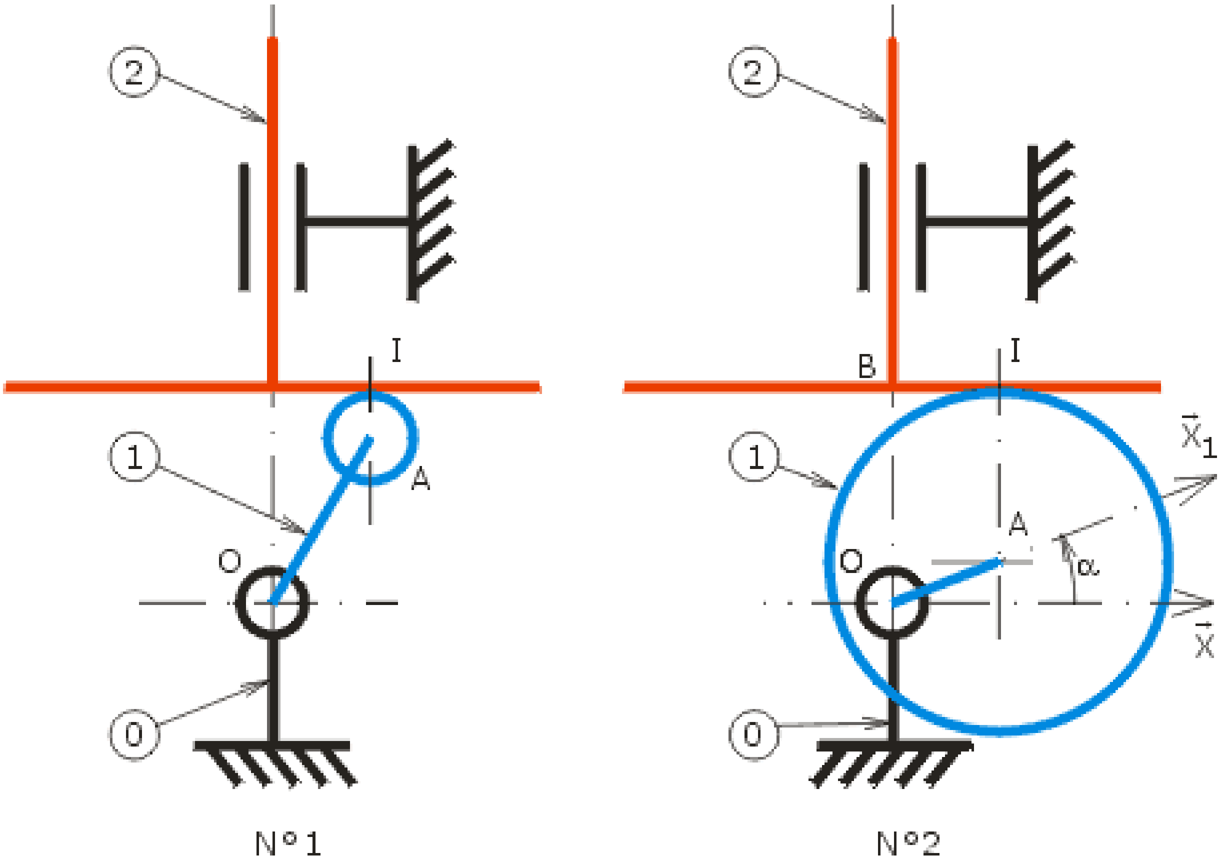
Enoncé

Considérons deux mécanismes de transformation de mouvement utilisant un rotor (1) en liaison pivot $(O, \vec{z})$ par rapport à un bâti (0) et une tige (2) en liaison glissière $\vec{y}$ par rapport à (0) . Le rotor est animé d'un mouvement de rotation uniforme $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}.\vec{z} = \omega.\vec{z} = \overrightarrow{cte}$. Les deux mécanismes sont similaires d'un point de vue cinématique. La cinématique est considérée comme plane. L'étude porte sur le mécanisme n°2



On note :

$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = e$, $\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = a$, $\overrightarrow{OB} = y.\vec{y}$, $\dot{\alpha} = cte = \omega$

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bâti (0)

1 Déterminer la vitesse de glissement $\vec{V}(I \in 2/1)$

2 Déterminer la base et la roulante du mouvement de 2/1

3 Quel serait l'intérêt de réaliser le contact entre 2 et 1 au niveau de la base et la roulante ?

Solution

1 Pour déterminer la vitesse de glissement, utilisons la composition des vitesses :

$$\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{V}(I \in 2/0) + \vec{V}(I \in 0/1)$$

Cherchons $\vec{V}(I \in 2/0)$:

Pour cela, remarquons que la pièce (2) est en liaison pivot glissant par rapport au bâti. Le torseur cinématique, dans le cas de ce mouvement de cinématique plane est : ${}_{\forall M}\{\mathcal{V}_{2/0}\} = {}_{\forall M}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{2/0}.\vec{y} \end{Bmatrix}$. La vitesse est la même en tout point de (2) par rapport à (0). On a donc $\vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(I \in 2/0)$.

Comme le mécanisme est ***bouclé*** , il existe une relation géométrique liant le paramètre d'entrée à celui de sortie.
Posons :

$$\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{e.\vec{x}_1} + \underbrace{\overrightarrow{AI}}_{a.\vec{y}} + \overrightarrow{IB} + \underbrace{\overrightarrow{BO}}_{-y.\vec{y}} = \vec{0}$$

En projection sur la direction $\vec{y}$ il vient :

$$e.\underbrace{\vec{x}_1.\vec{y}}_{\sin\alpha} + a.\vec{y}.\vec{y} - y.\vec{y}.\vec{y} = 0$$

Nous obtenons donc $y = a + e.\sin\alpha$ et donc $\dot{y} = e.\dot{\alpha}.\cos\alpha = e.\omega.\cos\alpha$

Pour obtenir la vitesse en B, utilisons la dérivée du vecteur position :

$$\vec{V}(B \in 2/0) = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OB}\right)}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\left(y.\vec{y}\right)}{dt}\right)_R = \dot{y}.\vec{y}$$

A partir de la relation géométrique dérivée, nous obtenons : $\boxed{\vec{V}(B \in 2/0) = e.\omega.\cos\alpha.\vec{y}}$

<u>Cherchons</u> $\vec{V}(I \in 1/0)$:

Dans ce cas d'étude il faut se méfier lors de l'utilisation de la dérivée du vecteur position $\vec{V}(I \in 1/0) = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OI}\right)}{dt}\right)_R$. En effet, le point I est un point coïncident à cet instant donné. Comme nous cherchons la vitesse du point I lié en propre au solide (1), nous devons faire attention à décrire le vecteur position $\overrightarrow{OI}$ avec les paramètres de position du solide (1) par rapport au bâti (0). Dans ces conditions, nous pouvons écrire :

$\vec{V}(I \in 1/0) = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OI}\right)}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OA}\right)}{dt}\right)_R + \left.\frac{d\left(\overrightarrow{AI}\right)}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\left(e.\vec{x}_1\right)}{dt}\right)_R - a.\dot{\alpha}.\vec{x}$. Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ étant dans ce cas un vecteur lié à (1) et donc mobile par rapport à (0). On a donc :

$$\vec{V}(I \in 1/0) = e.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 - a.\dot{\alpha}.\vec{x}$$

$$\vec{V}(I \in 1/0) = e.\dot{\alpha}.\left(-\sin\alpha.\vec{x} + \cos\alpha.\vec{y}\right) - a.\dot{\alpha}.\vec{x}$$

$$\boxed{\vec{V}(I \in 1/0) = \dot{\alpha}.\left(-\left(a + e.\sin\alpha\right).\vec{x} + e\cos\alpha.\vec{y}\right)}$$

Une autre possibilité pour déterminer la vitesse $\vec{V}(I \in 1/0)$, consiste à utiliser la relation entre les vitesses des points d'un même solide :

$\vec{V}(I \in 1/0) = \underbrace{\vec{V}(O \in 1/0)}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}}_{\left(-a.\vec{y} - e.\vec{x}_1\right) \wedge \omega.\vec{z}}$. Nous trouvons donc :

$$\boxed{\vec{V}(I \in 1/0) = -\omega\left(a.\vec{x} - e\vec{y}_1\right)}$$

Pour déterminer alors la vitesse de glissement, reprenons l'expression :

$$\vec{V}(I \in 2/1) = \underbrace{\vec{V}(I \in 2/0)}_{e.\omega.\cos\alpha.\vec{y}} + \underbrace{\vec{V}(I \in 1/0)}_{\omega.(a.\vec{x} - e\vec{y}_1)}$$

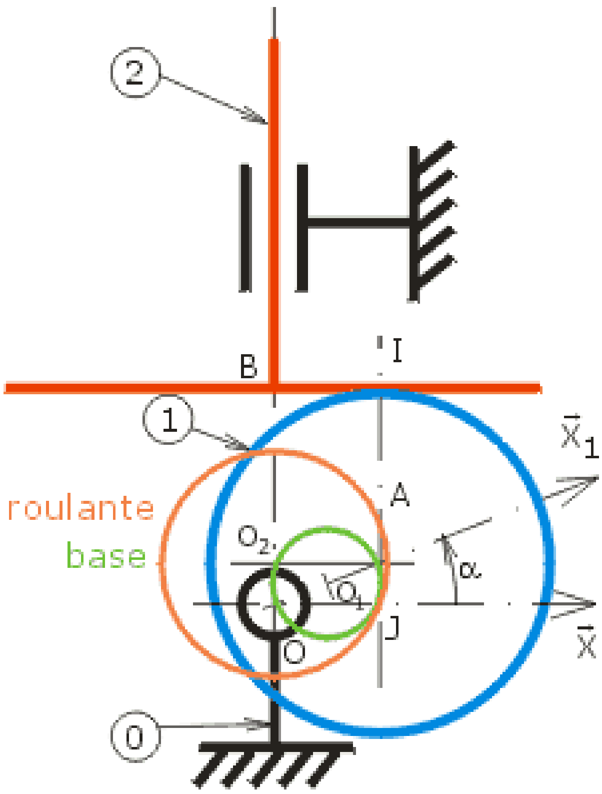
Ce qui donne , en utilisant les résultats précédents :

$$\boxed{\vec{V}(I \in 2/1) = \omega(a + e.\sin\alpha).\vec{x}}\ .$$

La vitesse se trouve bien dans le plan tangent commun aux deux surfaces de contact.

2.2 Cherchons le ***CIR*** du mouvement de (2) par rapport à (1) :

D'après le cours, soit le torseur cinématique ${}_I\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}(I \in 2/1) \end{Bmatrix}$. Soit J le CIR de 2/1 . On a alors $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{V}(I \in 2/1)}{\left\|\vec{\Omega}_{2/1}\right\|^2} = \dfrac{-\omega.\vec{z} \wedge \omega(a + e.\sin\alpha).\vec{x}}{\omega^2} = -(a + e.\sin\alpha).\vec{y}$



L'ensemble des positions de J par rapport à (1) nous donnera la base . Soit $R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}\right)$ le repère lié à la pièce (1). La position de J dans ce repère est défini par :

$$\left|\begin{array}{l} x_j=\overrightarrow{OJ}.\vec{x}_1=\left(e.\cos\alpha\right)\vec{x}.\vec{x}_1=e.\left(\cos\alpha\right)^2=e.\left(\dfrac{1+\cos\left(2.\alpha\right)}{2}\right) \\ y_j=\overrightarrow{OJ}.\vec{y}_1=\left(e.\cos\alpha\right)\vec{x}.\vec{y}_1=-e.\cos\alpha.\sin\alpha=-e.\left(\dfrac{\sin\left(2.\alpha\right)}{2}\right) \end{array}\right.$$

On obtient donc le système :

$$\left|\begin{array}{l} \left(x_j-\dfrac{e}{2}\right)^2=e^2.\left(\dfrac{\cos\left(2.\alpha\right)}{2}\right)^2 \\ \left(y_j\right)^2=e^2.\left(\dfrac{\sin\left(2.\alpha\right)}{2}\right)^2 \end{array}\right.$$

Ce qui donne comme relation : $\left(x_j-\dfrac{e}{2}\right)^2+\left(y_j\right)^2=\left(\dfrac{e}{2}\right)^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre $O_1\left(\dfrac{e}{2},0\right)$ dans le repère $R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}\right)$ et de rayon $\dfrac{e}{2}$

L'ensemble des positions de J par rapport à (2) nous donnera la roulante . Soit $R_2\left(B,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ le repère lié à la pièce (2). La position de J dans ce repère est défini par :

$$\left|\begin{array}{l} x_j=\overrightarrow{BJ}.\vec{x}=\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OJ}\right).\vec{x}=\left(-\left(r+e.\sin\alpha\right).\vec{y}+e.\cos\alpha\vec{x}\right).\vec{x}=e.\cos\alpha \\ y_j=\overrightarrow{BJ}.\vec{y}=\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OJ}\right).\vec{y}=\left(-\left(r+e.\sin\alpha\right).\vec{y}+e.\cos\alpha\vec{x}\right).\vec{y}=-\left(r+e.\sin\alpha\right) \end{array}\right.$$

On obtient donc le système :

$$\left|\begin{array}{l} \left(x_j\right)^2=\left(e.\cos\alpha\right)^2 \\ \left(y_j+r\right)^2=\left(e.\sin\alpha\right)^2 \end{array}\right.$$

Ce qui donne comme relation : $\left(x_j\right)^2+\left(y_j+r\right)^2=\left(e\right)^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre $O_2\left(0,-r\right)$ dans le repère $R_2\left(B,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ et de rayon e.

3 L'intérêt d'utiliser la base et la roulante , réside dans la limitation des pertes de puissance au niveau des contacts entre les différents solides. En effet, le contact en J est de type ponctuel (ou linéique rectiligne suivant la longueur du segment de contact) . Dans ce cas la puissance perdue est

$P_{1\leftrightarrow 2} = \vec{F}_{1\to 2} \cdot \underbrace{\vec{V}(J \in 2/1)}_{\vec{0}}$. La vitesse de glissement étant nulle au CIR, la puissance perdue l'est aussi (indépendamment de l'action mécanique transmise localement).