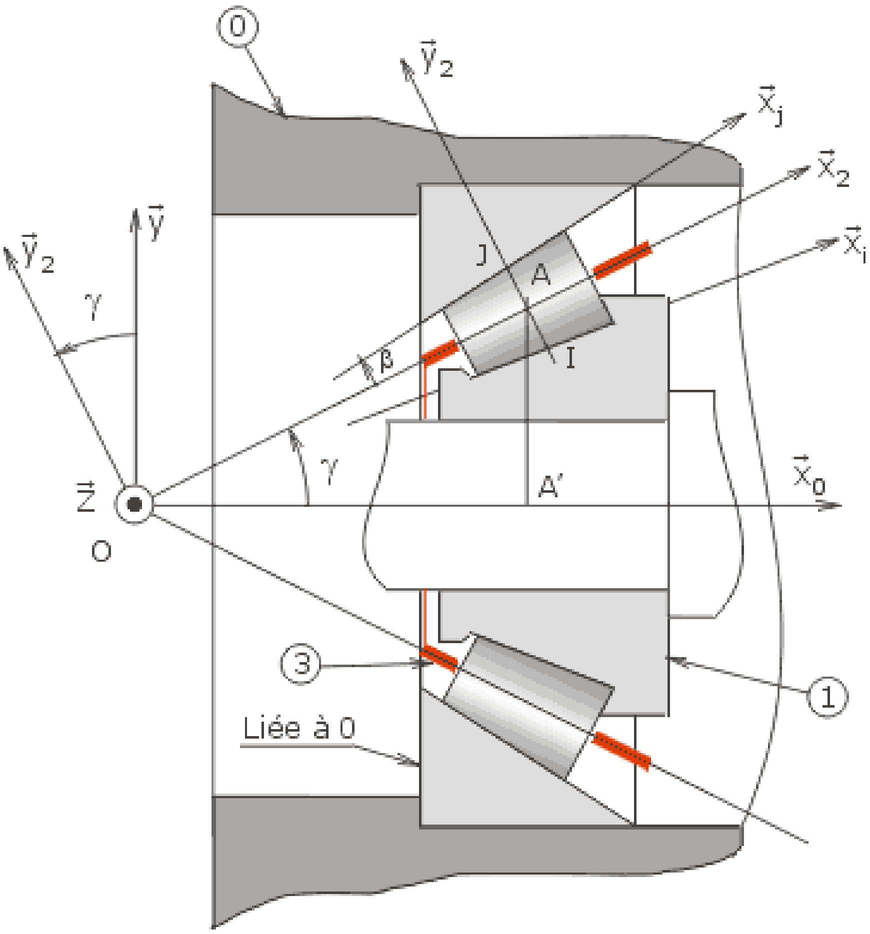
Enoncé *Concours ENSET*

Le but de l'étude est de déterminer la géométrie et la cinématique d'un roulement à rouleaux coniques. Ce roulement est constitué :

*D'une bague interne conique (1) , en pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ par rapport au bâti (0)

*D'une bague externe conique liée par encastrement au bâti (0)
* D'un ensemble de rouleaux coniques en liaisons linéïque rectiligne avec d'une part la bague externe liée à (0) et d'autre part la bague interne (1).
* D'une cage (3) positionnant les rouleaux les uns par rapport aux autres.



Le vecteur $\vec{x}_i$ oriente la génératrice de contact entre le rouleau représenté et le cône interne (1).

Le vecteur $\vec{x}_j$ oriente la génératrice de contact entre le rouleau représenté et le cône externe lié à (0)

On pose : $\overrightarrow{A'A} = R\,\vec{y}$, $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AJ} = r.\vec{y}_2$, $\overrightarrow{OA} = a.\vec{x}_2$

On suppose qu'il y a roulement sans glissement en I et J ; points milieux des segments de contact.

Le torseur cinématique du solide i par rapport au solide j sera noté $\{\vartheta_{i/j}\} = {}_M\left\{\begin{array}{c|c} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array}\right\}_{(-,-,-)}$

1 Déterminer la forme des torseurs cinématiques : $\{\vartheta_{1/0}\}$, $\{\vartheta_{3/0}\}$, $\{\vartheta_{2/3}\}$ en O

2 Déterminer les axes centraux Δ_{20} et Δ_{21} des torseurs cinématiques $\{\vartheta_{2/0}\}$ et $\{\vartheta_{2/1}\}$

3 Déterminer la condition géométrique telle que les vitesses de glissement du rouleau par rapport aux cônes de roulement soient nulles pour tout point des génératrices de contact . Déterminer alors β .

4 Déterminer le torseur cinématique ${}_0\{\vartheta_{2/0}\}$ en fonction des données géométriques et de p_{10}

5 Déterminer le torseur cinématique ${}_A\{\vartheta_{3/0}\}$ en fonction des données géométriques et de p_{10}

Solution

1 D'après l'énoncé nous avons :

$$\{\vartheta_{1/0}\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} p_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0,-,-)} \quad , \quad \{\vartheta_{3/0}\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} p_{30} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_0,-,-)} \quad , \quad \{\vartheta_{2/3}\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} p_{23} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_2,-,-)}$$

2 Les axes centraux sont les lieux des points de moments minimaux

* L'axe central Δ_{20} sera alors l'axe $(J, \vec{x}_j)$ car pour tout point M appartenant à cet axe nous avons du fait du roulement sans glissement : $\vec{V}(M \in 2/0) = \vec{0}$.

* L'axe central Δ_{21} sera alors l'axe $(I, \vec{x}_i)$ car pour tout point M appartenant à cet axe nous avons du fait du roulement sans glissement : $\vec{V}(M \in 2/1) = \vec{0}$.

3 Soient J' et I' les intersections respectives des axes centraux $\Delta_{20}\,(J, \vec{x}_j)$ et $\Delta_{21}\,(I, \vec{x}_i)$ avec l'axe $(O, \vec{x}_0)$.
En ces points nous pouvons écrire :

$\vec{V}(J' \in 2/0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(I' \in 2/1) = \vec{0}$

$\vec{V}(J' \in 1/0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(I' \in 1/0) = \vec{0}$

D'après la composition des vitesses nous pouvons écrire :

$* \vec{V}(J' \in 2/0) = \vec{0} = \vec{V}(J' \in 2/1) + \underbrace{\vec{V}(J' \in 1/0)}_{\vec{0}}$. On déduit que l'axe central Δ_{21} doit passer par J' pour respecter $\vec{V}(J' \in 2/0) = \vec{0}$

$* \vec{V}(I' \in 2/0) = \underbrace{\vec{V}(I' \in 2/1)}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{V}(I' \in 1/0)}_{\vec{0}} = \vec{0}$. On déduit que l'axe central Δ_{20} passe dans ce cas par I'.

Pour respecter les deux conditions de roulement sans glissement, on déduit à partir des constatations précédentes que les axes centraux Δ_{21} et Δ_{20} passent en même temps par J' et I'. Comme ces deux axes sont distincts, les points J' et I' doivent être confondus. Le sommet du cône du rouleau conique (2) doit se situer sur l'axe $(O, \vec{x}_0)$.

Nous pouvons alors définir le demi-angle au sommet de ce cône : $\boxed{\tan\beta = \dfrac{r}{a}}$

4 Pour déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{2/0}\}$, traduisons le roulement sans glissement en I :

$$\vec{V}(I \in 1/2) = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{V}(I \in 1/0)}_{\underbrace{\vec{V}(O \in 1/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}} = \underbrace{\vec{V}(I \in 2/0)}_{\underbrace{\vec{V}(J \in 2/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IJ} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}}$$

Nous pouvons alors écrire d'après le paramétrage proposé :

$$\underbrace{(r.\vec{y}_2 - a.\vec{x}) \wedge p_{10}.\vec{x}_0}_{p_{10}.(-r.\cos\gamma + a.\sin\gamma).\vec{z}} = \underbrace{2.r.\vec{y}_2 \wedge p_{20}.\vec{x}_j}_{-p_{20}.(2.r.\cos\beta).\vec{z}}$$

On déduit :

$$p_{20} = \frac{p_{10}.(r.\cos\gamma - a.\sin\gamma)}{2.r.\cos\beta}$$

Le torseur cinématique cherché est :

$$\left\{\vartheta_{2/0}\right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} p_{20} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_j,-,-)} = {}_{0}\begin{Bmatrix} \dfrac{p_{10}\cdot(r.\cos\gamma - a.\sin\gamma)}{2.r.\cos\beta}.\vec{x}_j \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

5 Pour déterminer le torseur cinématique $\left\{\vartheta_{3/0}\right\}$, nous pouvons remarquer que :

$$\overbrace{\underbrace{\vec{V}(O\in 2/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{2/0}}^{\vec{V}(A\in 2/0)} = \overbrace{\underbrace{\vec{V}(A'\in 3/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AA'}\wedge\vec{\Omega}_{3/0}}^{\vec{V}(A\in 3/0)}$$

Nous obtenons la relation vectorielle suivante :

$$\underbrace{-a.\vec{x}\wedge p_{20}.\vec{x}_j}_{-a.p_{20}.\sin\beta.\vec{z}} = \underbrace{-R.\vec{y}_0\wedge p_{30}.\vec{x}_0}_{R.p_{30}.\vec{z}}$$

Il vient alors :

$$p_{30} = \frac{-a}{R}.p_{20}.\sin\beta = \frac{-a}{R}.\frac{p_{10}.(r.\cos\gamma - a.\sin\gamma)}{2.r.\cos\beta}.\sin\beta$$

$$p_{30} = \frac{-a}{2.r.R}.(r.\cos\gamma - a.\sin\gamma).\tan\beta.p_{10} = \frac{-(r.\cos\gamma - a.\sin\gamma)}{2.R}.p_{10}$$

Déterminons la vitesse $\vec{V}(A\in 3/0)$ à partir de :

$$\vec{V}(A\in 3/0) = \overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{2/0} = -a.p_{20}.\sin\beta.\vec{z} = -\frac{p_{10}.(r.\cos\gamma - a.\sin\gamma)}{2}.\vec{z}$$

Le torseur cinématique recherché est donc :

$$_A\left\{\vartheta_{3/0}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} p_{30} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & w_{30} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y},\vec{z})} = {}_A\begin{Bmatrix} \dfrac{-(r.\cos\gamma - a.\sin\gamma)}{2.R} \cdot p_{10} \cdot \vec{x}_0 \\ -\dfrac{p_{10} \cdot (r.\cos\gamma - a.\sin\gamma)}{2} . \vec{z} \end{Bmatrix}$$