Dynamique : Chariot élévateur à bateaux (ENS PSI 12)

Q1 $(m_T + m_1 + m_C).\overrightarrow{OG} = m_{T.}\overrightarrow{OG_T} + m_{1.}\overrightarrow{OG_1} + m_{C.}\overrightarrow{OG_C}$

G confondu avec O ⇨ $0 = m_{T.}x_{G_T} + m_{1.}x_{G_1} + m_{C.}x_{G_C}$ ⇨ $\boxed{x_{G_C} = \dfrac{-m_{T.}x_{G_T} - m_{1.}x_{G_1}}{m_C}}$

Q2 On isole $\{\Sigma, B\}$, bilan des actions mécaniques extérieures : Poids du bateau, poids de (Σ) et action du sol sur chaque roue.

Résultante dynamique : $\boxed{-(M + m_B).dec_x.\vec{x}_1 = \Sigma_{i=1}^{4}\left(-T_i.\vec{x}_1 + N_i.\vec{z}_1\right) - (M + m_B).g.\vec{z}_1}$

Calcul du moment dynamique :

Pour l'ensemble (Σ) : $\overrightarrow{\sigma(O,\Sigma/R)} = [I(O,\Sigma)].\overrightarrow{\omega(\Sigma/R_1)} = \vec{0}$ donc

$$\overrightarrow{\delta(I_{4,}\Sigma/R_1)} = \overrightarrow{\delta(O,\Sigma/R_1)} - \overrightarrow{I_4O} \wedge M.dec_x\vec{x}_1 = -\left(\frac{-2.\mathrm{L}}{3}.\vec{x}_1 + h.\vec{z}_1\right) \wedge M.dec_x.\vec{x}_1 = -h.M.dec_x\vec{y}_1$$

Pour le bateau (B) : $\overrightarrow{\sigma(G_B, B/R_1)} = [I(G_B, B)].\overrightarrow{\omega(B/R_1)} = \vec{0}$ donc

$$\overrightarrow{\delta(I_4, B/R)} = \overrightarrow{\delta(G_B, B/R_1)} - \overrightarrow{I_4G_B} \wedge m_B.dec_x.\vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{\delta(I_4, B/R)} = -\left[\left(x_{G_B} - \frac{2.\mathrm{L}}{3}\right).\vec{x}_1 + \left(z_{G_B} + h\right).\vec{z}_1\right] \wedge m_B.dec_x.\vec{x}_1 = -\left(z_{G_B} + h\right).m_B.dec_x.\vec{y}_1$$

Moment dynamique autour de l'axe $(I_{4,}\vec{y}_1)$:

$$\boxed{-dec_x.\left(M.h + m_B.z_{G_B}\right) = x_{G_B}.m_B.g - \frac{2.\mathrm{L}}{3}.M.g + L.(N_1 + N_2)}$$

Q3 Les équations précédentes comportent 8 inconnues (T_i et N_i).

Avec l'hypothèse de symétrie, on divise le nombre d'inconnues par 2 (il en reste 4).

Enfin, en supposant que les roues arrière décollent, on retire 2 inconnues (il en reste 2) .

Au final, des 3 équations précédentes, 2 seront utiles pour déterminer les actions du sol sur le chariot. La dernière permettra de déterminer la décélération limite.

Avec les hypothèses précédentes, on peut écrire :

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ N_1 = N_2 \\ T_4 = T_3 \\ N_4 = N_3 \end{cases} \quad \text{Donc : } \begin{cases} -(M + m_B)..dec_x.\vec{x}_1 = \left(-2.(T_1 + T_4)\vec{x}_1 + 2.(N_1 + N_4)\vec{z}_1\right) - (M + m_B).g.\vec{z}_1 \\ -dec_x.\left(M.h + m_B.z_{G_B}\right) = x_{G_B}.m_B.g - \dfrac{2.\mathrm{L}}{3}.M.g + 2.\mathrm{L}.\mathrm{N}_1 \end{cases}$$

Q4 Quand les roues arrière perdent le contact avec le sol, $N_1 = 0$ ⇨

$$\boxed{-dec_x = \frac{x_{G_B}.m_B.g - \dfrac{2.\mathrm{L}}{3}.M.g}{M.h + m_B.z_{G_B}}}$$

Q5 On se place à la limite du basculement. Ainsi $T_1 = N_1 = 0$.

Equation de la résultante : $-(M+m_B).dec_x.\overrightarrow{x_1} = \left(-2.T_4.\overrightarrow{x_1} + 2.N_4.\overrightarrow{z_1}\right) - (M+m_B).g.\overrightarrow{z_1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(M+m_B).dec_x = -2.T_4 \\ 0 = 2.N_4 - (M+m_B).g \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow \begin{cases} T_4 = \dfrac{(M+m_B).dec_x}{2} \\ N_4 = \dfrac{(M+m_B).g}{2} \end{cases}}$$

Pour finir, il suffit de comparer le rapport $\dfrac{T_4}{N_4}$ avec f : $\dfrac{T_4}{N_4} = \dfrac{dec_x}{g}$ donc si $\dfrac{dec_x}{g} \leq f$ le basculement aura lieu avant le glissement. Sinon, ce sera l'inverse.

Q6 L'ensemble $\{\Sigma, B\}$ risque de basculer autour de l'axe $\left(I_2, \overrightarrow{x_1}\right)$. Il faut donc écrire l'équation du moment dynamique autour de cet axe.

Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_{G_{\Sigma B}},\{\Sigma,B\}/R_0} = \left[I_{G_{\Sigma B}},\{\Sigma,B\}\right]\overrightarrow{\Omega_{\{\Sigma,B\}}} = \left[I_{G_{\Sigma B}},\{\Sigma,B\}\right]\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_{\Sigma B}},\{\Sigma,B\}/R_0} = \dot{\alpha}\left(-E_1\overrightarrow{x_1} + C_1\overrightarrow{z_0}\right)$$

$$\overrightarrow{\sigma_{I_2},\{\Sigma,B\}/R_0} = \dot{\alpha}\left(-E_1\overrightarrow{x_1} + C_1\overrightarrow{z_0}\right) + \overrightarrow{I_2G_{\Sigma B}} \wedge (M+m_B)V\overrightarrow{x_1}$$

Or $\overrightarrow{I_2G_{\Sigma B}} = \overrightarrow{I_2O} + \overrightarrow{OG_{\Sigma B}} = \left(\dfrac{L}{3} + x_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{x_1} + \left(E + y_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{y_1} + \left(h + z_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{z_1}$

$$\overrightarrow{\sigma_{I_2},\{\Sigma,B\}/R_0} = \dot{\alpha}\left(-E_1\overrightarrow{x_1} + C_1\overrightarrow{z_0}\right) + (M+m_B)V\left[-\left(E + y_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{z_1} + \left(h + z_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{y_1}\right]$$

Calcul du moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_{I_2,}\{\Sigma,B\}/R_0}.\overrightarrow{x_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{I_2,}\{\Sigma,B\}/R_0}}{dt}\right|_{R_0}.\overrightarrow{x_1} + (M+m_B)\underbrace{\left(\overrightarrow{V_{I_2/R_0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{\Sigma B}},\{\Sigma,B\}/R_0}\right)}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{V_{I_2/R_0}} \text{ est porté par } \overrightarrow{x_1}}.\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{I_2,}\{\Sigma,B\}/R_0}.\overrightarrow{x_1} = \frac{d\left(\overrightarrow{\sigma_{I_2,}\{\Sigma,B\}/R_0}.\overrightarrow{x_1}\right)}{dt} - \overrightarrow{\sigma_{I_2,}\{\Sigma,B\}/R_0}\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\overrightarrow{\delta_{I_2},\{\Sigma,B\}/R_0}.\overrightarrow{x_1} = -E_1\ddot{\alpha} - \overrightarrow{\sigma_{I_2},\{\Sigma,B\}/R_0}.\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} = -E_1\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}(M+m_B)V\left(h + z_{G_{\Sigma B}}\right)$$

Le moment dynamique autour de l'axe $\left(I_2, \overrightarrow{x_1}\right)$ donne :

$$-E_1\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}(M+m_B)V\left(h + z_{G_{\Sigma B}}\right) = 2E.(N_1 + N_4) - \left(E + y_{G_{\Sigma B}}\right)(M+m_B)g$$

$$\boxed{\Rightarrow -E_1\frac{\dot{V}}{\rho} - (M+m_B)\frac{V^2}{\rho}\left(h + z_{G_{\Sigma B}}\right) = 2E.(N_1 + N_4) - \left(E + y_{G_{\Sigma B}}\right)(M+m_B)g}$$

A vitesse V constante, et en prenant $N_1 = N_4 = 0$,la vitesse limite du basculement latéral est : $\boxed{V = \sqrt{\rho g \dfrac{E + y_{G_{\Sigma B}}}{h + z_{G_{\Sigma B}}}}}$