

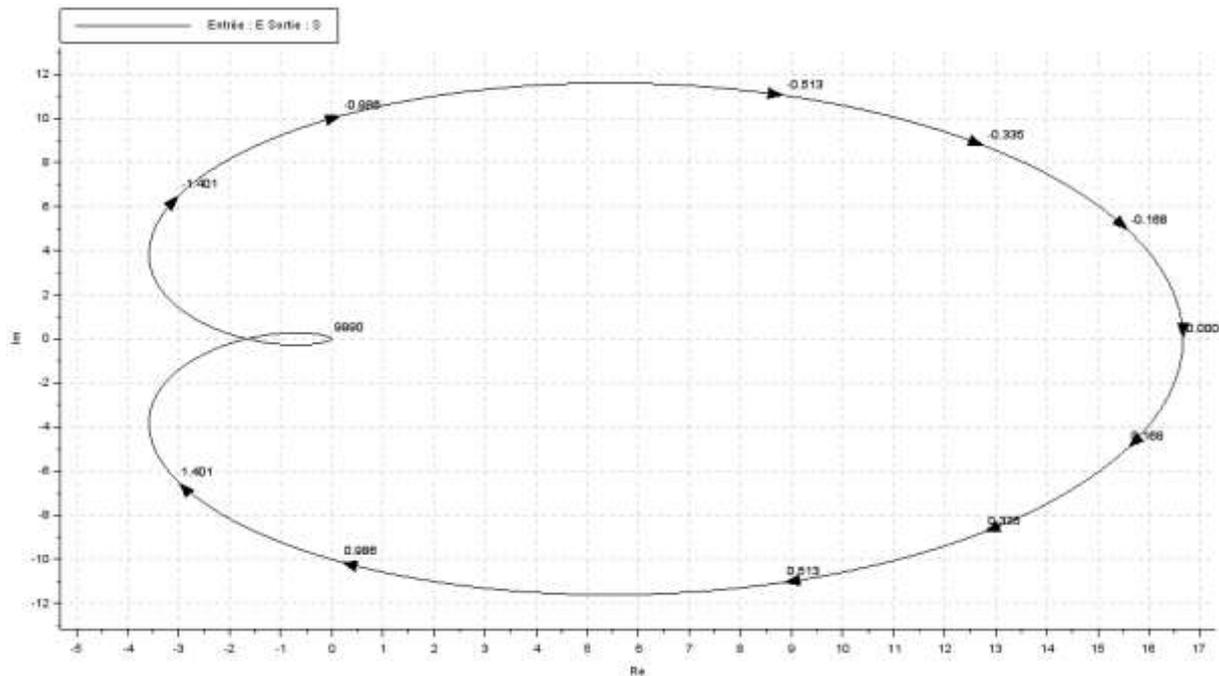
Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

• **Système instable**

Soit $H(p) = \frac{100}{(p+1)(p+2)(p+3)}$

Les trois pôles de $H(p)$ valent -1 , -2 et -3 et sont donc à partie réelle strictement négative.

Voici le lieu de Nyquist complet de $H(p)$ pour $\omega \in [-\infty, \infty]$:



La fonction de transfert $H(p)$ possédant 3 pôles réels négatifs, le système en boucle fermée n'est stable que si le point critique n'est pas entouré en sens horaire, ce qui n'est le cas ici.

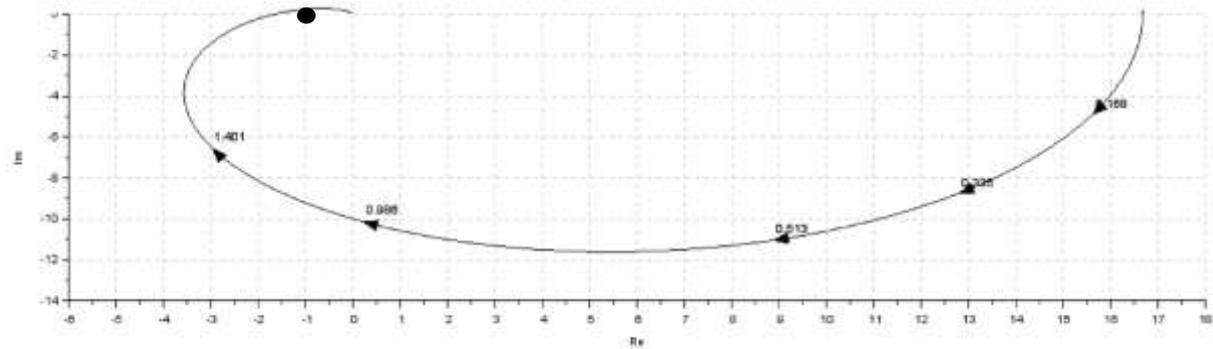
Le système est instable en boucle fermée.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e Critère du Revers

Le critère du Revers découle directement du critère de Nyquist simplifié et permet d'étudier le passage du lieu de Nyquist sur l'intervalle $\omega \in [0, \infty]$.

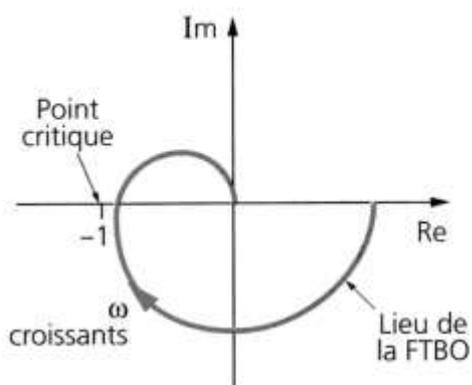
En effet, étudier le lieu de Nyquist complet sur l'intervalle $\omega \in [-\infty, \infty]$ et regarder si le point critique est entouré en sens horaire revient à n'étudier que la moitié de la courbe sur l'intervalle $\omega \in [0, \infty]$ et à regarder si le point critique est laissé à gauche de la courbe lorsqu'on la parcourt dans le sens des pulsations ω croissantes.



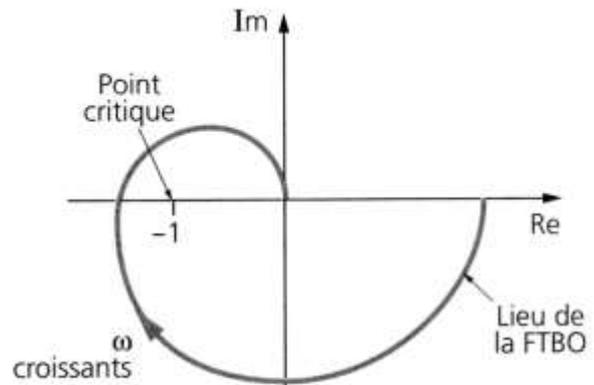
Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e.i Dans Nyquist

En supposant la FTBO stable en acceptant au plus un pôle nul, un système asservi linéaire est stable en boucle fermée si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de Nyquist, on laisse le point critique à gauche du lieu. Dans le cas contraire, il est instable.

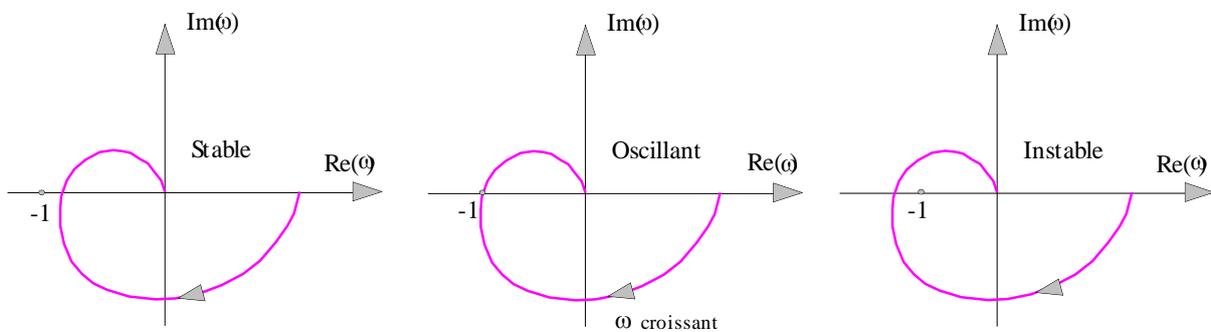


Le point critique est à gauche
Le système est **stable**
en boucle fermée



Le point critique est à droite
Le système est **instable**
en boucle fermée

Stabilité graphique dans le plan de Nyquist

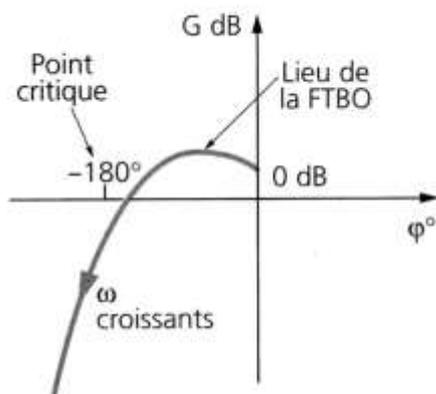


NYQUIST – PC à GAUCHE

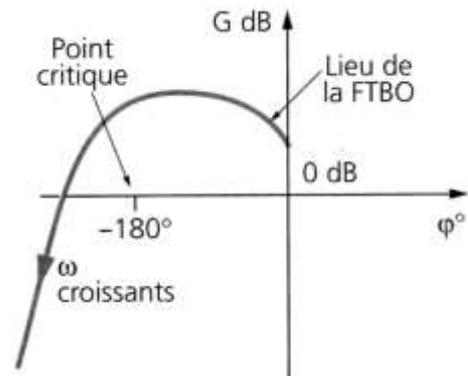
Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e.ii Dans black

En supposant la FTBO stable en acceptant au plus un pôle nul, un système est stable en boucle fermée si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de Black, on laisse le point critique à droite du lieu. Dans le cas contraire, il est instable.

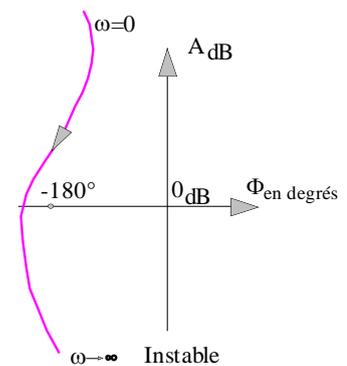
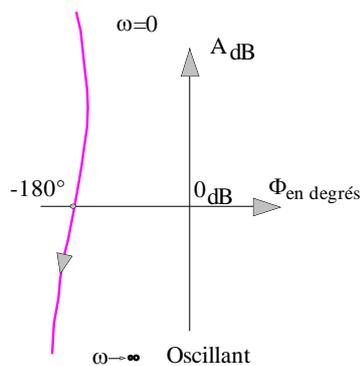
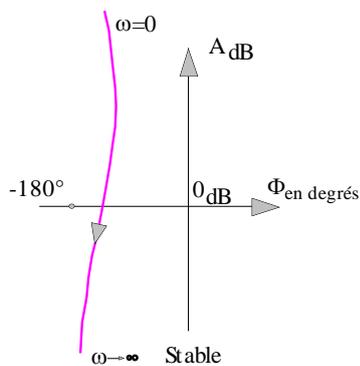


Le point critique est à droite
Le système est stable
en boucle fermée



Le point critique est à gauche
Le système est instable
en boucle fermée

Stabilité graphique dans le plan de Black



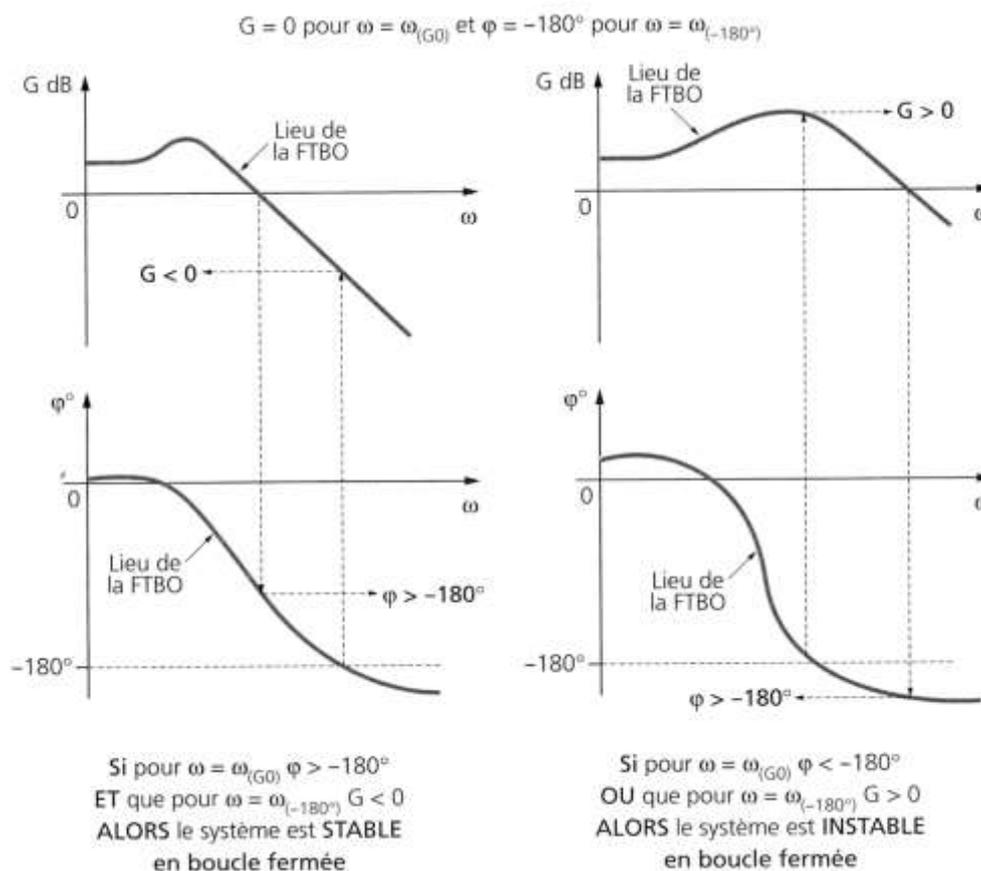
BLACK – PC à DROITE

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.e.iii Dans Bode

En supposant la FTBO stable en acceptant au plus un pôle nul, un système est stable en boucle fermée si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le diagramme de Bode, on respecte les deux conditions :

- à la pulsation de coupure ω_{c_0} pour laquelle $G = 0 \text{ dB}$, le déphasage est supérieur à -180°
- à la pulsation ω_{-180° pour laquelle le déphasage est égal à -180° , le gain est inférieur à 0 dB

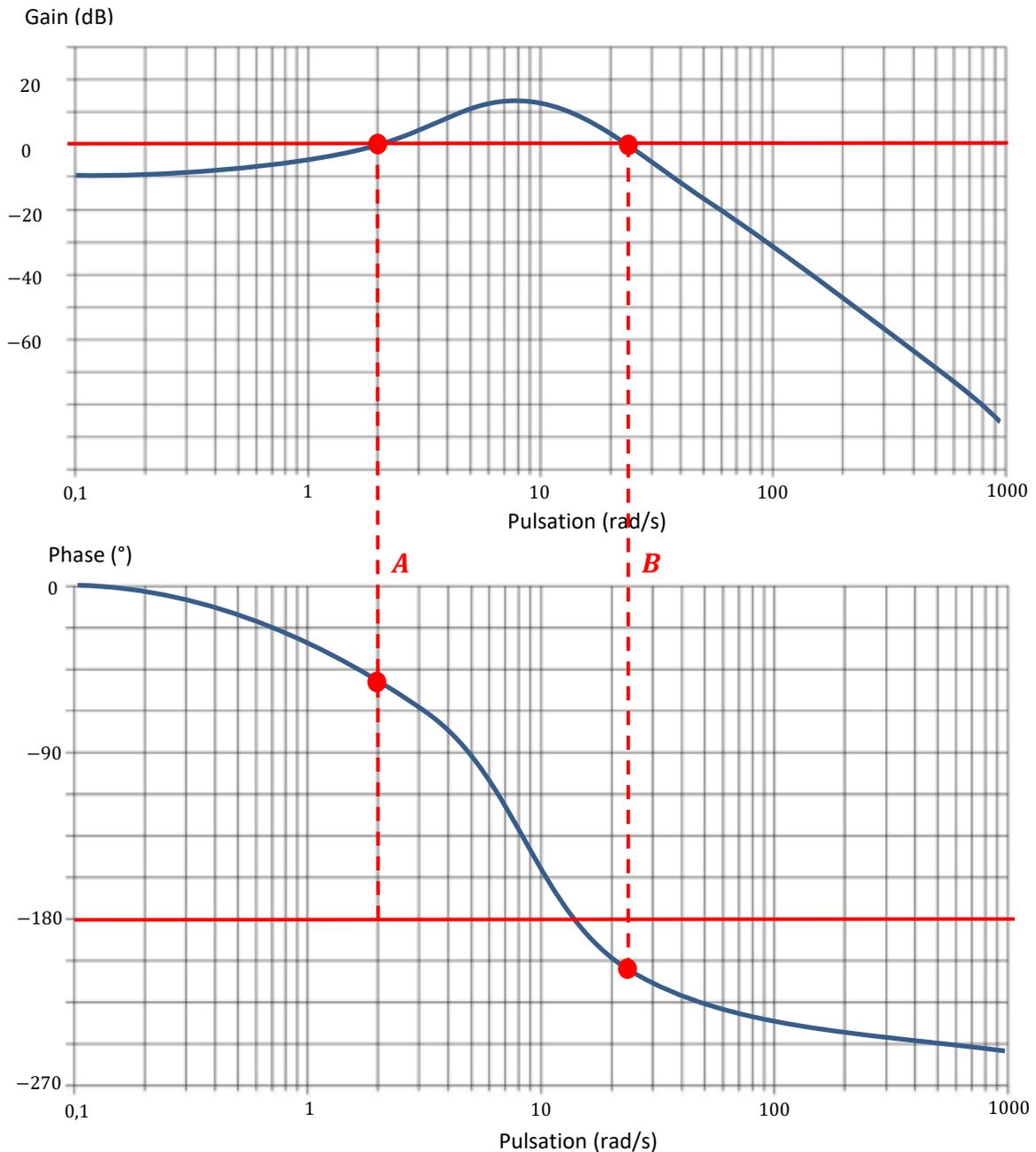


Stabilité dans le diagramme de Bode

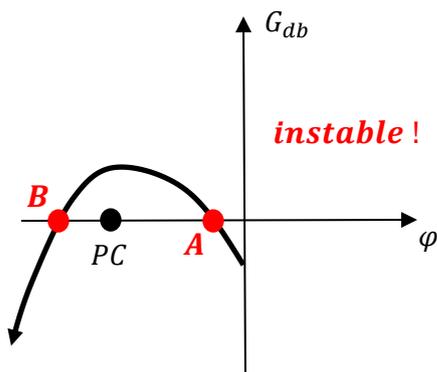
Remarques :

- Lorsqu'une fonction est monotone décroissante, une seule des conditions peut être vérifiée, l'autre étant automatiquement aussi vérifiée
- Lorsque vous avez le moindre doute, vous pourrez vous reporter au critère appliqué dans Nyquist, ou encore plus simplement, dans Black puisque vous avez directement le gain et la phase de Bode (cf exemple en page suivante).
- Si $K_{BO} < 1$ et si le gain ne remonte pas, ω_{c_0} n'existe pas et on ne pourra pas vérifier le critère de phase. De même si la phase ne descend pas en dessous de -180° , ω_{-180} n'existe pas, on ne pourra pas vérifier le critère de gain.
 - o Si les fonctions sont monotones décroissantes, on pourra simplement vérifier le second critère
 - o Sinon, on se rapportera à Black par exemple

Exemple de cas indéterminé dans Bode :



Le système est-il stable en BO ? Le mieux est de se rapporter au diagramme de Black ! Qui ressemble dans la forme à :



On peut imaginer pas mal de situations différentes, par exemple si la phase remonte au dessus de -180° ... Je ne définirai pas de règles qui doivent probablement exister sur l'un ou l'autre des critères, surtout qu'il est souhaitable que les concours ne vous posent pas ce genre de cas. Toutefois, maintenant, vous savez traiter les cas non communs

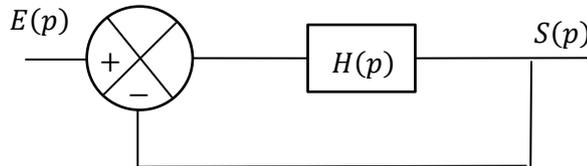
Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II.5.f Applications

A.II.5.f.i Préliminaires

Nous avons montré précédemment que tout système du premier et du second ordre est stable.

Etudions à titre d'exemples la stabilité de systèmes bouclés à retour unitaire dont la FTBO est du premier ou du second ordre.



Nous pouvons appliquer le critère du Revers à des systèmes bouclés dont la FTBO $H(p)$ est du 1° ou du 2° ordre puisque la FTBO est stable.

A.II.5.f.ii Système du premier ordre bouclé à retour unitaire

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

• Calcul de la FTBF

On peut étudier les pôles de la FTBF pour conclure sur la stabilité :

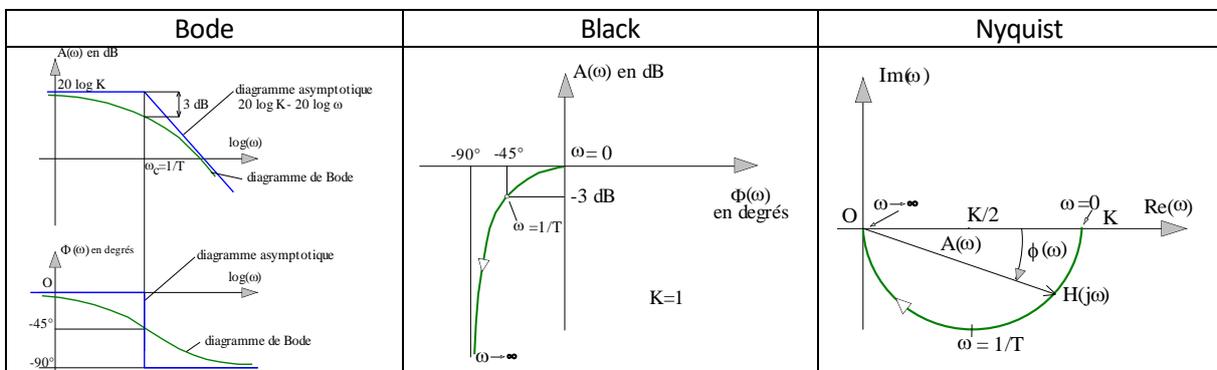
$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K}{1 + K + \tau p} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K} p}$$

La FTBF d'un système bouclé du premier ordre à retour unitaire est du premier ordre, nous avons vu précédemment que ses pôles sont à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

1° ordre en BF – Stable en BF grâce aux pôles

• Critère du Revers (FTBO)

Application du critère du Revers : on trace le lieu de la FTBO



L'application du critère du Revers dans les 3 diagrammes montre **qu'un système bouclé à retour unitaire du 1° ordre est stable.**

1° ordre en BO – Stable en BF grâce au Revers

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.II.5.f.iii Système du second ordre bouclé à retour unitaire

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

• Calcul de la FTBF

On peut étudier les pôles de la *FTBF* pour conclure sur la stabilité :

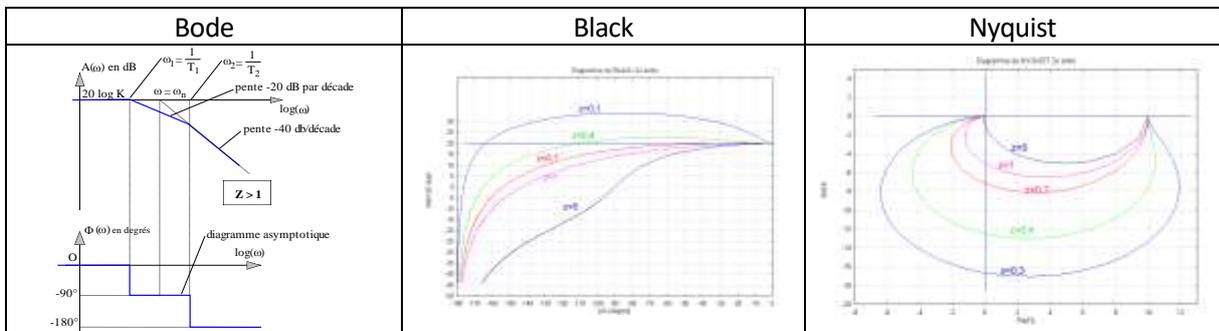
$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{1 + K + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{2z}{(1+K)\omega_0}p + \frac{p^2}{(1+K)\omega_0^2}} \end{aligned}$$

La *FTBF* d'un système bouclé du second ordre à retour unitaire est du second ordre, nous avons vu précédemment que ses pôles sont à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

2° ordre en BF – Stable en BF grâce aux pôles

• Critère du Revers (FTBO)

Application du critère du Revers : on trace le lieu de la FTBO



L'application du critère du Revers dans les 3 diagrammes montre **qu'un système bouclé à retour unitaire du 2° ordre est stable.**

2° ordre en BO – Stable en BF grâce au Revers

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.f.iv Conclusions

Pour qu'un système bouclé à retour unitaire puisse être instable, il faut que sa fonction de transfert en boucle ouverte soit au moins du troisième ordre.

Cependant, l'étude précédente montre qu'un système dont la FTBO est du second ordre passe plus près du point critique qu'un système dont la FTBO est du premier ordre. On introduit alors la notion de « marge de stabilité », c'est-à-dire de distance de sécurité par rapport à un fonctionnement instable, souvent très néfaste aux systèmes. De plus, les systèmes du premier et du second ordre que nous étudions ne sont qu'une modélisation de systèmes réels dont l'ordre est souvent supérieur.

A.II.5.g Marges de stabilité

A.II.5.g.i Définitions

• Marge de gain

On appelle « marge de gain », exprimée en décibel, la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain.

Elle correspond à l'opposé du gain lorsque la phase vaut -180° :

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|}$$

Si la phase reste au-dessus de -180° , on dit que la marge de gain est infinie.

• Marge de phase

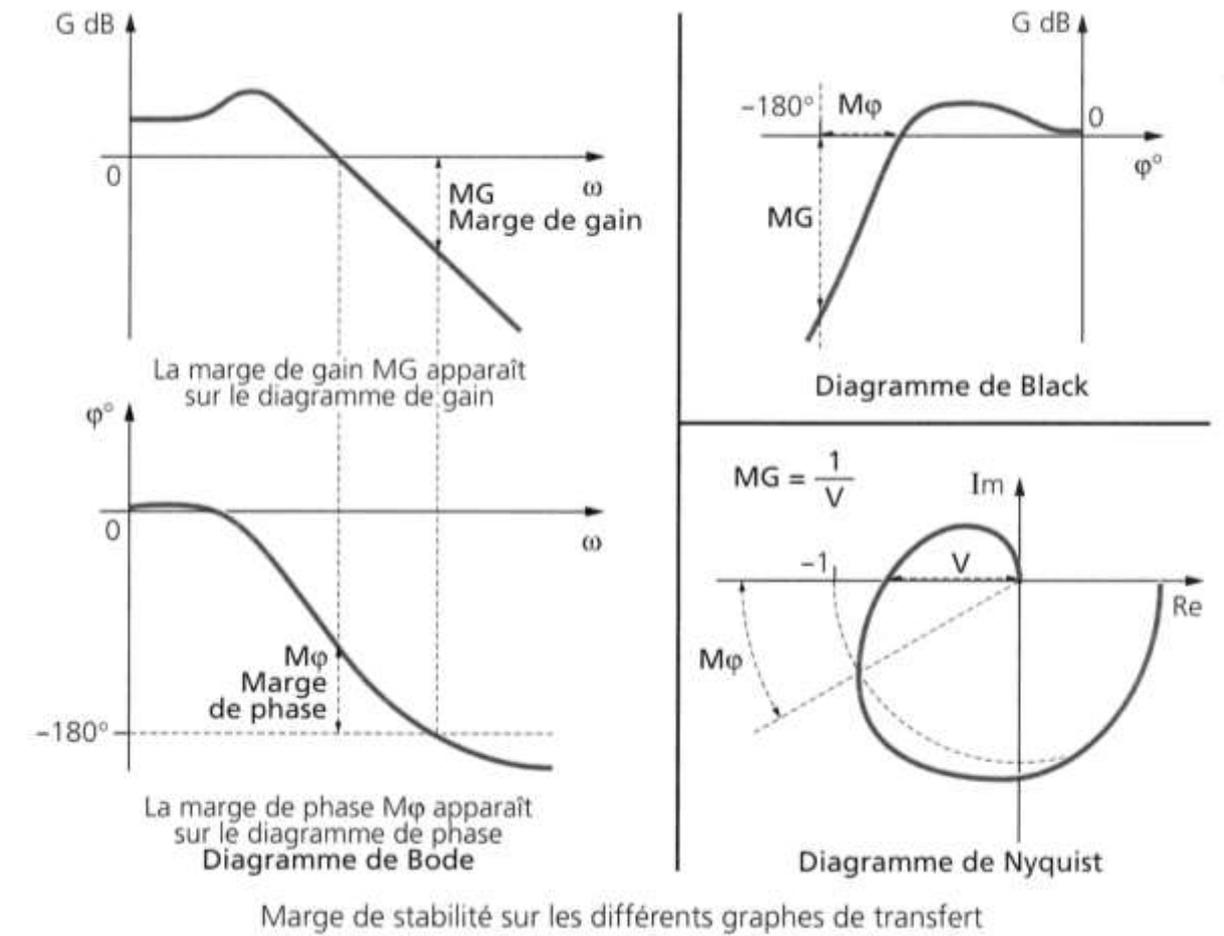
On appelle « marge de phase », exprimée en degré, la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique mesurée parallèlement à l'axe de la phase.

Elle correspond à la différence entre la phase lorsque le gain est nul et la valeur $-\pi$:

$$\Delta \varphi = \arg H(j\omega_{c_0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c_0})$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.5.g.ii Calcul graphique des marges



Explication de la marge de gain associée au module $\frac{1}{V}$:

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|} = 20 \log \frac{1}{V}$$

Remarque : On remarque très clairement que si le gain augmente, les marges de stabilité diminuent.

A.II.5.g.iii Calcul analytique des marges

• Marge de gain

Lorsque la phase vaut -180° , la marge de gain est l'opposé du gain.

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|}$$

Il faut donc déterminer ω_{-180° :

$$\arg H(j\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$$

Il est souvent plus aisé de calculer la marge de phase que de résoudre cette équation, qui n'a pas forcément de solution (2^e ordre par exemple).

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

• **Marge de phase**

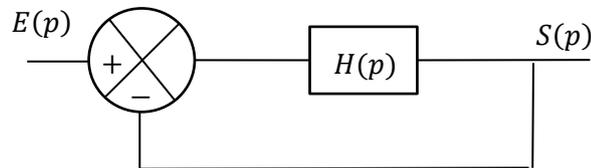
Lorsque le gain est nul, soit à la pulsation de coupure à 0 dB ω_{c_0} , la marge de phase est la distance entre la phase et $-\pi$:

$$\Delta\varphi = \arg H(j\omega_{c_0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c_0})$$

Il faut donc déterminer ω_{c_0} .

Que ce soit un 1° ordre ou un 2° ordres, pour qu'il existe une pulsation de coupure à 0 dB, il est nécessaire que K_{BO} soit supérieur à 1 car l'asymptote horizontale aux faibles pulsations vaut $20 \log K_{BO}$.

Exemple d'un premier ordre bouclé : $K_{BO} > 1$



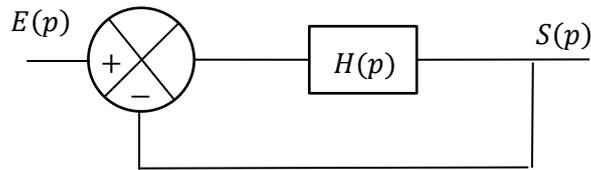
$$H(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}$$

$$|H(j\omega_{c_0})| = \frac{K_{BO}}{\sqrt{1 + \tau_{BO}^2 \omega_{c_0}^2}} = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau_{BO}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K_{BO}^2 - 1}}$$

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c_0}) = \pi - \tan^{-1}(\tau_{BO}\omega_{c_0}) = \pi - \tan^{-1}\left(\sqrt{K_{BO}^2 - 1}\right)$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

Exemple d'un second ordre bouclé : $K_{BO} > 1$



$$H(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2z_{BO}}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{2z}{(1 + K_{BO})\omega_0} p + \frac{p^2}{(1 + K_{BO})\omega_0^2}} \quad ; \quad z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$$

On indicera pas les pulsation avec « BO ».

$$|H(j\omega_{c_0})| = \frac{K_{BO}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\frac{z_{BO}^2 \omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 2(2z_{BO}^2 - 1)\frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2} + 1 - K_{BO}^2 = 0$$

$$X = \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2} > 0$$

$$X^2 + 2(2z_{BO}^2 - 1)X + 1 - K_{BO}^2 = 0$$

Comme $K_{BO} > 1$

$$\Delta = 4(2z_{BO}^2 - 1)^2 + 4(K_{BO}^2 - 1) > 0$$

$$X = \frac{(1 - 2z_{BO}^2)2 + \sqrt{4(2z_{BO}^2 - 1)^2 + 4(K_{BO}^2 - 1)}}{2}$$

$$X = (1 - 2z_{BO}^2) + \sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)}$$

Comme $\omega_{c_0} > 0$ (pulsation réelle)

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + (1 - 2z_{BO}^2)}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

Reprenons les formules de 1^o année pour mettre un lien entre la marge de phase de la FTBO et le coefficient d'amortissement z_{BF} :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c_0}) = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z_{BO} \frac{\omega_{c_0}}{\omega_0}\right)^2}} \right)$$

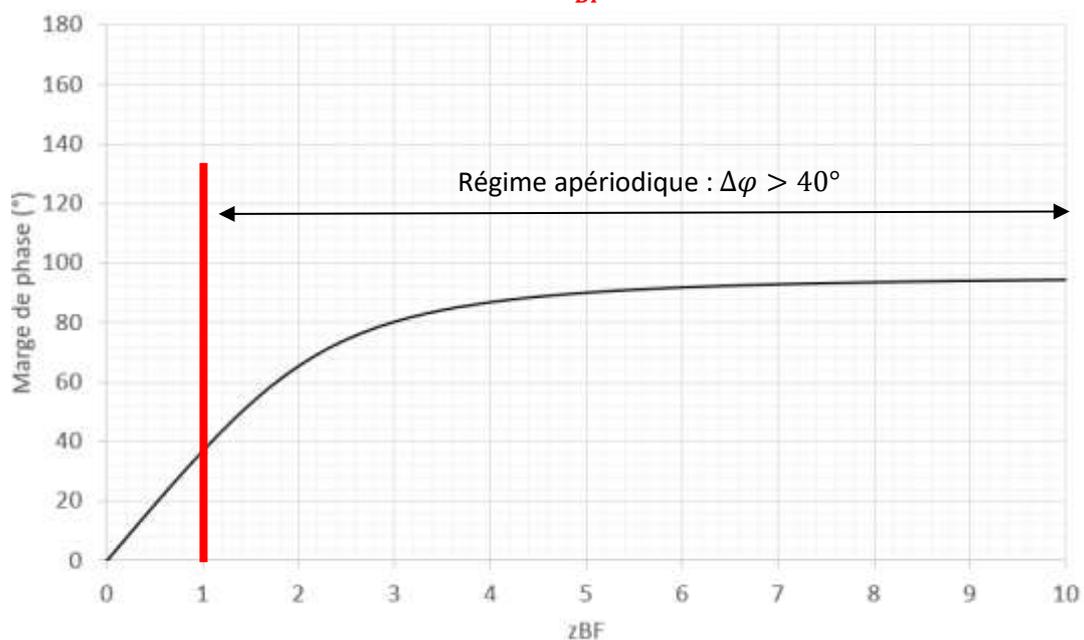
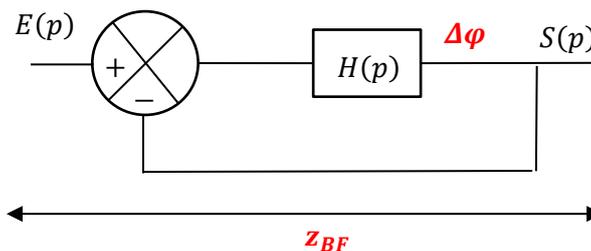
Formule dans laquelle on injecte ω_{c_0} :

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + (1 - 2z_{BO}^2)}$$

Dans laquelle on injecte z_{BO} :

$$z_{BO} = z_{BF} \sqrt{1 + K_{BO}}$$

Sans donner la formule à rallonge obtenue, voici la courbe de la marge de phase en fonction de z_{BF} pour $K_{BO} = 10$ par exemple :



On remarque que plus la marge de phase diminue, plus le coefficient d'amortissement z diminue. Le comportement oscillatoire est donc directement lié à la marge de phase du système.

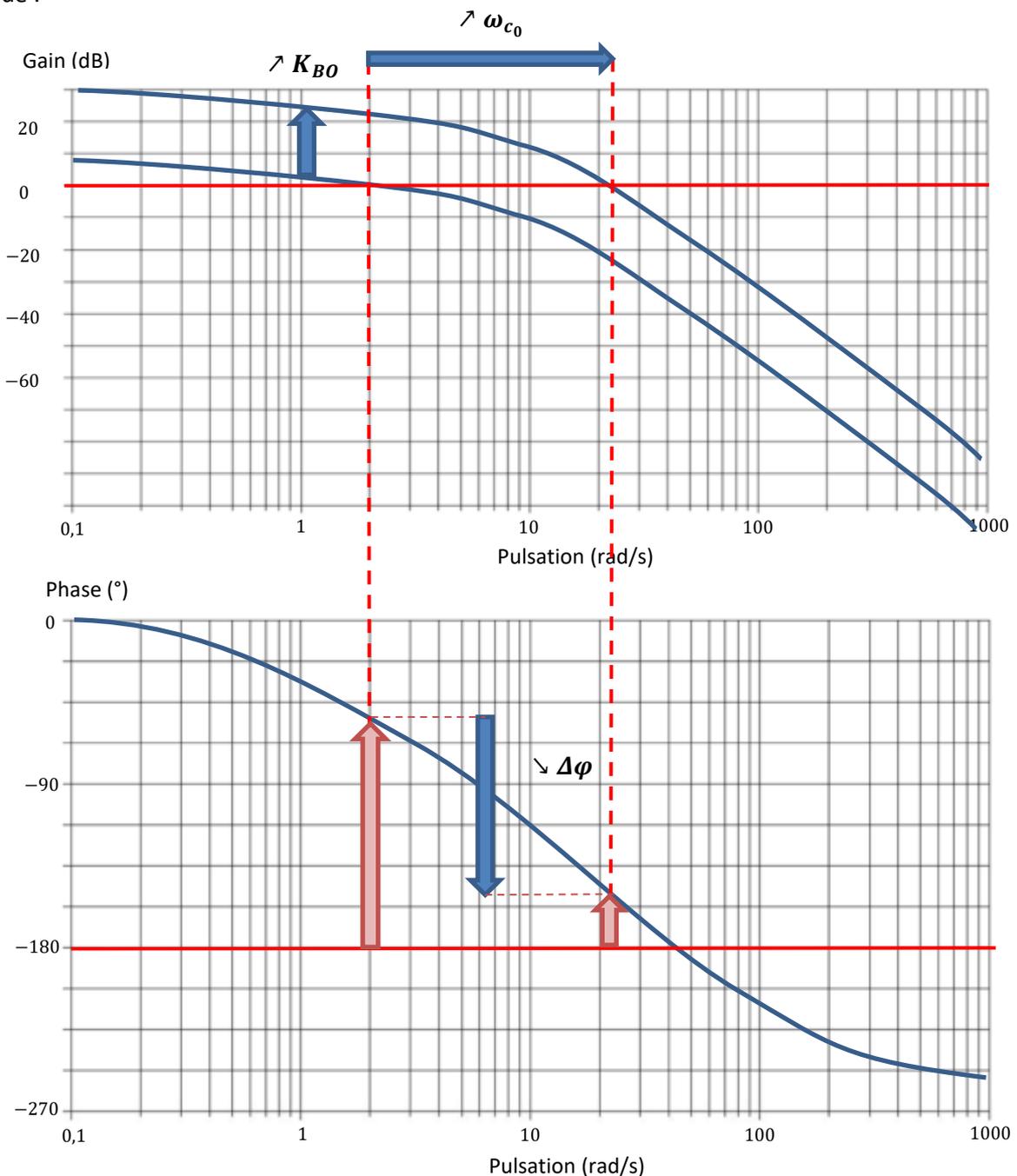
A.II.5.g.iv Valeurs générales

On retient, en général, pour des raisons expérimentales, les valeurs suivantes :

- Marge de gain minimale : 10 à 15 dB
- Marge de phase minimale : 45° à 60°

A.II.5.g.v Influence de K_{BO} sur la stabilité

Augmenter K_{BO} dans un système revient à remonter la courbe de gain sans influencer la phase. Dans les systèmes causaux (gain décroissant), augmenter K_{BO} augmente ω_{c_0} , diminue donc $\varphi_{\omega_{c_0}}$, diminue $\Delta\varphi$ et diminue donc la stabilité. Ce résultat est très simple à retrouver en traçant un diagramme de Bode :



Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.II.6 Conclusions sur la stabilité

Pour étudier la stabilité d'un système asservi, il est possible

- Soit de déterminer sa *FTBF* et de déterminer ses pôles qui doivent être à partie réelle strictement négative
- Soit d'étudier sa *FTBO* (si le système est bouclé) avec le critère du revers tant qu'elle n'a pas de pôles à partie réelle strictement positive. On pourra alors déterminer, si elles existent, marge de phase et marge de gain, c'est-à-dire la distance du lieu de transfert de la *FTBO* au point critique

Pour un système stable, plus le tracé est proche du point critique, plus les marges de stabilité diminuent.

Une diminution du gain de la FTBO diminue la pulsation de coupure à 0dB, augmente les marges et augmente donc la stabilité.

A.II.7 Remarque TVF

L'application du théorème de la valeur finale nécessite d'étudier la stabilité du système au préalable. Si un système est instable, ne pas parler de valeur finale. Exemple :

$$H(p) = \frac{1}{p-a} \text{ avec } a > 0 \quad ; \quad E(p) = \frac{1}{p} \quad ; \quad S(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{p-a} = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-a} \right)$$

Racine réelle positive $a \Rightarrow$ système instable

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{p-a} = -\frac{1}{a}$$

Or :

$$s(t) = -\frac{1}{a} (1 - e^{at}) u(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{a} (1 - e^{at}) \right] = +\infty$$

De même, en cas de réponse harmonique (limite de stabilité, système oscillant), le *TVF* donne un résultat faux

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.III. Précision

A.III.1 Introduction

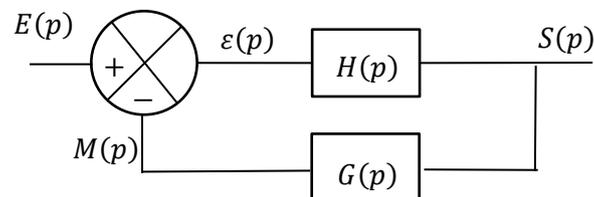
A.III.1.a Systèmes stables

Avant toute chose, rappelons que tout ce paragraphe est vrai dans le cas de systèmes stables. Si un système est instable, on ne peut parler d'écart statique et de trainage !

Qui dit système stable dit classe forcément nulle pour sa fonction de transfert complète (pas de pôle nul).

A.III.1.b Mise en place du problème

Soit le système décrit par le schéma bloc suivant :



Sa *FTBO* s'écrit :

$$FTBO(p) = H(p)G(p)$$

Considérons une forme générale de la *FTBO* définie par :

$$FTBO(p) = K_{BO} \frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}{p^\alpha(1 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m)}$$

Avec $\alpha \geq 0$ et $\alpha + m > n$

Définitions :

- α représente la classe de la *FTBO*, c'est-à-dire le nombre d'intégrations $\frac{1}{p}$ présentes dans la boucle ouverte.
- K_{BO} est le gain statique de la *FTBO*
- n représente le degré du numérateur
- $\alpha + m$ est l'ordre de la *FTBO* (degré du dénominateur)

Remarque : pour les fonctions de transfert des systèmes réels, on a toujours $\alpha + m > n$.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.III.1.c Ecart - Erreur - Définition

On appelle « erreur » la différence entre l'entrée (grandeur de commande) et la sortie (grandeur commandée) :

$$\Sigma(t) = e(t) - s(t)$$

La précision s'améliore lorsque l'erreur diminue.

La notion d'erreur est délicate à évoquer car elle n'existe que lorsque entrée et en sortie ont des mêmes grandeurs. En réalité, on compare en général des tensions images des variables à comparer.

On définit l' « écart », valeur en sortie du comparateur définie par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$$

Pour un système à retour unitaire, $\Sigma(t) = \varepsilon(t)$.

Améliorer la précision revient à minimiser l'écart, qui évolue dans deux circonstances :

- Evolution de l'entrée : problème de poursuite
- Présence de perturbations : problème de régulation

Définitions :

- Lorsque l'entrée est un échelon, l'écart à l'infini est appelé écart statique, ou écart de position, noté ε_s .
- Lorsque l'entrée est une rampe, on parle d'écart de vitesse, de poursuite ou de traînage, noté ε_v (c'est la valeur à l'infini de l'écart dynamique ε_d).

Remarque : Nous allons dans la suite montrer qu'il est possible de connaître simplement les écarts statiques et de poursuite d'un système bouclé. Nous appellerons A cet écart. Il est toutefois intéressant de retenir que l'écart statique est facilement calculable, quel que soit le système étudié.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.III.1.d Calcul de l'écart statique

Lorsque l'on cherche l'écart statique d'un système de fonction de transfert $H(p)$, si l'on connaît son gain statique complet K , on peut directement appliquer la formule :

$$\lim_{p \rightarrow 0} (H(p)) = K \quad ; \quad \varepsilon_s = E_0(1 - K)$$

Démonstration : toute fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha}}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}$$

Si le système est stable en boucle fermée, il ne peut pas rester de pôles à partie réelle positive ou nulle, donc la classe vaut 0. Dans ce cas :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (pS(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p H(p) \frac{E_0}{p} \right) = E_0 \lim_{p \rightarrow 0} (H(p))$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (H(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(K \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m} \right) = K$$

Soit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t)) = K E_0$$

La valeur finale à une entrée échelon E_0 vaut donc toujours $K E_0$

L'écart statique prend donc toujours la forme suivante :

$$\varepsilon_s = E_0 - K E_0 = E_0(1 - K)$$

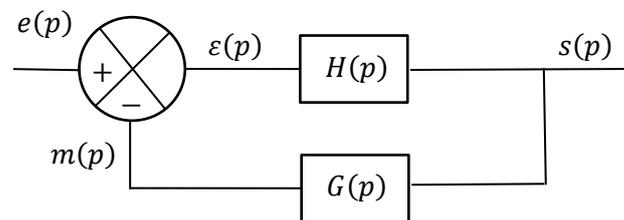
Ou encore :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (E(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} E_0(1 - H(p)) = E_0 \left[1 - \lim_{p \rightarrow 0} (H(p)) \right] = E_0(1 - K)$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.III.2 Calcul des écarts au comparateur A des systèmes

Etudions une boucle d'asservissement quelconque :



On appelle :

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$$

A.III.2.a Expression générale de l'écart au comparateur A

$$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$$

On exprime l'écart à l'aide de la FTBO :

$$\varepsilon(p) = e(p) - m(p) = e(p) - FTBO(p)\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} e(p)$$

En reprenant la forme générale de FTBO proposée précédemment :

$$FTBO(p) = K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}$$

On a :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}} e(p)$$

L'écart dépend de la nature de l'entrée. Les entrées classiques sont l'impulsion, l'échelon, la rampe et la parabole. Leurs transformée de Laplace sont obtenues à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{L}\left(a \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{a}{p^n}$$

On écrit donc ces entrées sous la forme générale : $E(p) = \frac{a}{p^\beta}$; $\beta \geq 0$

La forme générale de l'écart s'écrit donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{a}{p^\beta} \frac{1}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}}$$

Avec K_{BO} le gain statique de la boucle ouverte.

A.III.2.b Calcul de l'écart au comparateur A

Si le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{p^{\beta-1}} \frac{1}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}{p^\alpha(1 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m)}} \right]$$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{p^{\beta-1}} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO}}{p^\alpha}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{p^{\beta-1}} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K_{BO}} \right]$$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[a \frac{p^{\alpha-\beta+1}}{p^\alpha + K_{BO}} \right]$$

On peut donc mettre en place le tableau suivant, permettant de connaître l'équivalent en 0 (tableau 1) et la valeur de l'écart (tableau 2) en fonction de la classe de la FTBO du système et de l'entrée.

Nature de l'entrée		Classe du système				
$e(t)$	$E(p)$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = n > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	$\frac{ap}{1 + K_{BO}}$	$\frac{ap^2}{p + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap^2}{K_{BO}}$	$\frac{ap^3}{p^2 + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap^3}{K_{BO}}$	$\frac{ap^{n+1}}{p^n + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap^{n+1}}{K_{BO}}$
Echelon $e(t) = au(t)$	$\frac{a}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{a}{1 + K_{BO}}$	$\frac{ap}{p + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap}{K_{BO}}$	$\frac{ap^2}{p^2 + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap^2}{K_{BO}}$	$\frac{ap^n}{p^n + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap^n}{K_{BO}}$
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	$\frac{a}{p(1 + K_{BO})}$	$\frac{a}{p + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{a}{K_{BO}}$	$\frac{ap}{p^2 + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap}{K_{BO}}$	$\frac{ap^{n-1}}{p^{n-1} + K_{BO}} \underset{\sim}{\sim} \frac{ap^{n-1}}{K_{BO}}$

Valeur de A 						
Nature de l'entrée		Classe du système				
$e(t)$	$E(p)$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = n > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	0	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0	0



Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.III.2.c Conclusions

La présence d'intégrations $\frac{1}{p}$ dans la *FTBO* a une grande influence sur la précision d'un système.

A.III.2.c.i Ecart statique

- Plus la classe de la *FTBO* est élevée, plus la précision est grande quelle que soit la nature de l'entrée.
- Dès que la *FTBO* possède une intégration, l'écart statique est nul.
- Si l'erreur statique est ni infinie, ni nulle, alors plus le gain de la *FTBO* est grand, plus la précision est bonne.

A.III.2.c.ii Ecart de vitesse

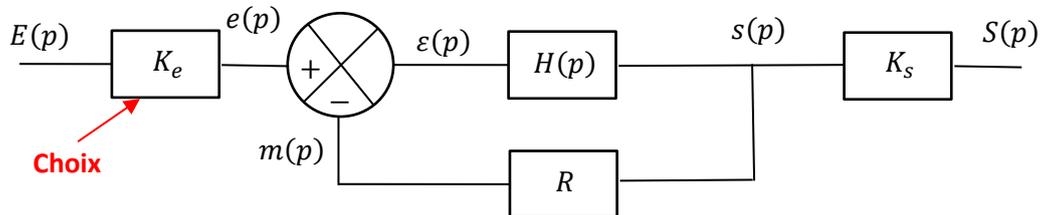
- Dès qu'un système possède au moins deux intégrations, l'écart de poursuite est nul
- Un système ne possédant pas d'intégration a un écart de poursuite infini

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.III.2.d Détermination de l'erreur en fonction de A

A.III.2.d.i Expression

Ces résultats sont vrais pour l'écart au niveau du comparateur, quelle que soit la FTBO du système. Dans les autres cas, et dans le cadre de gains purs ajoutés en retour et à l'extérieur :



Appelons e, E, s, S, A les variables associées aux variables du même nom dans le schéma bloc lorsque leur comportement asymptotique a été atteint (constante, rampe).

On a :

$$A = e - m = K_e E - R s = K_e E - \frac{R}{K_s} S \Leftrightarrow \frac{R}{K_s} S = K_e E - A \Leftrightarrow S = \frac{K_s (K_e E - A)}{R}$$

$$\Sigma = E - S = E - \frac{K_s (K_e E - A)}{R} = \frac{ER - K_s (K_e E - A)}{R} = \frac{ER + K_s A - K_e K_s E}{R} = \frac{E(R - K_e K_s) + K_s A}{R}$$

$$\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} (E(t) - S(t)) = E - S = \frac{E(R - K_e K_s) + K_s A}{R}$$

$$E \text{ entrée temporelle } \begin{cases} \text{Echelon: } E = E \\ \text{Rampe: } E = at \end{cases}$$

Attention, A s'exprime en fonction des coefficients de l'entrée du comparateur e, soit une multiplication par K_e par rapport à l'entrée du système

En pratique, cette formule ne sera pas utilisée

A.III.2.d.ii Proportionnalité écart / erreur (Concours !!!)

On peut vous demander de choisir K_e afin que l'erreur Σ soit proportionnelle à l'écart. On voit qu'il faut :

$$\Sigma \propto A \quad ; \quad R - K_e K_s = 0 \Leftrightarrow K_e = \frac{R}{K_s}$$

Là aussi, ce résultat se retrouve simplement en exprimant comme fait ci-dessus l'écart :

$$A = K_e E - \frac{R}{K_s} S. \text{ On veut factoriser par } (E - S), \text{ on pose } K_e = \alpha \frac{R}{K_s} \Rightarrow A = \alpha \frac{R}{K_s} E - \frac{R}{K_s} S = \frac{R}{K_s} (\alpha E - S). \text{ En prenant } \alpha = 1 \Leftrightarrow K_e = \frac{R}{K_s}, \text{ on a : } A = \alpha (E - S)$$

Parfois, on demande : Déterminer K_e tel que $\varepsilon = 0$ lorsque entrée = sortie (ie $\Sigma = E - S = 0$). On écrit donc : $\varepsilon = e - m = K_e E - \frac{R}{K_s} S = 0$. Si $E = S$, $\varepsilon = \left(K_e - \frac{R}{K_s}\right) S \Rightarrow K_e - \frac{R}{K_s} = 0$, soit $K_e = \frac{R}{K_s}$

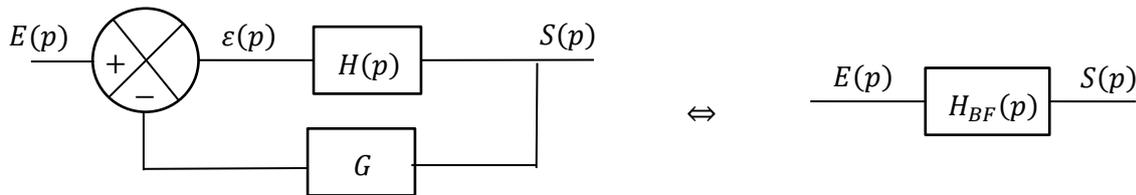
Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.III.3 K_{BF} des systèmes bouclés et erreur

A.III.3.a Détermination de K_{BF} selon la classe

Soit $H(p)$ une fonction de transfert quelconque :

$$H(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)} ; \quad m \geq n$$



$$K_{BO} = K_{CD} G$$

$$H_{BF}(p) = FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)G} = \frac{K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}}$$

$$H_{BF}(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m) + K_{BO} (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)}$$

A.III.3.a.i FTBO de classe nulle: $\alpha = 0$

$$\alpha = 0 \Rightarrow H_{BF}(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{(1 + K_{BO}) + \dots p \dots p^2 + \dots}$$

$$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$$

Pour un système à retour unitaire ($K_{BO} = K_{CD}$), on a :

$$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.III.3.a.ii FTBO de classe au moins égale à 1 : $\alpha \geq 1$

$$\alpha \geq 1 \Rightarrow H_{BF}(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{K_{BO} + \dots p + \dots p^2 + \dots} = \frac{K_{CD}}{K_{CD} G} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots}$$

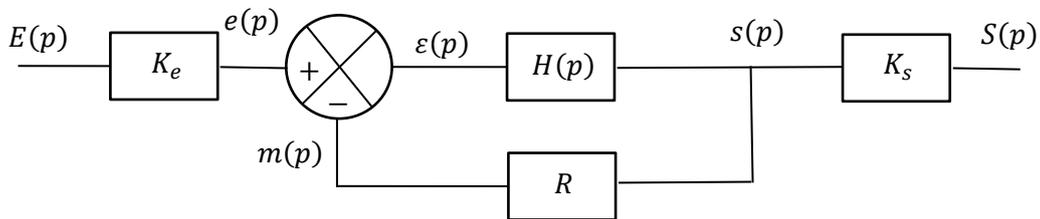
$$= K_{BF} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots}$$

$$K_{BF} = \frac{1}{G}$$

On remarque que dès qu'un système à retour unitaire ($G = 1$) est de classe 1 ou supérieure, on sait que l'écart statique est nul : $\varepsilon_s = E(1 - K_{BF}) = 0$

A.III.3.b Erreur statique des systèmes connaissant K_{BF}

Soit le système général suivant :



On appelle K_{CD} le gain statique de $H(p)$

$$K_{BO} = K_{CD} R$$

On a :

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \frac{1}{R}$

On en déduit la valeur du gain statique K_{comp} du système complet :

$$K_{comp} = K_{BF} K_e K_s$$

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{comp} = \frac{K_{BF} K_e K_s}{1 + K_{BO}}$	$K_{comp} = \frac{K_e K_s}{R}$

Finalement, on a l'écart statique entrée sortie :

$$\Sigma_s = E(1 - K_{comp})$$

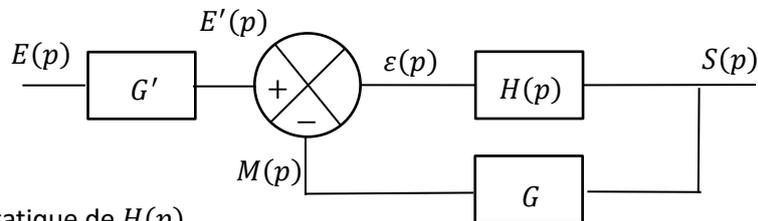
Remarque : Attention, cette formule ne s'applique qu'à l'écart statique même si certains cas particuliers peuvent exister pour l'erreur de traînage

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.III.4 Choix du gain avant comparateur

A.III.4.a Présentation du problème

Soit un système **stable** ayant un retour de type gain pur G :



Soit K_{CD} le gain statique de $H(p)$.

Si les grandeurs $e(t)$ et $s(t)$ sont bien les mêmes, $e(t)$ étant la vraie consigne de $s(t)$, il y a une mesure de la valeur de sortie $s(t)$ par le gain G et il faut donc aussi transformer la grandeur d'entrée $e(t)$ avec un gain G' en $e'(t)$.

G est imposé par le capteur, **G' peut être choisi.**

Notre objectif est d'obtenir un écart statique nul en choisissant bien G' .

A.III.4.b Idées reçues

On dit souvent :

- Il faut prendre $G = G'$ pour comparer des grandeurs comparables – Mais changer de capteur qui transforme toujours la grandeur d'entrée en grandeur de sortie avec un gain différent (5V par tours au lieu de 2V par tout) permet toujours de « comparer des grandeurs comparables » au sens des unités
- Il faut prendre $G = G'$ de manière à avoir une erreur proportionnelle à l'écart, ou avoir entrée = sortie quand l'écart est nul... On a déjà parlé de ce point précédemment. Mais, l'écart au comparateur ne tend pas toujours vers 0... La preuve, si la FTBO est de classe 0, l'écart ne tend jamais vers 0. Un autre choix de G' pourrait être plus judicieux !

Nous allons donc voir ce qu'il faut faire dans les paragraphes suivants.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.III.4.c Choix de G'

Nous connaissons maintenant le gain statique de la partie bouclée :

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \frac{1}{G}$

Obtenir un écart statique nul consiste à obtenir un gain statique complet du système égal à 1.

On a :

$$K_{comp} = G' K_{BF}$$

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{comp} = G' \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{comp} = G' \frac{1}{G}$

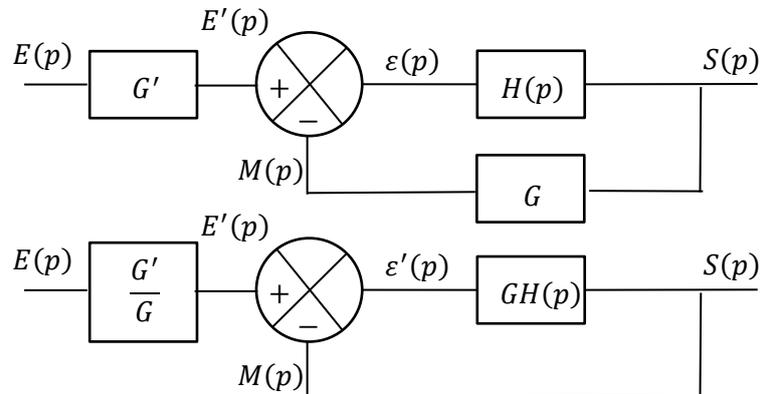
Il faut donc choisir $G' = \frac{1}{K_{BF}}$:

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$G' = \frac{1 + K_{BO}}{K_{CD}}$	$G' = G$

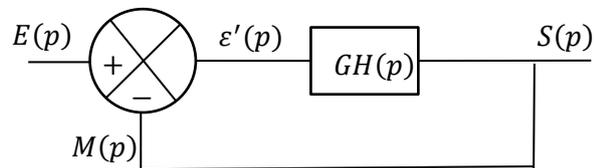
Dans la majorité des problèmes traités, soit la fonction de transfert $H(p)$ est de classe 1, soit on va ajouter un correcteur intégrateur à la chaîne directe. On sera donc quasiment tout le temps dans le cas $G' = G$! Mais attention, si la classe est nulle, ce n'est pas le bon choix...

A.III.4.d Modification de schéma bloc

On peut proposer la modification de schéma bloc suivante :



Comme on se retrouve quasiment tout le temps dans la situation $G' = G$, il vient :



Ainsi, le système est à retour unitaire, l'écart au comparateur du système modifié vaut l'erreur entrée sortie :

$$\Sigma_s = A$$

Remarque : cet écart au comparateur n'est pas le même que l'écart au comparateur du système sans retour unitaire.

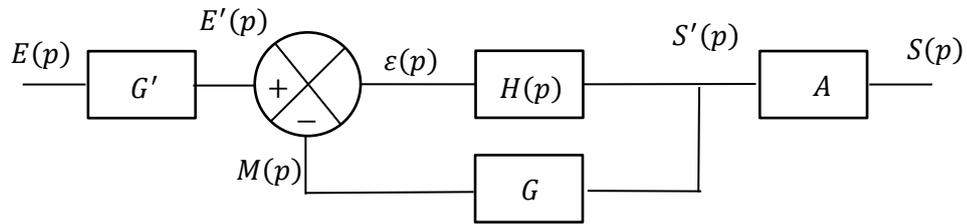
On peut alors directement connaître les performances de notre système à l'aide du tableau :

Ecart au comparateur du système modifié, donc $\Sigma_s \odot$			
$e(t)$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0	0
Echelon E	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0
Rampe at	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

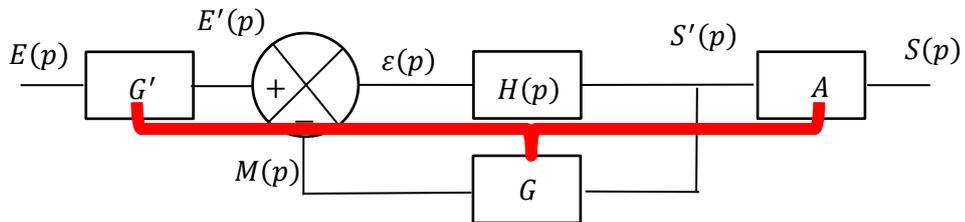
Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.III.4.e Erreur à ne pas faire

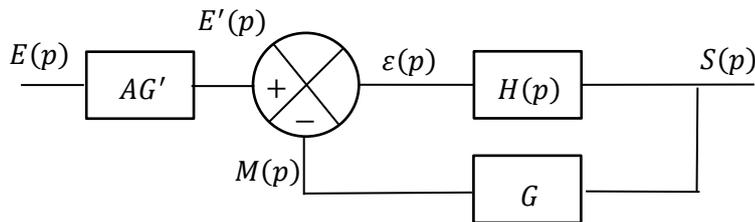
Dans le cas suivant :



Il ne faut pas $G' = G$ mais $AG' = G$



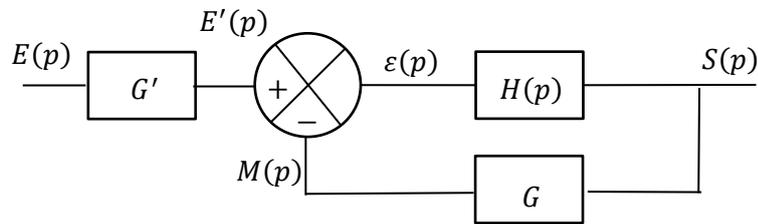
On se ramène en effet au cas suivant :



Et on applique la démarche à ce schéma bloc !

A.III.4.f Conclusions

Dans la situation suivante :

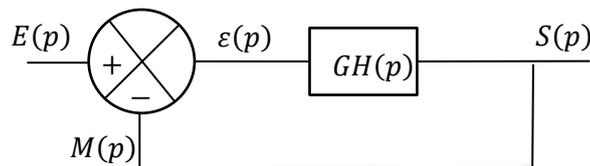


Classe de la *FTBO* nulle (très peu rencontré en pratique):

- Le gain statique de la boucle vaut $K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1+K_{BO}}$
- On annule l'erreur statique entrée/sortie $\Sigma_s = E - S$ en choisissant : $G' = \frac{1}{K_{BF}} = \frac{1+K_{BO}}{K_{CD}}$
- L'erreur statique est dépendante de l'éventuelle non invariance du système
- On sait que l'écart en vitesse au comparateur tend vers l'infini...

Classe de la *FTBO* supérieure ou égale à 1 :

- Le gain statique de la boucle vaut $K_{BF} = \frac{1}{G}$ avec G le retour
- On annule l'erreur statique en choisissant : $G' = \frac{1}{K_{BF}} = G$ ($\Sigma_s = \alpha A$) et il reste nul en cas de non invariance du système
- On modifie le schéma bloc ainsi :



- On connaît les erreurs directement avec le tableau des écarts car $\Sigma_s = A$

$e(t)$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0
Echelon E	0	0
Rampe at	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

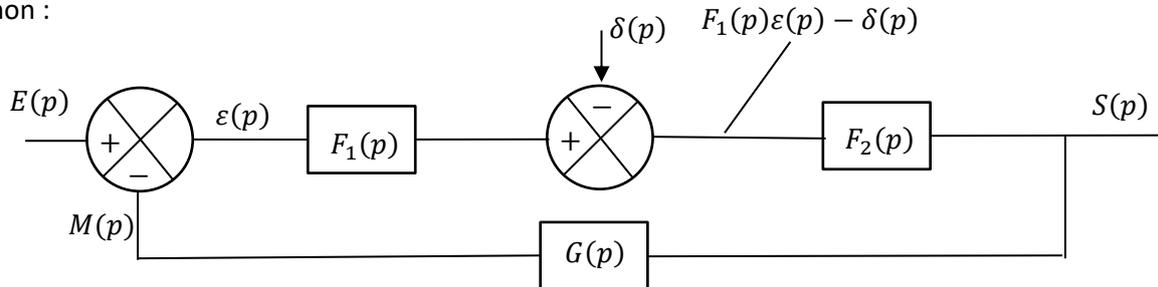
- Attention : L'écart au comparateur A n'est pas le même sur les deux schémas blocs avec et sans retour unitaire

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.III.5 Influence des perturbations

A.III.5.a Problème étudié

Intéressons-nous à un système asservi présentant une perturbation, qu'il soit à retour unitaire ou non :



Notre objectif est de déterminer l'influence d'une perturbation en fonction de l'endroit où elle est placée sur la précision du système.

Exemple : Est-ce que si l'on appuie de manière constante (échelon) sur la tige d'un vérin qui sort va influencer la position obtenue à l'aide de l'asservissement ?

A.III.5.b Calcul de l'écart au premier comparateur

$$\varepsilon(p) = E(p) - M(p) = E(p) - G(p)S(p) \Leftrightarrow \varepsilon(p) = E(p) - G(p)F_2(p)[F_1(p)\varepsilon(p) - \delta(p)]$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - G(p)F_2(p)F_1(p)\varepsilon(p) + G(p)F_2(p)\delta(p)$$

$$\varepsilon(p) + G(p)F_2(p)F_1(p)\varepsilon(p) = E(p) + G(p)F_2(p)\delta(p)$$

$$\varepsilon(p)[1 + G(p)F_2(p)F_1(p)] = E(p) + G(p)F_2(p)\delta(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) + \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p) = \varepsilon(p) = \varepsilon_e(p) + \varepsilon_p(p)$$

L'écart est donc composé de deux sources :

- L'entrée $\varepsilon_e(p) = \frac{1}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p)$
- La perturbation $\varepsilon_p(p) = \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$

Remarques :

- On obtient l'expression de la sortie $S(p)$ en fonction de l'entrée $E(p)$:

$$G(p)S(p) = E(p) - \varepsilon(p) = E(p) - \frac{1}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) - \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$$

$$G(p)S(p) = \frac{G(p)F_1(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) - \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$$

$$S(p) = \frac{F_2(p)F_1(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}E(p) - \frac{F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)}\delta(p)$$

- $\varepsilon_e(p)$ et $\varepsilon_p(p)$ ont le même dénominateur, si le système sans perturbation est stable, le système perturbé l'est aussi.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

$F_1(p)$, $F_2(p)$ et $G(p)$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$F_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^\alpha D_1(p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_1(0) = D_1(0) = 1 \\ \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$F_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p^\beta D_2(p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_2(0) = D_2(0) = 1 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

$$G(p) = \frac{K_3 N_3(p)}{p^\gamma D_3(p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_3(0) = D_3(0) = 1 \\ \gamma \geq 0 \end{cases}$$

Alors :

$$F_1(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_1}{p^\alpha} ; \quad F_2(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_2}{p^\beta} ; \quad G(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_3}{p^\gamma}$$

Soit une perturbation de type :

$$\delta(p) = \frac{\delta_0}{p^\delta} \quad \text{avec} \quad \delta \geq 0 ; \quad \varepsilon_p(p) = \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)} \frac{\delta_0}{p^\delta}$$

Notons ε_{sp} l'écart statique induit par la perturbation. Si le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_{sp} = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{G(p)F_2(p)}{1 + G(p)F_1(p)F_2(p)} \frac{\delta_0}{p^{\delta-1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{K_2 K_3}{p^\beta p^\gamma}}{p^{\delta-1} \left(1 + \frac{K_1 K_2 K_3}{p^\alpha p^\beta p^\gamma} \right)} \delta_0$$

$$\varepsilon_{sp} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-\delta+1} K_2 K_3 \delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3}$$

Nous pouvons alors donner la valeur de cet écart en fonction la classe de chaque fonction de transfert $F_1(p)$, $F_2(p)$ et $G(p)$. La discussion se fait sur $\alpha + \beta + \gamma$ qui change l'équivalent selon qu'il vaut 0 ou non. Traitons trois exemples :

Perturbation en impulsion :

$\delta = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
Soit $\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{p K_2 K_3 \delta_0}{1 + K_1 K_2 K_3}$	$\frac{p^{\alpha+1} K_2 K_3 \delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3} \underset{0}{\sim} \frac{p^{\alpha+1} \delta_0}{K_1}$
Soit $\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{p K_2 K_3 \delta_0}{p^{\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3} \underset{0}{\sim} \frac{p \delta_0}{K_1}$	

$\delta = 0$	$\alpha \geq 0$
$\beta + \gamma = 0$	0
$\beta + \gamma \geq 1$	

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

Perturbation en échelon :

$\delta = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{K_2 K_3 \delta_0}{1 + K_1 K_2 K_3} \sim \frac{K_2 K_3 \delta_0}{1 + K_1 K_2 K_3}$	$\frac{p^\alpha K_2 K_3 \delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3} \sim \frac{p^\alpha \delta_0}{K_1}$
$\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{K_2 K_3 \delta_0}{p^{\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3} \sim \frac{\delta_0}{K_1}$	

$\delta = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{K_2 K_3 \delta_0}{1 + K_1 K_2 K_3}$	0
$\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{\delta_0}{K_1}$	

Perturbation en rampe :

$\delta = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	$\frac{p^{-1} K_2 K_3 \delta_0}{1 + K_1 K_2 K_3} \sim \frac{1}{p} \frac{K_2 K_3 \delta_0}{1 + K_1 K_2 K_3}$	$\frac{K_2 K_3 \delta_0}{p^{1+\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3} \sim \frac{\delta_0}{K_1}$	$\frac{p^{\alpha-1} K_2 K_3 \delta_0}{p^{\alpha+\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3} \sim \frac{p^{\alpha-1} \delta_0}{K_1}$
$\beta + \gamma \geq 1$	$\frac{p^{-1} K_2 K_3 \delta_0}{p^{\beta+\gamma} + K_1 K_2 K_3} \sim \frac{1}{p} \frac{\delta_0}{K_1}$		

$\delta = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
$\beta + \gamma = 0$ $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$	+∞	$\frac{\delta_0}{K_1}$	0
$\beta + \gamma \geq 1$			

A.III.5.c Conclusions

L'écart statique provoqué par une perturbation en impulsion est toujours nul.

L'écart statique provoqué par une perturbation de type échelon est nul s'il existe au moins une intégration en amont de la perturbation : $\alpha \geq 1$

L'écart statique provoqué par une perturbation de type rampe est nul s'il existe au moins deux intégrations en amont de la perturbation : $\alpha \geq 2$, etc...

On voit que si l'effet d'une perturbation est ni infini, ni nul, l'augmentation du gain de la partie de la FTBO avant celle-ci le diminue.

A.III.6 Conclusions sur la précision

L'ajout d'intégrations est positif pour la précision des systèmes.

L'ajout d'une intégration en amont d'une perturbation en échelon annule son effet.

L'ajout d'une double intégration en amont d'une perturbation en rampe annule son effet.

Plus le gain de la FTBO est grand, meilleure est la précision si l'écart n'est pas nul.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.IV. Rapidité

A.IV.1 Définition

Soit un système supposé stable dont l'entrée est un échelon. Le système tend vers une valeur finale que nous noterons S_∞ :

$$S_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

La rapidité de ce système est liée au temps mis par sa réponse $s(t)$ pour atteindre une valeur proche de S_∞ , voire dépasser S_∞ , ou pour ne plus quitter un intervalle donné correspondant par exemple à $\pm X\%$ de S_∞ .

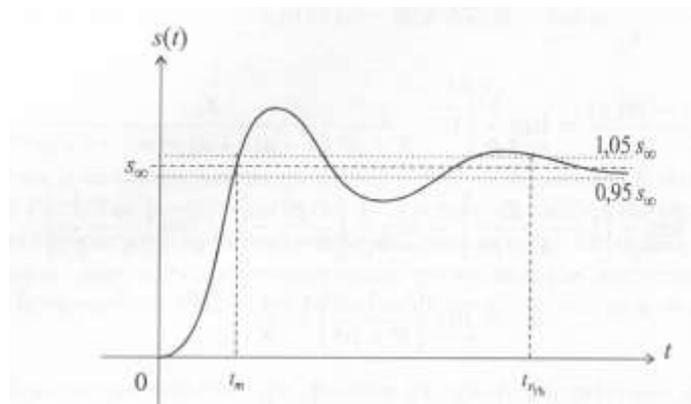
A.IV.2 Critères de rapidité

A.IV.2.a Temps de réponse à $X\%$

Le temps de réponse à $X\%$, noté $tr_{X\%}$, est le temps à partir duquel la réponse $s(t)$ ne quitte plus la plage à $\pm X\%$ de S_∞

$$\forall t > tr_{X\%}, \left(1 - \frac{X}{100}\right) S_\infty < s(t) < \left(1 + \frac{X}{100}\right) S_\infty$$

Le critère standard est le temps de réponse à 5%.



A.IV.2.b Temps de montée

On définit le temps de montée t_m comme le temps auquel la sortie franchit pour la première fois son asymptote quand c'est le cas (souvent en pratique).

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.IV.2.c Bande passante

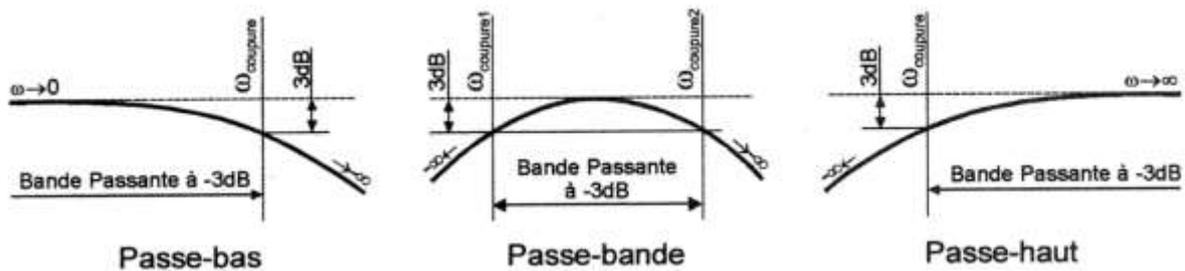
On définit la bande passante à $-X$ dB comme la plage de pulsations pour lesquelles le gain est supérieur à une valeur optimale de gain diminuée de X dB.

$$\omega/G_{dB} > G_{opt} - X$$

On s'intéresse en particulier à la bande passante à -3 dB. On définit ω_c , pulsation de coupure à -3 dB. Une perte de 3 dB correspond à une perte de module de 30% :

$$20 \log K - 3dB = 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20 \log(0,7K)$$

Exemples :



Pour un système de type second ordre résonnant, la bande passante à -3dB est définie comme pour un passe-bas, sans tenir compte de la résonance. On pourra soit rechercher, soit éviter cette résonance suivant les applications.

Pratiquement tous les systèmes physiquement réalisables sont de type passe-bas : le module de leur fonction de transfert tend vers zéro à haute fréquence.

Cas particulier : on définit la bande passante à 0 dB comme la plage de pulsations pour lesquelles le gain est positif ($|H| > 1$).

Les deux critères que l'on rencontre souvent sont :

- Bande passante : $BP = [0, \omega_c]$
- Bande passante à 0 dB : $BP_0 = [0, \omega_{c_0}]$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes	Denis DEFAUCHY
16/11/2017	asservis	Cours

A.IV.3 Application aux systèmes du premier et second ordre

A.IV.3.a Systèmes non bouclés

A.IV.3.a.i Premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Soit une entrée échelon unitaire : $E(p) = \frac{1}{p}$

$$\text{On a donc : } S(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K}{p} - \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}$$

Par application de la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle du système est donc:

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

• Temps de réponse à 5%

Le temps de réponse à 5% est tel que :

$$KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{95}{100} \lim_{t \rightarrow +\infty} KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 0,95 KE_0$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,95$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,05$$

$$\Leftrightarrow t = -\tau \ln 0,05$$

$$\Leftrightarrow t \sim 3\tau$$

Pour un système du premier ordre :

$$tr_{5\%} = 3\tau = \frac{3}{\omega_0}$$

Ainsi, plus ω_0 est élevée, plus le système est rapide.

• Temps de montée

La réponse d'un premier ordre ne franchit jamais son asymptote. On ne parle donc pas de temps de montée.

• Rapidité et bande passante

$$G_{\omega_c} = G_0 - 3 = 20 \log |H(0)| - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 2$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = 1$$

On a donc la relation suivante :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_c}$$

Par ailleurs, nous avons montré précédemment :

$$\omega_{c0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$$

Ainsi, plus ω_c est grande, donc plus la bande passante à -3 dB ou à 0 dB est grande, plus le système est rapide.

Pour un système du premier ordre, une augmentation de la bande passante à -3dB et à 0 dB provoque une augmentation de la rapidité.

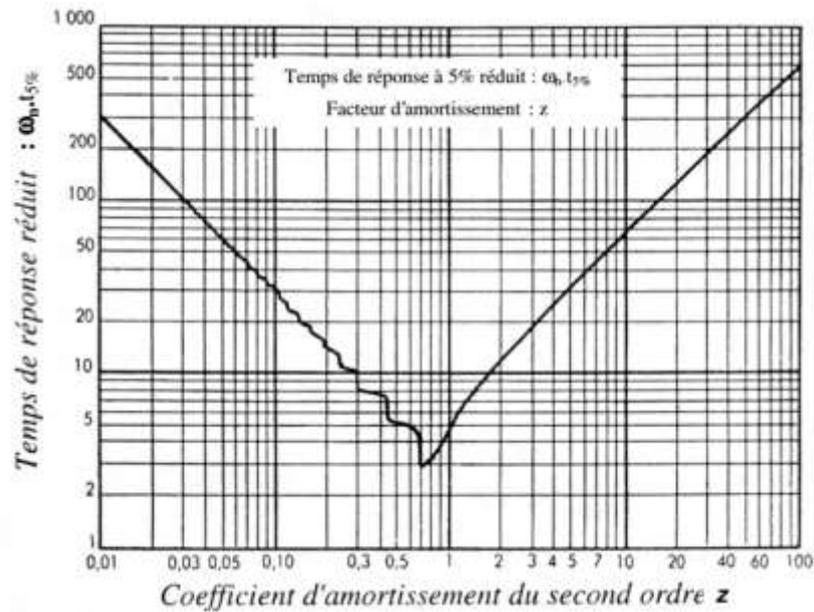
A.IV.3.a.ii Deuxième ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

• Temps de réponse à 5%

Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% d'une réponse indicielle dépend du facteur d'amortissement. La courbe suivante permet de le déterminer :

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------



Cette courbe illustre le fait que pour un second ordre, si z est fixé, on a :

$$tr_{5\%}\omega_0 = k(z)$$

Il est recommandé de savoir qu'au temps de réponse le plus faible ($z = 0,7$), avec présence d'un dépassement, on a :

$$tr_{5\%}\omega_0 = 3$$

Ainsi, une augmentation de ω_0 , correspondant à une augmentation de la bande passante à -3 dB (ω_c) et à 0 dB (ω_{c0}), induit une augmentation de la rapidité du système.

De même, il faut savoir qu'au temps de réponse le plus faible sans dépassement ($z = 1$), on a :

$$tr_{5\%}\omega_0 = 5$$

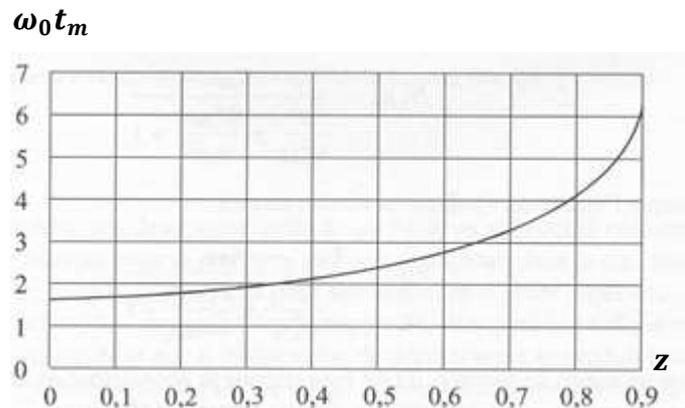
• **Temps de montée**

Dans le cas d'un système du second ordre, le temps de montée peut être défini dans le cas de la présence d'un dépassement.

C'est donc dans le cas où $z < 1$.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

Dans ce cas, on obtient la courbe suivante :



L'analyse de cette fonction montre que pour les valeurs courantes du facteur d'amortissement (entre 0,2 et 0,8), on a :

$$2 < \omega_0 t_m < 4$$

Nous retiendrons de cet encadrement une valeur approchée de :

$$\omega_0 t_m \approx 3$$

Ainsi, plus ω_0 est grande, plus le temps de montée est court, plus le système est rapide.

• Rapidité et bande passante

Dans un système du second ordre, en résolvant l'équation :

$$G_{\omega_c} = G_0 - 3 = 20 \log |H(0)| - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \frac{z^2 \omega_c^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 + \frac{\omega_c^4}{\omega_0^4} - 2 \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} + 4z^2 \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}$$

$$X = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + (2z^2 - 1)2X - 1 = 0$$

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

$$\Delta = 4(2z^2 - 1)^2 + 4 > 0$$

$$X = \frac{(1 - 2z^2)2 + \sqrt{4(2z^2 - 1)^2 + 4}}{2} = (1 - 2z^2) + \sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1}$$

Comme $\omega_c > 0$

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1} - (2z^2 - 1)}$$

Par ailleurs, nous avons montré précédemment :

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$$

Ainsi, une augmentation de ω_0 , correspondant à une augmentation de la bande passante à -3 dB (ω_c) et à 0 dB (ω_{c_0}), induit une augmentation de la rapidité du système.

A.IV.3.a.iii Conclusions

Les systèmes du premier et second ordre sont d'autant plus rapides que leur bande passante est grande, c'est-à-dire plus leur pulsation propre ω_0 est grande.

1° ordre	2° ordre
$tr_{5\%} = 3\tau$ $\omega_c = \omega_0$ $\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$	$\omega_0 t_m \approx 3$ $tr_{5\%} \omega_0 = k(z)$ $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1} - (2z^2 - 1)}$ $\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$

Ainsi, pour des systèmes bouclés du 1° et 2° ordre, augmenter leur rapidité consistera à augmenter ω_{0BF} OU ω_{cBF} .

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.IV.3.b Systèmes bouclés

Considérons dans cet exemple des systèmes à retour unitaire.

A.IV.3.b.i Premier ordre bouclé

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}}{1 + \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO} + \tau_{BO}p} = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}p} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}p}$$

On a donc les coefficients caractéristiques du système bouclé :

$$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} \quad ; \quad \tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

- **Temps de réponse à 5%**

Comme $tr_{5\%} = 3\tau_{BF}$, plus K_{BO} est grand, plus τ_{BF} est petit, donc plus le système est rapide.

Pour un système du premier ordre bouclé à retour unitaire, le temps de réponse à 5% est d'autant plus faible (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand.

- **Temps de montée**

Dans le cas d'un premier ordre, la notion de temps de montée n'a pas de sens.

- **Rapidité et bande passante**

$$\omega_{c_{BF}} = \frac{1}{\tau_{BF}}$$

Pour un système du premier ordre bouclé à retour unitaire, la bande passante est d'autant plus grande (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.IV.3.b.ii Second ordre bouclé

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{2z_{BO}}{(1 + K_{BO})\omega_{0BO}}p + \frac{p^2}{(1 + K_{BO})\omega_{0BO}^2}} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{0BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

$$\omega_{0BF} = \omega_{0BO}\sqrt{1 + K_{BO}}$$

$$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

$$z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}} < z_{BO}$$

• Temps de réponse à 5%

Tant que $z_{BF} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, augmenter K_{BO} diminue z_{BF} et augmente ainsi la rapidité au sens $tr_{5\%}$.

MAIS ATTENTION : continuer de diminuer z_{BF} en dessous de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ induit une ré augmentation de $tr_{5\%}$!!!
Le système « est de plus en plus rapide » car il réagit de plus en plus vite, son temps de montée augmente (paragraphe suivant), mais au sens $tr_{5\%}$, il ralentit !

• Temps de montée

Comme $\omega_{0BF}t_m \approx 3$, plus ω_{0BF} est grand, soit plus K_{BO} est grand, plus le temps de montée est faible.

Pour un système du second ordre bouclé à retour unitaire, le temps de montée est d'autant plus faible (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand.

Dernière mise à jour	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

• **Rapidité et bande passante**

$$\omega_{0BF} = \omega_{0BO} \sqrt{1 + K_{BO}}$$

Augmenter K_{BO} augmente ω_{0BF} et donc la bande passante et la bande passante à 0 db du système (cf second ordre étudié précédemment)

$$tr_{5\%} \omega_{0BF} = k(z_{BF}) \quad ; \quad tr_{5\%} = \frac{k(z_{BF})}{\omega_{0BF}}$$

$$t_m \omega_{0BF} \approx 3 \quad ; \quad t_m \approx \frac{3}{\omega_{0BF}}$$

Augmenter K_{BO} , soit augmenter ω_{0BF} augmente la rapidité (temps de montée) du second ordre bouclé, mais peut avoir une influence différente sur le temps de réponse à 5%. Cela rejoint l'étude du second ordre du paragraphe précédent.

Pour un système du second ordre bouclé à retour unitaire, la bande passante est d'autant plus grande (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand, la rapidité du système s'en trouve augmentée, mais attention, pas forcément au sens $tr_{5\%}$.

A.IV.3.b.iii Conclusions

Pour les systèmes bouclés du premier et du second ordre à retours unitaires, plus le gain statique de la FTBO est grand, plus la bande passante est importante et plus le système est rapide (temps de montés).

La démarche proposée ici ne se limite pas aux systèmes à retour unitaire, et tous les systèmes seront étudiés en termes de rapidité selon les mêmes critères.

A.IV.4 Conclusions sur la rapidité

La rapidité des systèmes est directement liée à la pulsation de coupure à -3dB, ou à la pulsation propre du système. Plus elles sont élevées, plus la rapidité est importante.

Dans le cas des systèmes bouclés du premier et second ordre, plus le gain statique de la boucle ouverte est important, plus la rapidité est bonne.

Dernière mise à jour 16/11/2017	Performances des systèmes asservis	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------

A.V. Dépassement

Le dépassement des systèmes fait partie de leurs performances.

Donnons l'exemple d'un système du second ordre de facteur d'amortissement z tel que $z < 1$.

La valeur du premier dépassement est :

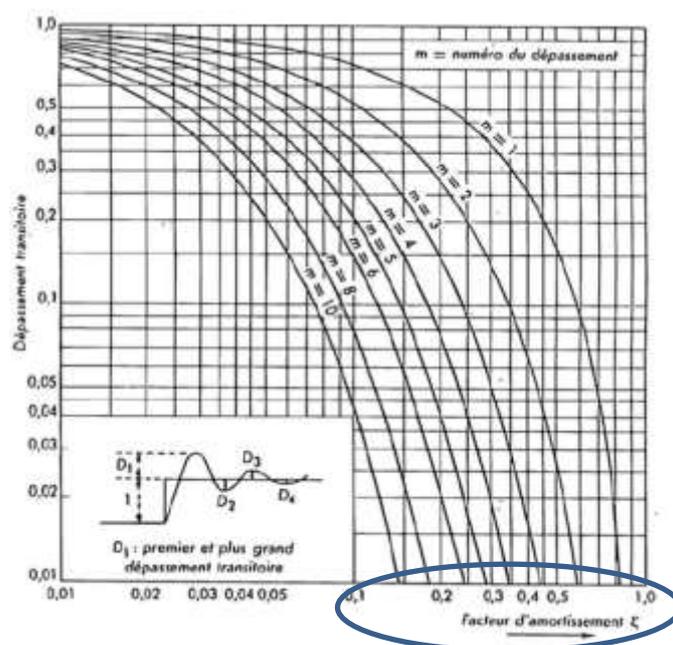
$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Si $z = 0,7$, $D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot 0,7}{\sqrt{1-0,7^2}}} \approx 5\%$

Ce dépassement est obtenu au temps :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

L'abaque suivant permet de connaître la valeur des dépassements successifs des systèmes en fonction du facteur d'amortissement :



Ainsi, plus z est faible, plus le dépassement est important.

Dans le cas d'un système du second ordre bouclé à retour unitaire, nous avons montré que :

$$z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}} < z_{BO}$$

Ainsi, dans ce cas, une **augmentation du gain de la boucle ouverte K_{BO} induit une diminution de l'amortissement en boucle fermée, soit une augmentation du dépassement.**

D'une manière générale, l'augmentation du gain de la boucle ouverte induit l'apparition ou l'augmentation du dépassement.