

Calculs d'intégrales

Le but de ce chapitre est d'étudier quelques algorithmes permettant un calcul approché efficace d'intégrales. Ce chapitre est le premier chapitre d'une série de chapitres d'analyse numérique, dont le but est d'obtenir des méthodes approchées pour la résolution de certains problèmes mathématiques. L'intérêt est que d'une part, les solutions exactes ne sont pas toujours faciles à obtenir mathématiquement, voire impossibles, et que d'autre part, dans de nombreuses disciplines scientifiques (physique, ingénierie...), une bonne valeur approchée de la solution est souvent largement suffisante. Évidemment, pour des études de ce type, il est important de savoir évaluer le temps de calcul d'une part, combiné d'autre part à la précision du résultat. Ce n'est que cette maîtrise de la précision du résultat qui rend la méthode valide.

Le principe général du calcul des intégrales est la quadrature : l'interprétation géométrique des intégrales est connue de tous : il s'agit de l'aire « sous » la courbe. L'idée est alors d'approcher la surface sous la courbe par une somme de surfaces élémentaires dont l'aire est facile à calculer, par exemple des rectangles. Ainsi :

- on prend une subdivision $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n < b$ de l'intervalle d'intégration $[a, b]$ (figure 7.1),
- on approche l'intégrale entre σ_i et σ_{i+1} (c'est-à-dire la surface sous la portion de courbe entre ces deux valeurs) par une aire facile à calculer
- On recolle les morceaux par sommation, en utilisant de façon sous-jacente la relation de Chasles.
- Lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, l'approximation devient bonne.

On rappelle :

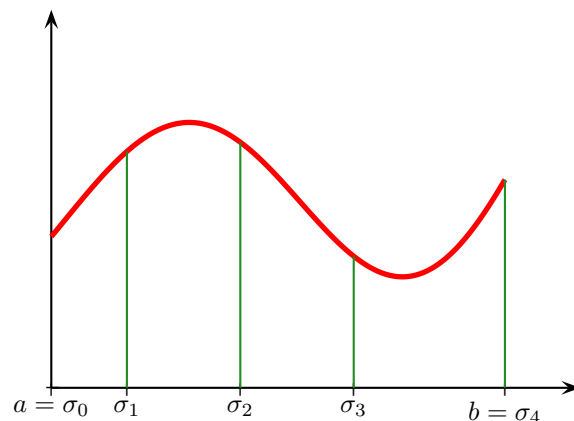


FIGURE 7.1 – Découpage de l'intégrale suivant une subdivision

Définition 7.0.1 (Subdivision et pas d'une subdivision)

1. Une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ est une séquence finie $(\sigma_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que :

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = b.$$

2. Le pas p d'une subdivision $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = b$ est la distance maximale entre deux points successifs de la subdivision :

$$p = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\sigma_i - \sigma_{i-1}).$$

Les trois premières méthodes que nous étudions suivent ce schéma, en considérant des approximations de plus en plus fines sur chaque sous-intervalle de la subdivision.

I La méthode des rectangles

On commence par exposer la méthode des rectangles. Il s'agit en fait d'approcher l'intégrale par des « sommes de Riemann », donc nous donnons la construction ci-dessous (voir figure 7.2)

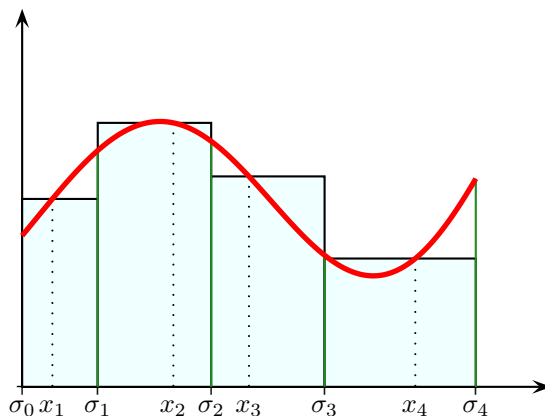


FIGURE 7.2 – Somme de Riemann

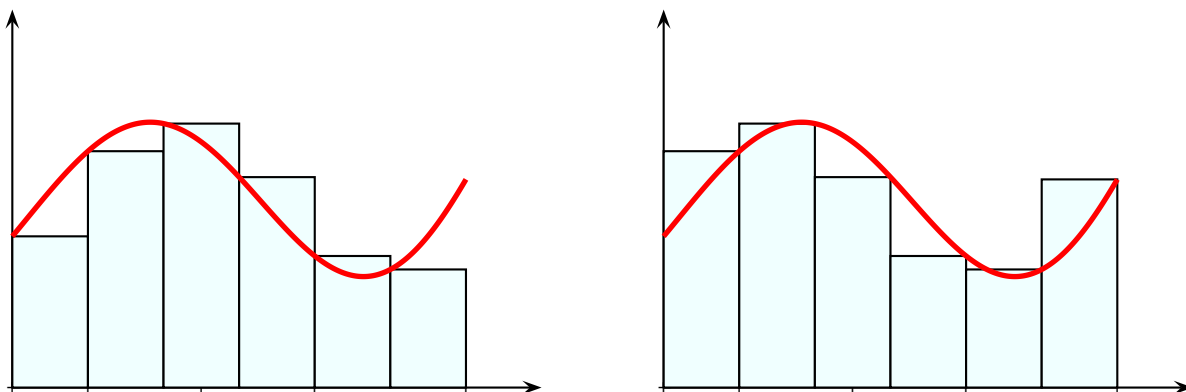


FIGURE 7.3 – Méthode des rectangles

Soit $\Sigma = \{a = \sigma_0 < \dots < \sigma_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$, et $X_\sigma = \{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$ des points associés à cette subdivision, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i].$$

On définit alors $I(\Sigma, X_\Sigma)$ l'approximation de l'intégrale obtenue en approchant la courbe sur $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ par la fonction constante de valeur $f(x_i)$. Ainsi, le morceau d'aire sous la courbe entre les coordonnées σ_{i-1} et σ_i est approchée par l'aire d'un rectangle de base $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ et de hauteur $f(x_i)$.

Ainsi :

$$I(\Sigma, X_\Sigma) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(\sigma_i - \sigma_{i-1}).$$

Théorème 7.1.1 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit f une fonction de classe C^0 sur $[a, b]$. Alors la somme de Riemann $I(\Sigma, X_\Sigma)$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$ lorsque le pas p_Σ tend vers 0.

◁ Éléments de preuve.

Utiliser la continuité uniforme (Heine) : si le pas est suffisamment petit, en notant h la fonction en escalier décrite par les rectangles (continue à droite ou gauche comme on le préfère aux bords des intervalles), on aura alors $|f - h| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ sur tout $[a, b]$, ε étant arbitraire. Intégrer et utiliser l'inégalité triangulaire. ▷

Ce résultat reste vrai dans un cadre plus général, pour des fonctions intégrables au sens de Riemann. On renvoie au cours de mathématiques pour une démonstration.

On peut majorer la vitesse de convergence avec quelques hypothèses complémentaires :

Théorème 7.1.2 (Vitesse de convergence des sommes de Riemann)

Soit f une fonction de classe C^1 , et M_1 un majorant de $|f'|$ sur $[a, b]$. On a alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I(\Sigma, X_\Sigma) \right| \leq M_1 p_\Sigma (b - a).$$

◁ Éléments de preuve.

Majorer cette fois $|f - h|$ (avec les mêmes notations) à l'aide de l'IAF sur chaque intervalle de la subdivision. ▷

En informatique, il est assez naturel d'utiliser une subdivision régulière $\Sigma_n = \{a + k \cdot \frac{b-a}{n}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. Dans ce cas, le pas est $p_n = \frac{1}{n}$, et on parle de « méthode des rectangles ».

Théorème 7.1.3 (Vitesse de convergence de la méthode des rectangles)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, Σ_n la subdivision régulière à n pas de l'intervalle $[a, b]$, et X_{Σ_n} une séquence de points associés. Alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I(\Sigma_n, X_{\Sigma_n}) \right| \leq \frac{M_1 (b - a)^2}{n}.$$

On a donc une convergence de la méthode des rectangles en $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Le plus souvent, on prend pour la séquence X_{Σ_n} des points particuliers sélectionnés dans les intervalles de la subdivision, par exemple la borne inférieure, la borne supérieure, ou le milieu.

Définition 7.1.4 (Méthode du point milieu)

Le choix des milieux des intervalles de la subdivision régulière fournit la méthode appelée *méthode du point milieu*.

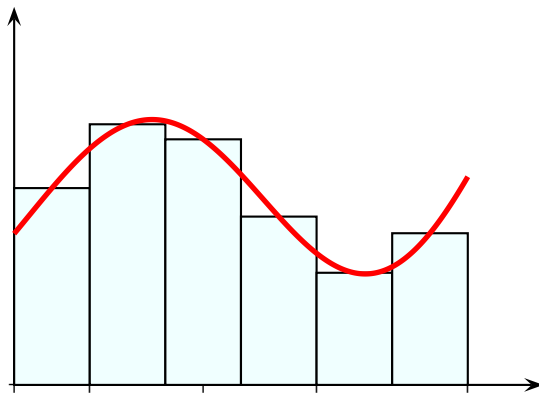


FIGURE 7.4 – Méthode du point milieu

Notons de façon plus générale, pour $\alpha \in [0, 1]$, $X_{n,\alpha}$ la séquence de points (x_1, \dots, x_n) définie par :

$$x_i = a + (i - 1 + \alpha) \frac{b - a}{n}.$$

Le choix de la borne inférieure de chaque intervalle de la subdivision correspond au choix de la valeur $\alpha = 0$; le choix de la borne supérieure au choix de $\alpha = 1$, et le choix du milieu à $\alpha = \frac{1}{2}$. On peut donner explicitement les formules d'approximation dans ces cas :

- Borne inférieure : $I(\Sigma_n, X_{n,0}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$
- Borne supérieure : $I(\Sigma_n, X_{n,1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$
- Point milieu : $I(\Sigma_n, X_{n,\frac{1}{2}}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right)$.

Intuitivement, en choisissant le point au milieu de l'intervalle, il y aura des compensations de l'erreur entre la moitié supérieure et la moitié inférieure de chaque intervalle. Cette compensation est d'ailleurs totale pour les fonctions affines (on dit que la méthode est exacte pour les fonctions affines). Des calculs montrent qu'effectivement, la vitesse de convergence est bien meilleure que pour la méthode des rectangles à gauche ou droite.

Théorème 7.1.5 (Vitesse de convergence de la méthode du point milieu)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ et M_2 un majorant de f'' sur cet intervalle. Alors

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt - I(\Sigma_n, X_{n,\frac{1}{2}}) \right| \leq \frac{M_2}{24n^2} (b-a)^3.$$

Ainsi, la méthode du point milieu converge en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

◁ Éléments de preuve.

Montrer d'abord sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) (\beta - \alpha) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{24} M_2,$$

en intégrant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 centrée en $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

Utiliser cette inégalité sur chaque intervalle de la subdivision et sommer. ▷

Exemple 7.1.6

Trouver un exemple de fonction pour laquelle la convergence de la méthode des rectangles avec la borne inférieure n'est pas en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, la méthode du point milieu donne une réelle amélioration.

II La méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à faire une approximation de la courbe non plus par des fonctions en escalier, mais par une fonction affine par morceaux, chaque morceau étant une corde de la courbe. Ainsi, étant donnée une subdivision $\Sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$, on définit la fonction affine joignant les points de coordonnée $(\sigma_i, f(\sigma_i))$. L'intégrale de la fonction sur un intervalle de la subdivision est alors approchée par l'aire d'un trapèze. Cette aire est donnée, pour l'intervalle $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$, par

$$(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \frac{f(\sigma_i) + f(\sigma_{i-1})}{2}.$$

On se donne toujours une subdivision de l'intervalle, avec les mêmes notations que précédemment.

Définition 7.2.1 (Méthode des trapèzes)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. L'approximation de $\int_a^b f(t) dt$ par la méthode des trapèzes est donnée par la suite :

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) (f(\sigma_k) + f(\sigma_{k-1})).$$

Dans le cas de la subdivision régulière, cette somme peut se réécrire :

$$I_n(f) = \frac{(b-a)(f(b) + f(a))}{2n} + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\sigma_k).$$

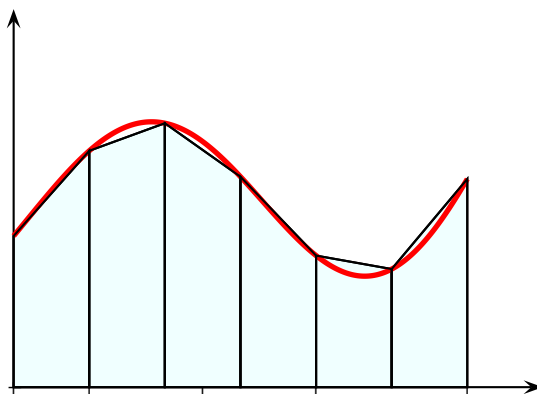


FIGURE 7.5 – Méthode des trapèzes

Il s'agit ici d'une approximation meilleure de par la méthode des rectangles (approximation à l'ordre 1). Le résultat montre cependant que le centrage des points dans la méthode des rectangles est tout aussi efficace, voire plus, que le fait de prendre les cordes.

Théorème 7.2.2 (Vitesse de convergence de la méthode des trapèzes)

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$, et $I_n(f)$ la suite des approximations par la méthode des

trapèzes. Soit M_2 un majorant de $|f''|$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I_n(f) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{6n^2}.$$

La convergence est donc en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser sur chaque intervalle de la subdivision la formule suivante, obtenue par double IPP :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)f''(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta - \alpha)\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{2},$$

majorer l'intégrale de gauche, puis sommer. ▷

Corollaire 7.2.3 (Retour sur la vitesse de CV de la méthode des rectangles)

Sous les mêmes hypothèse, si $f(a) + f(b) \neq 0$, on a l'équivalent suivant pour la vitesse de convergence de la méthode des rectangles avec choix des points au bord gauche des intervalles :

$$\int_a^b f(t) dt - I(\Sigma_n, X_{n,0}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(b-a)(f(b) + f(a))}{2n}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Provient de la réexpression donnée la dans définition de la méthode des rectangles. ▷

Confrontez ce résultat à une situation simple dans laquelle cette différence se calcule de façon exacte, par exemple le cas d'une fonction affine. Dans ce cas, l'équivalent est une égalité.

Remarque 7.2.4

La méthode des trapèzes n'est pas fondamentalement meilleure que la méthode du point milieu ; la constante obtenue dans la majoration est même un peu moins bonne.

Pour terminer, nous évoquons deux méthodes, l'une étant une amélioration à l'ordre supérieur du principe d'approximation utilisé jusqu'ici (on pourrait continuer au-delà, avec des approximations à des ordres supérieurs, mais en pratique, cela n'aurait pas d'intérêt, la méthode de Simpson assurant une convergence très rapide), l'autre étant qualitativement moins bonne, mais reposant sur un principe totalement différent.

Ces méthodes n'étant pas au programme, nous nous contentons d'une description sommaire, sans entrer dans le détail des calculs et des preuves.

III La méthode de Simpson (HP)

Il s'agit ici d'approcher localement la courbe par des courbes polynomiales de degré 2. Un polynôme de degré au plus 2 est entièrement déterminé par l'image de 3 points (il s'agit d'une interpolation de Lagrange) : étant donnés $x_1 < x_2 < x_3$ trois réels distincts, et y_1, y_2, y_3 trois réels, l'unique polynôme de degré au plus 2 tel que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $f(x_i) = y_i$ est donné par :

$$P(X) = y_1 \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

La méthode de Simpson consiste à approcher la courbe sur chaque intervalle $[\alpha, \beta]$ d'une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ par l'unique parabole coïncidant avec la courbe aux points α, β et $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

D'après ce qui précède, ce polynôme est donné par :

$$P(X) = f(\alpha) \frac{(X - \beta) \left(X - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{(\alpha - \beta) \left(\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)} + f(\beta) \frac{(X - \alpha) \left(X - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{(\beta - \alpha) \left(\beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)} + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \frac{(X - \alpha)(X - \beta)}{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right) \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta\right)}.$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(f(\alpha)(X - \beta)(2X - (\alpha + \beta)) + f(\beta)(X - \alpha)(2X - (\alpha + \beta)) - 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)(X - \alpha)(X - \beta) \right)$$

Pour exprimer notre approximation, on calcule donc l'intégrale de la fonction polynomiale associée entre α et β , en procédant par étapes :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t - \beta)(2t - (\alpha + \beta)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(2t - (\alpha + \beta)) dt = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(t - \beta) dt = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}.$$

On obtient donc :

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(t) dt = \frac{(\beta - \alpha)}{6} \left(f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right).$$

Définition 7.3.1 (Méthode de Simpson)

On obtient la méthode d'approximation de Simpson en approchant, sur tout intervalle de la subdivision régulière de $[a, b]$ en n pas, la courbe par le polynôme d'interpolation de degré au plus 2, coïncidant avec la courbe aux bords et au milieu de l'intervalle. Ainsi, l'approximation au rang n est donnée par :

$$I_n(f) = \frac{b - a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\sigma_k) + 4f\left(\frac{\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2}\right) + f(\sigma_{k+1}) \right),$$

où $\sigma_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Cette dernière expression peut être arrangée un peu en regroupant les termes $f(\sigma_k)$, mais l'expression obtenue est un peu plus obscure :

$$I_n(f) = \frac{(b - a)}{3n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(\sigma_k) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2}\right) \right) + \frac{b - a}{6n} \cdot (f(b) + f(a)).$$

Théorème 7.3.2 (Vitesse de convergence de la méthode de Simpson, admis)

Soit f une fonction de classe C^4 sur $[a, b]$, et M_4 un majorant de $|f^{(4)}|$ sur cet intervalle. Soit $I_n(f)$ l'approximation de Simpson de rang n . Alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I_n(f) \right| \leq \frac{M_4}{2880} \cdot \frac{(b - a)^5}{n^4}.$$

Ainsi, la convergence de la méthode de Simpson est en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

On rencontre parfois aussi la méthode de Romberg, qui est en fait basée sur la méthode des trapèzes, associé à un procédé d'accélération de convergence.

IV La méthode de Monte-Carlo (HP)

La dernière méthode que nous étudions est d'un type très différent des précédents, puisqu'il s'agit d'une méthode probabiliste.

La méthode de Monte-Carlo exploite le fait que l'intégrale peut être interprétée comme le produit de la longueur de l'intervalle d'intégration et de la « valeur moyenne » de f sur cet intervalle. On obtient alors la méthode suivante :

Définition 7.4.1 (Méthode de Monte-Carlo)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[a, b]$ (on parle d'échantillon indépendant identiquement distribué (i.i.d.) de loi parente la loi uniforme sur $[a, b]$). On définit alors la variable aléatoire I_n par :

$$I_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

La méthode de Monte-Carlo consiste à approcher f par une réalisation de la variable aléatoire I_n .

La justification de cette méthode provient du fait que l'espérance de I_n est égale à l'intégrale qu'on veut calculer, et que la variance tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui assure que pour n grand, la probabilité d'obtenir une valeur proche de l'intégrale voulue est grande.

On rappelle (ou on admet) le théorème de transfert, permettant le calcul des espérances de variables aléatoires $f(X)$: étant donnée une variable aléatoire X de fonction de densité φ définie sur \mathbb{R} , et f une fonction continue, l'espérance de $f(X)$ existe si et seulement si l'intégrale ci-dessous converge absolument, et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)f(t) dt.$$

Lemme 7.4.2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors

$$E(f(X)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad V(f(X)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right)^2 = J(f).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Pour $E(f(X))$, c'est une application simple du théorème de transfert. Pour la variance, appliquer aussi le théorème de transfert à la variable $f(X)^2$. ▷

Proposition 7.4.3 (Convergence de la méthode de Monte-Carlo)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(I_n) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad V(I_n) = (b-a)^2 \cdot \frac{J(f)}{n},$$

où la quantité $J(f)$ est définie dans le lemme précédent.

◁ **Éléments de preuve.**

Conséquence directe du lemme, et de la linéarité de l'espérance, ainsi que de la quadraticité et l'additivité (en cas d'indépendance) de la variance ▷

La méthode de Monte-Carlo est beaucoup plus lente et moins fiable que les méthodes étudiées précédemment. En revanche, elle est immédiate à adapter au cas des fonctions de plusieurs variables, et est donc assez utilisée dans ce cadre.

On peut par exemple obtenir ainsi une approximation de π en considérant la fonction f définie sur $[0, 2]^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intégrale de cette fonction sur $[0, 2]^2$ nous donne l'aire d'un quart de disque de rayon 2 (ou le volume d'un cylindre de hauteur 1 et de base un quart de disque de rayon 2).