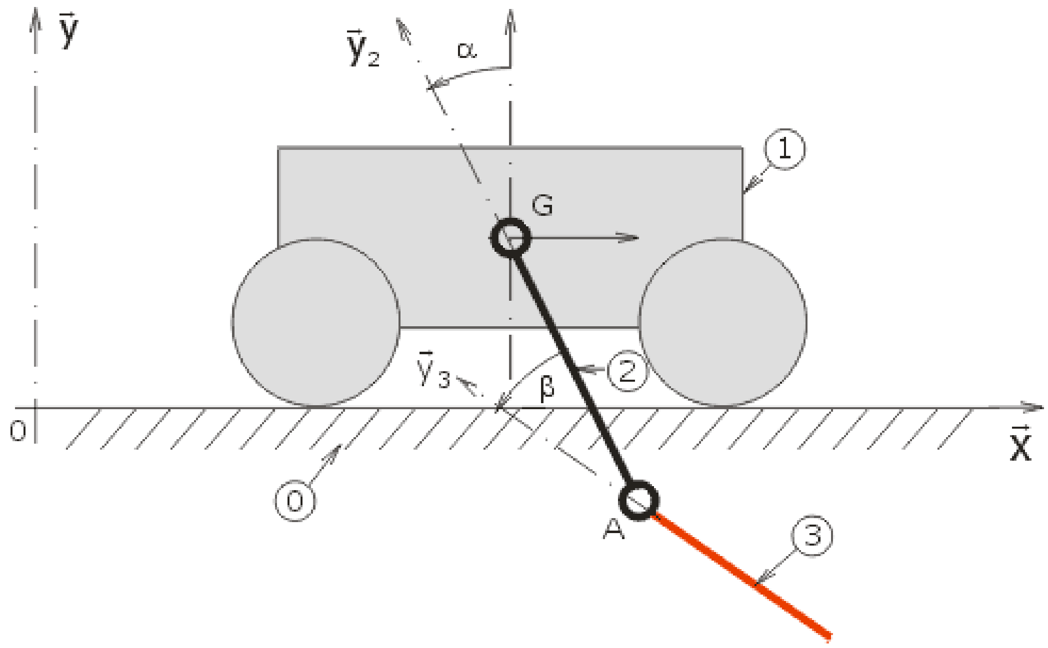
Enoncé

Considérons un mouvement d'un véhicule dans le plan $(0,\vec{x},\vec{y})$ auquel on lie deux bras repérés (2) et (3) . Le bras 2 est en liaison pivot $(G,\vec{z})$ avec le véhicule . Le bras (3) est attaché au bras (2) par une liaison pivot $(A,\vec{z})$ .Le véhicule est astreint à rester au contact de l'axe $(O,\vec{x})$ matérialisant le sol (0).



on pose: $\overrightarrow{OG}=\left(\frac{1}{2}\gamma t^2\right)\vec{x}+h.\vec{y}$ où a est une constante et t représente la variable temps. $\|\overrightarrow{GA}\|=a$ et $\|\overrightarrow{AB}\|=b$

1 Justifier le choix des paramètres nécessaires à l'étude cinématique du système.

2 Déterminer la vitesse $\vec{V}(A\in 2/0)$ en utilisant la formule de la dérivée d'un vecteur par rapport à deux bases ; R étant le repère fixe $(0,\vec{x},\vec{y})$ lié au sol (0).

3 Déterminer la vitesse $\vec{V}(B\in 3/0)$ de la même manière.

4 Retrouver les résultats précédents à partir de la formule généralisée de la vitesse $\vec{V}(M\in S/R)=\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}.\frac{\partial q_i}{\partial t}+\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial t}$

avec $q=\{q_i\}=\{\alpha,\beta\}$; famille de paramètres

Solution

(1) Dans le cas d'un problème de ***cinématique plane*** le solide (1) est normalement positionné par trois paramètres indépendants. On choisit normalement un point (Le centre de gravité tel que $\overrightarrow{OG} = x_G.\vec{x} + y_G.\vec{y}$) et un angle polaire θ traduisant la mobilité en rotation d'un repère lié à (1) par rapport au repère d'étude $R(O,\vec{x},\vec{y})$. Le contact de (1) avec le sol crée des relations ***géométriques*** .Soit la famille q de paramètres q_i positionnant le système. Les relations géométriques seront de la forme $f(q_i,t)=0$. Les deux relations géométriques sont dans notre cas de figure: $\left|\begin{array}{l} y_G - h = 0 \\ \theta = 0 \end{array}\right.$. Il reste donc un seul paramètre x_G de position pour le solide 1. On utilise ensuite pour les autres solides deux paramètres relatifs traduisant les mobilités dans les liaisons pivot α et β . Notre système est donc positionné par trois paramètres (x_G , α , β) et une fonction explicite du temps $x_G = \frac{1}{2}.\gamma.t^2$ qui fixe l'évolution de cette variable au cours du temps. Ils permettent de déterminer la vitesse d'un point d'un solide à partir par exemple de la formule généralisée de la vitesse

Dans notre cas d'étude, x_G étant exprimé explicitement en fonction du temps, la formule adaptée devient:

$$\vec{V}(M \in S/R) = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \alpha}.\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \beta}.\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t} .$$

(2) Cherchons $\vec{V}(A \in 2/0)$ à partir de $\vec{V}(A \in 2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R$

$$\vec{V}(A \in 2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R + \left.\frac{d\overrightarrow{GA}}{dt}\right)_R = \underbrace{\left.\frac{d\left(\left(\frac{1}{2}.\gamma.t^2\right).\vec{x} + h.\vec{y}\right)}{dt}\right)_R}_{a.t.\vec{x}} + \underbrace{\left.\frac{d\, -a.\vec{y}_2}{dt}\right)_R}_{-a\left(\underbrace{\left.\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right)_{R_2}}_{0} + \underbrace{\vec{y}_2 \wedge \vec{\Omega}_{R/R_2}}_{-\dot{\alpha}.\vec{x}_2}\right)} = \gamma.t.\vec{x} + a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2$$

$$\boxed{\vec{V}(A \in 2/0) = \gamma.t.\vec{x} + a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2}$$

(3) Cherchons $\vec{V}(B \in 3/0)$ à partir de $\vec{V}(B \in 3/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_R$

$$\vec{V}(B \in 3/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_R = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R}_{\vec{V}(A\in 2/0)} + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_R = \gamma.t.\vec{x} + a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2 - b.\underbrace{\left.\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right)_R}_{\left.\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right)_R = \underbrace{\left.\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right)_{R_3}}_{0} + \vec{y}_3 \wedge \vec{\Omega}_{R/R_3}} = \gamma.t.\vec{x} + a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2 + b.(\dot{\beta} + \dot{\alpha}).\vec{x}_3$$

$$\boxed{\vec{V}(B\in 3/0)=\gamma.t.\vec{x}+a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2+b.\left(\dot{\beta}+\dot{\alpha}\right).\vec{x}_3}$$

4 A partir de la formule généralisée de la vitesse:

Cherchons $\vec{V}(A\in 2/0)$:

$$\vec{V}(A\in 2/0)=\frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial\alpha}.\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial\beta}.\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial t} \text{ avec } \overrightarrow{OA}=\vec{f}(\alpha,t)=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}=\left(\frac{1}{2}.\gamma.t^2\right).\vec{x}+h.\vec{y}-a.\vec{y}_2$$

$$\vec{V}(A\in 2/0)=\underbrace{\frac{\partial-a.\vec{y}_2}{\partial\alpha}}_{-a.(-\vec{x}_2)}.\underbrace{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}_{\dot{\alpha}}+\underbrace{\frac{\partial\frac{1}{2}.\gamma.t^2.\vec{x}}{\partial t}}_{\gamma.t.\vec{x}}=a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2+\gamma.t.\vec{x}$$

On trouve $\boxed{\vec{V}(A\in 2/0)=\gamma.t.\vec{x}+a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2}$

Cherchons $\vec{V}(B\in 3/0)$:

$$\vec{V}(B\in 3/0)=\frac{\partial\overrightarrow{OB}}{\partial\alpha}.\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\overrightarrow{OB}}{\partial\beta}.\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\overrightarrow{OB}}{\partial t} \text{ avec } \overrightarrow{OB}=\vec{g}(\alpha,\beta,t)=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}.\gamma.t^2\right).\vec{x}+h.\vec{y}-a.\vec{y}_2-b.\vec{y}_3$$

$$\vec{V}(B\in 3/0)=\underbrace{\frac{\partial\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)}{\partial\alpha}}_{\frac{\partial\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}}{\partial\alpha}}.\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)}{\partial\beta}}_{\frac{\partial\overrightarrow{AB}}{\partial\beta}}.\frac{\partial\beta}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)}{\partial t}}_{\frac{\partial\overrightarrow{OG}}{\partial t}}$$

$$\vec{V}(B\in 3/0)=\underbrace{\frac{\partial\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}}{\partial\alpha}}_{a.\vec{x}_2+b.\vec{x}_3}.\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial\overrightarrow{AB}}{\partial\beta}}_{b.\vec{x}_3}.\frac{\partial\beta}{\partial t}+\underbrace{\frac{\partial\overrightarrow{OG}}{\partial t}}_{\gamma.t.\vec{x}}=a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2+b.\dot{\alpha}.\vec{x}_3+b.\dot{\beta}.\vec{x}_3+\gamma.t.\vec{x}$$

On trouve donc $\boxed{\vec{V}(B\in 3/0)=a.\dot{\alpha}.\vec{x}_2+b.\left(\dot{\beta}+\dot{\alpha}\right).\vec{x}_3+\gamma.t.\vec{x}}$