Référentiels et bases associées

Cours

Projections

Le minimum vital

Programme - Compétences		
B29	MODELISER	Solide indéformable: - référentiel, repère - vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre

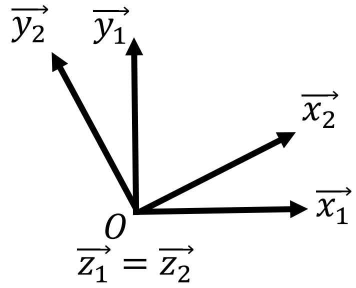
A. Rappels Projections

L'ensemble des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i}\ \forall i$ sont unitaires : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{x_i}\| = \|\overrightarrow{z_i}\| = \|\overrightarrow{z_i}\| = 1$
L'ensemble des bases $\mathfrak{B}_i\ \forall i$ utilisées sont directes orthonormées.

A.I. Paramétrage angulaire

A.I.1 Situation

Soit la situation suivante :



On souhaite paramétrer la rotation relative des bases 1 et 2.

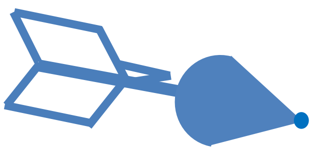
A.I.2 Mouvement de rotation

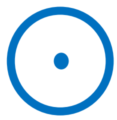
A.I.2.a Axe de rotation

Un mouvement de rotation s'effectue autour d'un axe, c'est-à-dire une droite, et le sens de la rotation est définit à l'aide d'un vecteur appartenant à celui-ci. Ce vecteur peut être prix dans un sens ou dans l'autre selon l'axe de rotation.
Dans le cas présenté ci-dessus, la rotation à lieu autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$ ou $(O, \overrightarrow{z_2})$.

Généralement, on ne représente pas le vecteur autour duquel on tourne car il est « hors plan ». Dans le cas ci-dessus, il « vient vers nous ».

On peut toutefois faire apparaître son sens. Considérons la flèche suivante :



Lorsque l'on regarde cette flèche de face, on voit : 

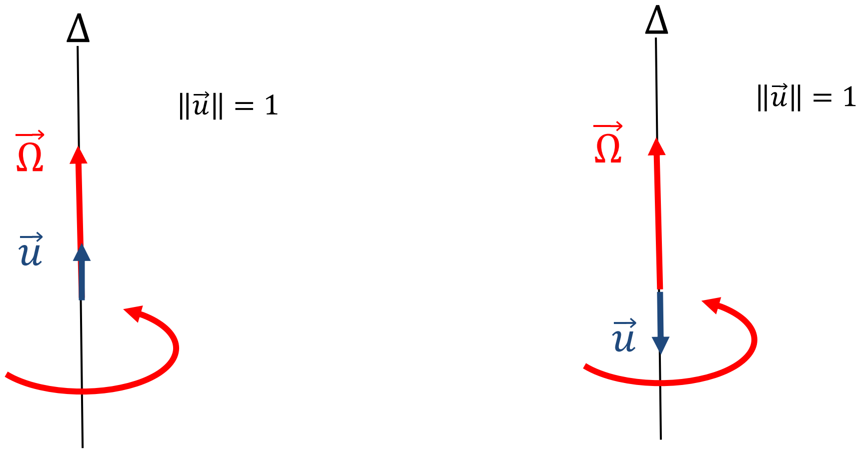
Lorsqu'on la regarde de derrière, on voit : 

On va donc pouvoir représenter les vecteurs hors plans avec l'une de ces deux représentations.

A.I.2.b Sens d'une rotation

On définit le sens d'une rotation à l'aide d'un vecteur $\vec{u}$ appartenant à l'axe de rotation Δ. Ainsi, selon que la rotation a lieu en sens direct ou indirect lorsque l'on « regarde » ce vecteur d'au-dessus, la flèche venant vers nous, on définit le sens positif (direct) ou négatif (indirect).

Le vecteur $\vec{u}$ est donc un vecteur appartenant à l'axe de rotation Δ, mais il peut être défini dans deux sens opposés.



$\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}$ $avec$ $\Omega > 0$ $\qquad$ $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}$ $avec$ $\Omega < 0$

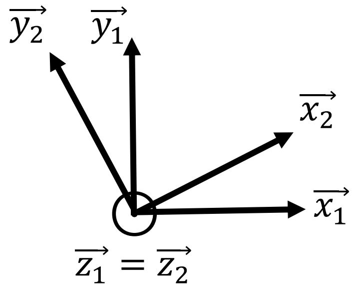
$\vec{\Omega}$ étant le vecteur rotation et $|\Omega|$ la norme de cette vitesse de rotation

Attention, ces deux définitions ne peuvent coexister, il faut donc choisir un vecteur de rotation afin de définir le sens de rotation.

A.I.2.c Convention pour le choix du sens d'un vecteur rotation

Ce que nous venons de voir ne doit pas être inquiétant. En réalité, on ne se pose pas vraiment cette question, même s'il est bien d'en être informé. En effet, lorsque deux bases sont en rotation l'une par rapport à l'autre, systématiquement, le paramétrage est fait de sorte que l'un des 3 vecteurs, soit $\vec{x}$, soit $\vec{y}$, soit $\vec{z}$, soit commun aux deux bases, directes, et appartienne à l'axe de rotation entre ces deux bases.
On prend donc toujours, par convention, ce vecteur afin de définir le sens de la rotation.

Exemple :



Dans la situation ci-dessus, on définira la rotation entre les bases 1 et 2 telle que :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \Omega_{2/1}\overrightarrow{z_1} = \Omega_{2/1}\overrightarrow{z_2}$$

$\Omega_{2/1}$ sera donc :

- Positif si la rotation a lieu en sens direct autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$
- Négatif si la rotation a lieu en sens indirect autour de $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$

A.I.3 Paramétrage

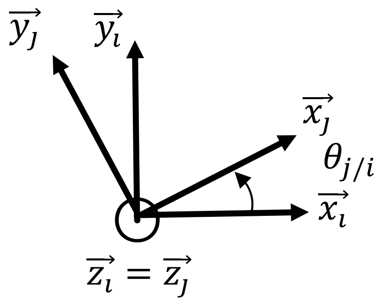
A.I.3.a Mise en place des outils

A.I.3.a.i Représentation d'une rotation

• **Principe**

Rappelons un principe extrêmement important :

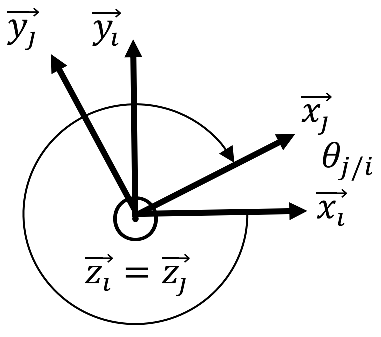
Un angle $\theta_{j/i}$ est un angle orienté, algébrique, allant de $\vec{x_i}$ vers $\vec{x_j}$
Il est représenté par une flèche allant de $\vec{x_i}$ vers $\vec{x_j}$ dont le sens définit le signe (sens direct positif)



$$\theta_{j/i} = \left(\widehat{\vec{x_i},\vec{x_j}}\right)[2\pi] = \left(\widehat{\vec{y_i},\vec{y_j}}\right)[2\pi]$$

L'angle $\theta_{j/i}$ est un angle orienté, défini à 2π près, on préfèrera généralement, sans obligations, le définir dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Il est parfaitement possible de représenter cette rotation de la manière suivante :



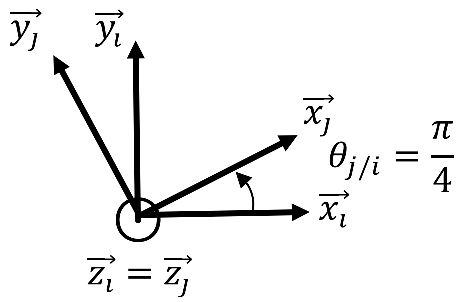
Comme $\theta_{j/i}$ est définit à 2π près, on parle toujours bien du même angle. Toutefois, par soucis de clarté, on préfèrera toujours dessiner la flèche qui surcharge le moins le dessin, c'est-à-dire la plus courte.

Remarques :
- ne jamais poser un angle entre un vecteur $\vec{x_i}$ et un vecteur $\vec{y_j}$
- on associe un angle à toute rotation existante physiquement entre deux bases (exemple : présence d'une liaison pivot)

• **Exemples**

Soient les situations suivantes dans lesquelles, par convention, le sens des rotations est défini par le vecteur $\overrightarrow{z_i} = \overrightarrow{z_j}$:

Exemple 1 :



On a :

$$\theta_{j/i} = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

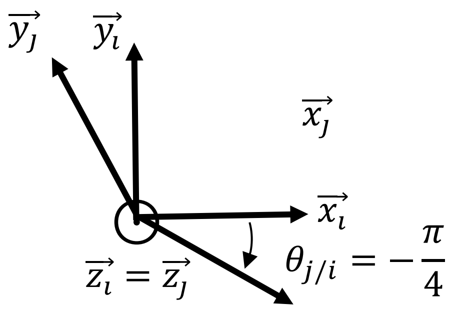
On a donc aussi, bien que la flèche soit représentée de la base i vers la base j :

$$\theta_{i/j} = -\frac{\pi}{4}$$

On a aussi :

$$\theta_{j/i} = \frac{\pi}{4} + 2\pi[2\pi] = \frac{9\pi}{4}[2\pi] = \frac{\pi}{4} - 2\pi[2\pi] = -\frac{7\pi}{4}[2\pi]$$

Exemple 2 :



On a :

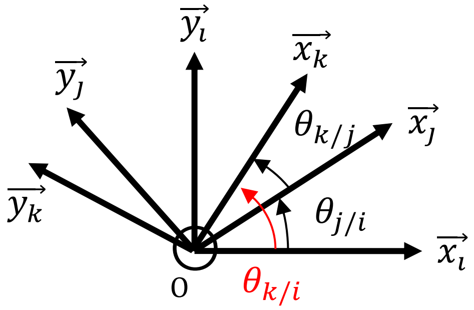
$$\theta_{j/i} = -\frac{\pi}{4}[2\pi] = \frac{7\pi}{4}[2\pi] = -\frac{9\pi}{4}[2\pi]$$

On a donc aussi, bien que la flèche soit représentée de la base i vers la base j :

$$\theta_{i/j} = \frac{\pi}{4}$$

A.I.3.a.ii Cas des mécanismes plans

Dans le cas des mécanismes plans, et uniquement dans ce cas, il arrive que l'on définisse tout angle présent entre les bases du problème, qu'il y ait entre celles-ci une seule ou plusieurs rotations.
Dans ce cas, en respectant la convention précédente, on peut définir entre 3 bases $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_j$ et $\mathfrak{B}_k$ les angles $\theta_{k/j}$, $\theta_{k/i}$ et $\theta_{j/i}$:



On a alors la relation :

$$\forall (i,j,k) \in \mathbb{N}^3, \theta_{k/j} + \theta_{j/i} = \theta_{k/i}$$

Attention, cela est vrai car toutes les rotations ont lieu autour du même axe, et sont définies par le même vecteur $\overrightarrow{z_i} = \overrightarrow{z_j} = \overrightarrow{z_k}$.
Pour éviter de faire des erreurs dans des mécanismes non plans, **NOUS EVITERONS** d'écrire ces simplifications.

A.I.3.b Positionnement relatif des 2 bases

Soient deux bases orthonormales directes $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$
Deux solutions existent pour positionner ces deux bases l'une par rapport à l'autre :

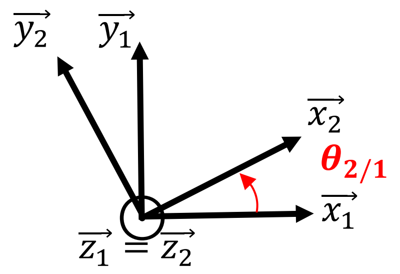
- Positionner la base 2 par rapport à la base 1
- Positionner la base 1 par rapport à la base 2

A.I.3.b.i Position relative de la base 2 par rapport à la base 1

Nous allons introduire l'angle positionnant la base 2 par rapport à la base 1, c'est-à-dire l'angle allant de :

- 1 vers 2
- $\overrightarrow{x_1}$ vers $\overrightarrow{x_2}$
- $\overrightarrow{y_1}$ vers $\overrightarrow{y_2}$

C'est-à-dire $\theta_{2/1}$. La flèche associée à ce paramètre doit aller de $\overrightarrow{x_1}$ vers $\overrightarrow{x_2}$

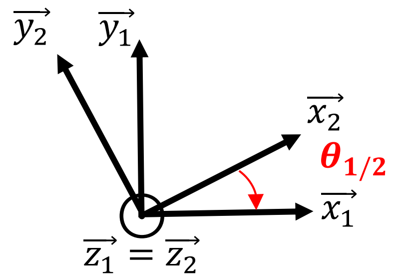


A.I.3.b.ii Position relative de la base 1 par rapport à la base 2

Comme nous venons de le faire, il est possible de paramétrer la position relative de la base 1 par rapport à la base 2. Nous allons introduire l'angle positionnant la base 1 par rapport à la base 2, c'est-à-dire l'angle allant de :

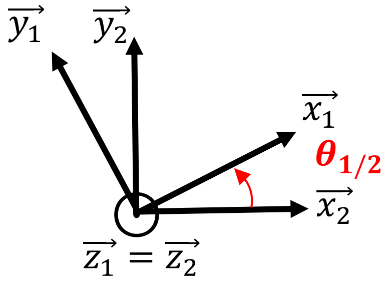
- 2 vers 1
- $\overrightarrow{x_2}$ vers $\overrightarrow{x_1}$
- $\overrightarrow{y_2}$ vers $\overrightarrow{y_1}$

C'est-à-dire $\theta_{1/2}$. La flèche associée à ce paramètre doit aller de $\overrightarrow{x_2}$ vers $\overrightarrow{x_1}$



Toutefois, on sait d'abord que $\theta_{1/2} = -\theta_{2/1}$

Ensuite, on préfèrera toujours refaire ce schéma comme suit :



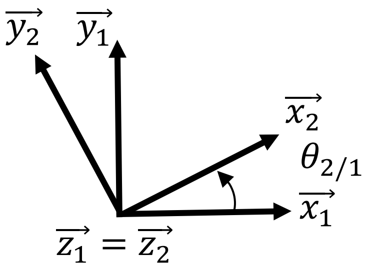
En effet, les bases pouvant être dans n'importe quelle position l'une par rapport à l'autre au cours du temps, cette représentation n'est pas fausse, et sera plus simple à utiliser par la suite pour calculer des projections justes.

A.II. Projections

Beaucoup d'erreurs sont commises lorsque le paragraphe précédent sur le paramétrage n'est pas maîtrisé.

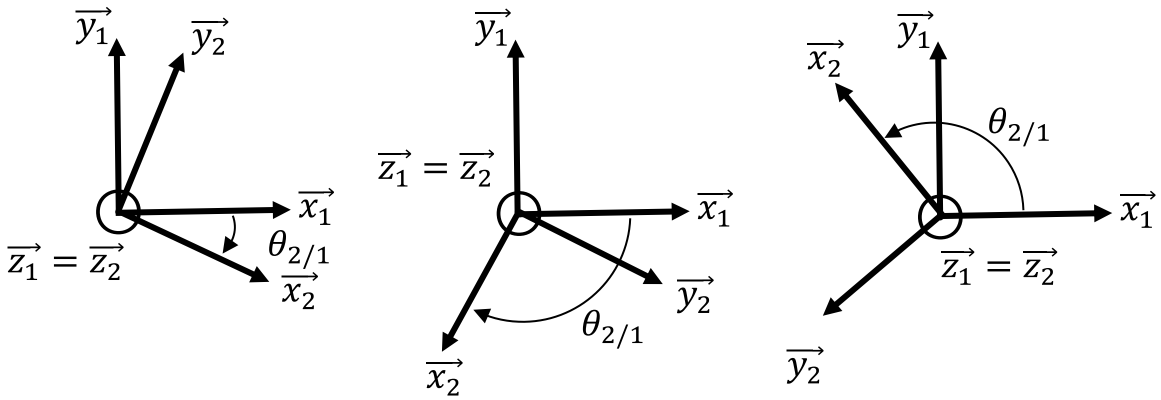
A.II.1 Représentation

Nous avons l'habitude d'exprimer les formules de projection dans une situation bien particulière, celle-ci :



Mais qu'a-t-elle de particulier ? La représentation proposée met en scène deux bases 1 et 2 telles que la base 2 a été tournée d'un angle positif inférieur à 90°.

En effet, nous pourrions représenter la position relative de ces deux bases dans les différentes situations suivantes :

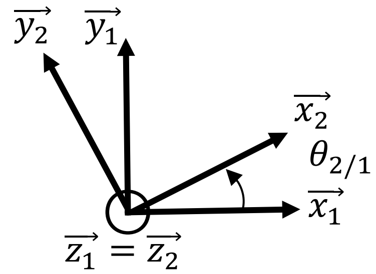


Remarque : Il existe une infinité de positions possible des deux bases entre elles

A.II.2 Formule de projection avec angles orientés

A.II.2.a Représentation classique

Considérons la représentation classique :



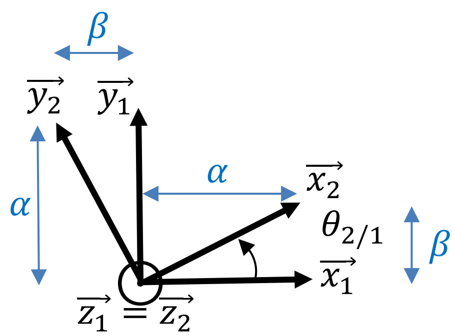
Dans cette situation, où $\theta_{2/1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'angle est positif inférieur $\frac{\pi}{2}$, nous savons donc que :

$$\begin{cases} \cos\theta_{2/1} > 0 \\ \sin\theta_{2/1} > 0 \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases} \alpha = \cos\theta_{2/1} \\ \beta = \sin\theta_{2/1} \end{cases}$$

Comme α et β sont des nombres positifs, on peut lire les coordonnées des projections de $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$ dans la base 1 :



$$\overrightarrow{x_2} = \alpha\overrightarrow{x_1} + \beta\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -\beta\overrightarrow{x_1} + \alpha\overrightarrow{y_1}$$

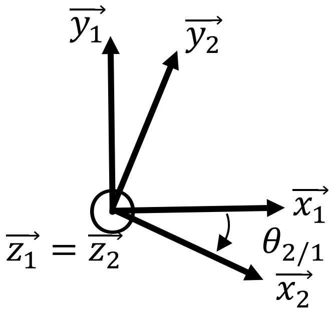
Soit les formules usuelles de projection :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -\sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$

A.II.2.b Représentations non pertinentes

Les autres représentations où $\theta_{2/1}$ n'appartient pas à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ induise très fréquemment les candidats en erreur, et sont à éviter.

Exemple : prenons le cas suivant :



Combien d'entre vous ont envie de dire que :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} - \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$

$$\textit{Erreur}$$

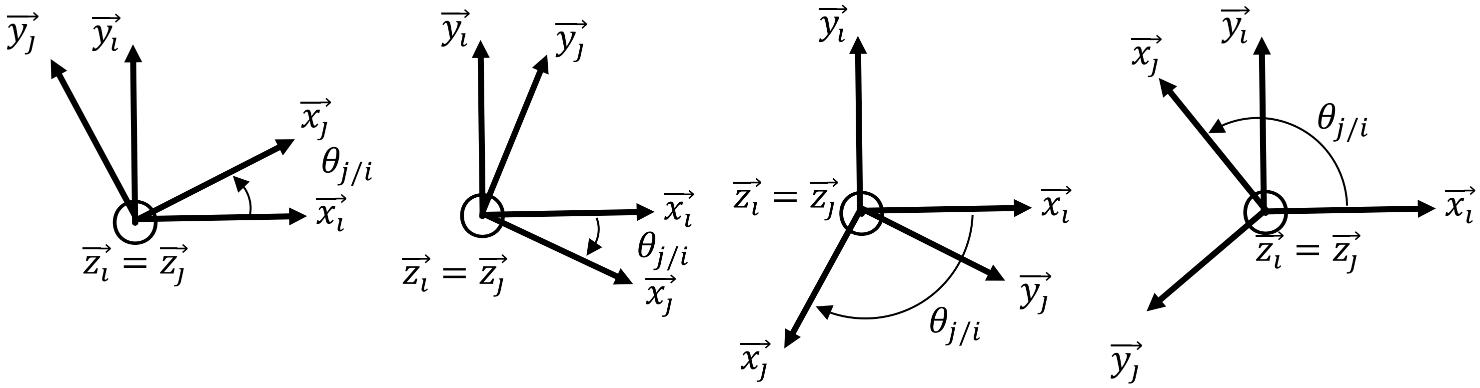
En effet, l'angle est négatif et son sinus l'est aussi !!!

Les formules de projection mises en place dans le cas usuel d'un angle positif inférieur à 90° restent bonnes quel que soit l'angle $\theta_{2/1}$. On a toujours :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -\sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$

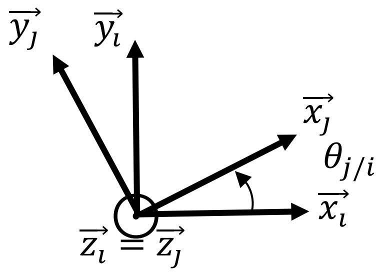
A.II.2.c Conclusion

Soit l'une des situations suivantes :



Lorsqu'il faut projeter une base j dans une base i, il faut impérativement suivre la démarche suivante :

- Poser la figure de changement de base
    - Représenter horizontalement et verticalement la base dans laquelle on projette
    - Représenter la base à projeter avec une orientation positive et un angle inférieur à 90°
    - Poser la flèche partant du vecteur $\vec{x_i}$ de la base de projection vers le vecteur $\vec{x_j}$ de la base à projeter
    - Poser l'angle associé $\theta_{j/i}$



- Ecrire les formules de projection

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}^2$$

$$\vec{x_j} = \cos\theta_{j/i}\,\vec{x_i} + \sin\theta_{j/i}\,\vec{y_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{j/i} \\ \sin\theta_{j/i} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

$$\vec{y_j} = -\sin\theta_{j/i}\,\vec{x_i} + \cos\theta_{j/i}\,\vec{y_i} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{j/i} \\ \cos\theta_{j/i} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

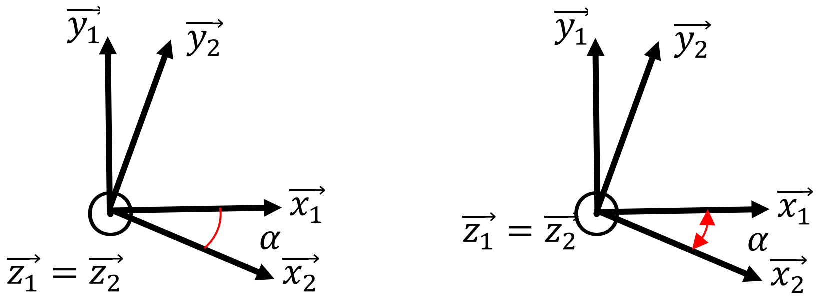
Remarques :

- Si ce n'est pas demandé, on peut éventuellement se passer de poser les figures de changement de base.
- Dès que l'on fait apparaître des formules trigonométriques du type : $\pi - \theta_{j/i}, \frac{\pi}{2} - \theta_{j/i}, \pi + \theta_{j/i}, \dots$ avec des angles orientés, on risque de faire des erreurs de signe ! Dans ces cas, il est important de bien écrire les angles les uns à la suite des autres dans le bon sens (cf paragraphe suivant). D'une manière générale, c'est à éviter.

A.II.3 Formule de projection avec angles non orientés

A.II.3.a.i Représentation

Les angles non orientés sont représentés de deux manières différentes :



Un angle non orienté est toujours positif. Il s'apparente à une « longueur ».

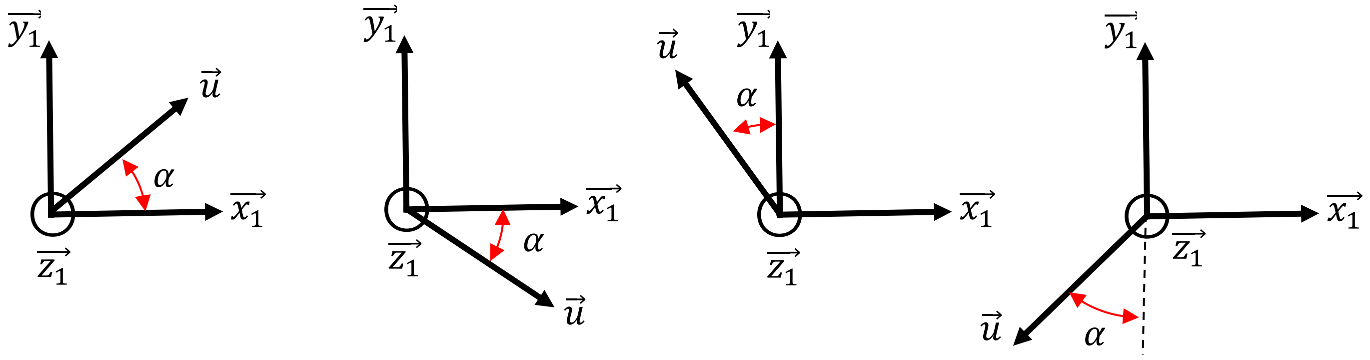
A.II.3.a.ii Paramétrage

Il arrive que les angles représentés sur un schéma ne soient pas orientés. On rencontre les angles non orientés lorsque l'angle :

- varie peu et reste dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- est constant (vecteur positionnant un point dans une pièce indéformable, effort dans une direction fixe par rapport à une pièce…)

On a tendance à nommer ces angles avec des lettres grecques plutôt qu'avec les numéros des bases afin de bien faire la différence.

Donnons 4 exemples différents de paramétrage avec des angles non orientés :



il existe bien d'autres situations de paramétrage possible, ce ne sont que 4 exemples

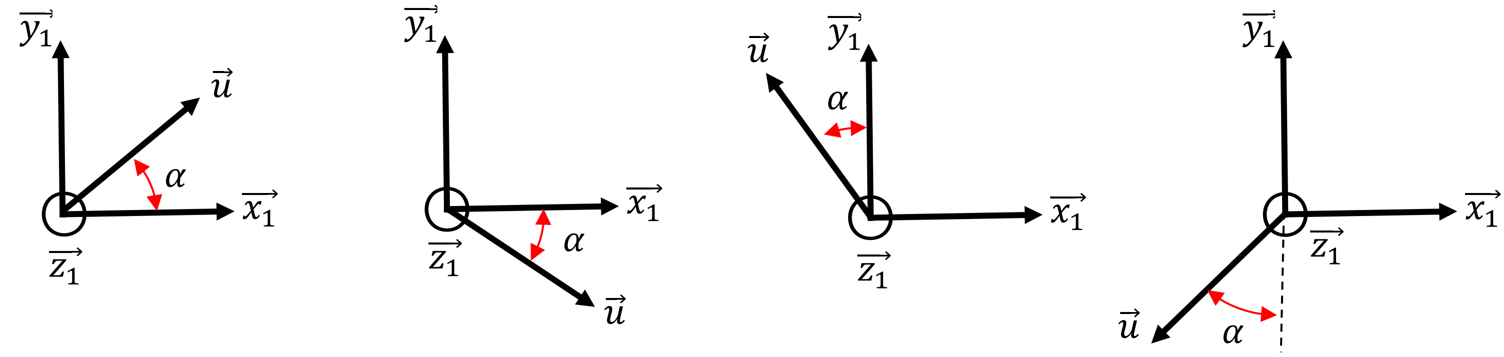
On placera toujours un angle non orienté afin que sa valeur soit comprise dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Placer un angle non orienté de manière à ce qu'il sorte de cet intervalle risque fort d'amener des erreurs sur la lecture des coordonnées d'une projection.

A.II.3.a.iii Calculs de projection

- **Angle dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$**

Si les angles ne sont pas orientés, et si ces angles ont des valeurs positives inférieures à 90° (généralement le cas), on peut lire les coordonnées des projections sur le dessin :

$$\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$



$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{x_1} + \sin\alpha\,\vec{y_1}$ $\quad$ $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{x_1} - \sin\alpha\,\vec{y_1}$ $\quad$ $\vec{u} = -\sin\alpha\,\vec{x_1} + \cos\alpha\,\vec{y_1}$ $\quad$ $\vec{u} = -\sin\alpha\,\vec{x_1} - \cos\alpha\,\vec{y_1}$

Remarque : dans ce cas, et uniquement dans ce cas, on peut se permettre de faire apparaître des formules de trigonométrie sans risques d'erreurs avec $\pi-\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \pi+\alpha, \ldots$

- **Angle hors de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$**

Si les angles non orientés proposés n'appartiennent pas à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, NE PAS LIRE les coordonnées visuellement, mais préférer se rapporter au cas de la projection d'un vecteur quelconque proposé au paragraphe suivant « Angles orientés et non orientés ».

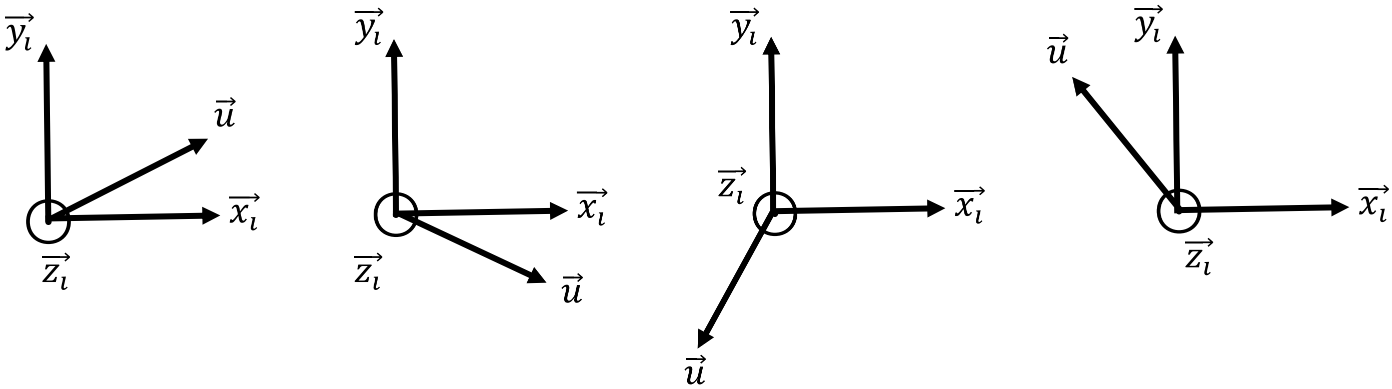
A.II.4 Projection d'un vecteur quelconque

Les deux formules de projection obtenues précédemment s'utilisent pour projeter un vecteur quelconque dans une base.

A.II.4.a Cas d'un angle orienté

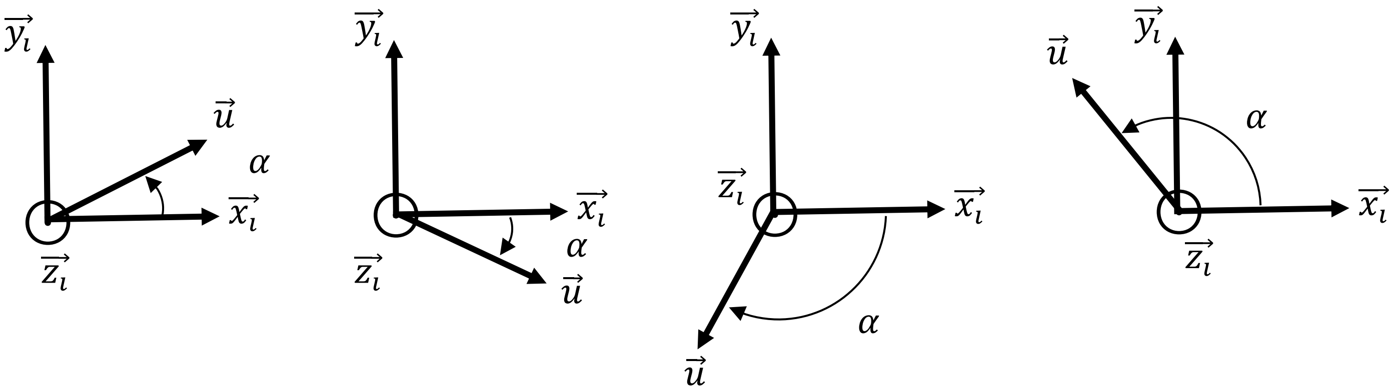
A.II.4.a.i Situation

Plaçons nous dans le cas d'une rotation autour de $\vec{z}$.
Quelle que soit la situation ci-dessous, on veut exprimer le vecteur $\vec{u}$ dans la base i.



Supposons ici que l'angle évolue, ce qui nous conduit à choisir un paramétrage avec angle orienté. Parmi les différentes solutions de paramétrage possible, les deux usuelles sont celles qui correspondant à orienter $\vec{u}$ par rapport à $\vec{x}$ ou à $\vec{y}$. Traitons ces deux cas.

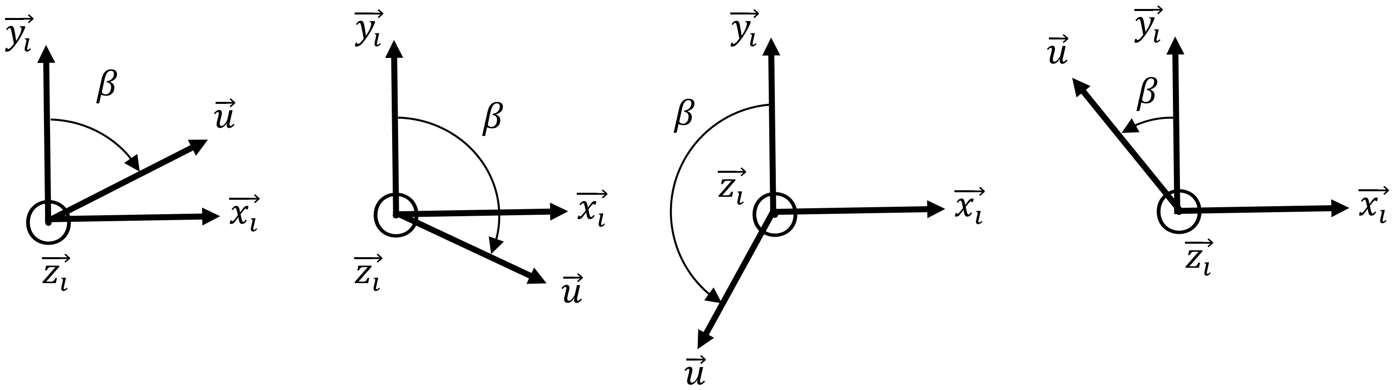
A.II.4.a.ii Orientation par rapport à $\vec{x}$



Dans toutes ces situations, le vecteur $\vec{u}$ est orienté par rapport au vecteur $\vec{x_i}$, on peut donc appliquer la formule de projection « d'un vecteur $\vec{x}$ » :

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{x_i} + sin\,\alpha\,\vec{y_i}$$

A.II.4.a.iii Orientation par rapport à $\vec{y}$



Dans toutes ces situations, le vecteur $\vec{u}$ est orienté par rapport au vecteur $\vec{y_l}$, on peut donc appliquer la formule de projection « d'un vecteur $\vec{y}$ » :

$$\vec{u} = -\sin\beta\,\vec{x_l} + \cos\beta\,\vec{y_l}$$

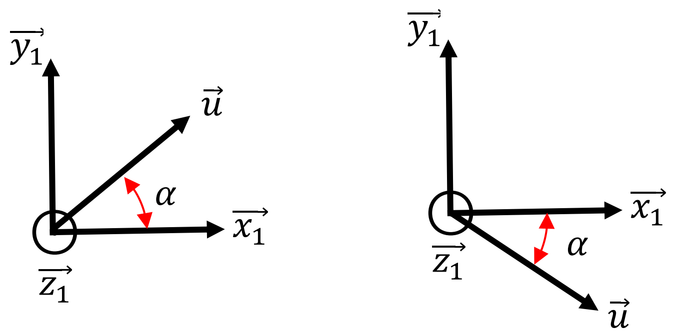
A.II.4.b Cas d'un angle non orienté

A.II.4.b.i Association d'un angle orienté à un angle non orienté

On peut associer un angle orienté à un angle non orienté. Pour cela, il suffit de lui ajouter un signe selon son sens de parcours (cf exemples ci-dessous).

A.II.4.b.ii Angle non orienté dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Dans ce cas, on peut lire les coordonnées directement sur les figures comme vu quelques paragraphes avant. On peut toutefois aussi associer un angle orienté à l'angle non orienté et appliquer les formules de projection usuelles selon l'orientation par rapport à $\vec{x}$ ou $\vec{y}$.



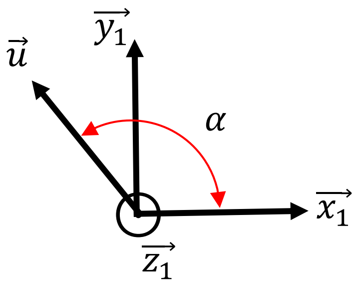
$$(\vec{x_1},\vec{u}) = \alpha$$
$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{x_1} + \sin\alpha\,\vec{y_1}$$

$$(\vec{x_1},\vec{u}) = -\alpha$$
$$\vec{u} = \cos(-\alpha)\,\vec{x_1} + \sin(-\alpha)\,\vec{y_1}$$
$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{x_1} - \sin\alpha\,\vec{y_1}$$

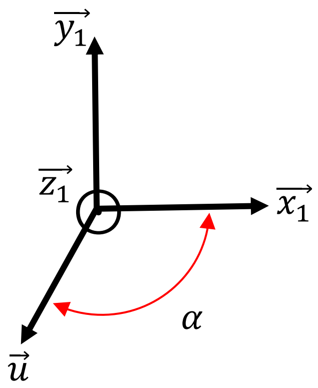
Cela sera très utile lorsque l'on aura des angles orientés et non orientés et lorsque les angles non orientés ne seront pas dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (paragraphes suivants).

A.II.4.b.iii Angle non orienté dans hors de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Dans le cas d'angles non orientés hors de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, il est vivement recommandé de définir un angle orienté et d'appliquer les formules de projection classiques.



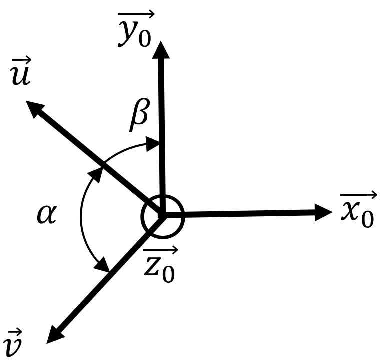
$$(\overrightarrow{x_1},\vec{u}) = \alpha$$
$$\vec{u} = \cos\alpha\,\overrightarrow{x_1} + sin\,\alpha\,\overrightarrow{y_1}$$



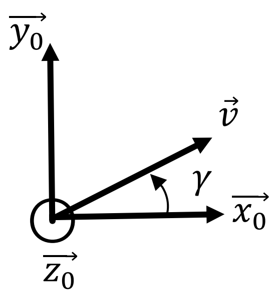
$$(\overrightarrow{x_1},\vec{u}) = -\alpha$$
$$\vec{u} = \cos(-\alpha)\,\overrightarrow{x_1} + sin(-\alpha)\,\overrightarrow{y_1}$$
$$\vec{u} = \cos\alpha\,\overrightarrow{x_1} - sin\,\alpha\,\overrightarrow{y_1}$$

A.II.4.c Mélange d'angles orientés et non orientés

Soit un paramétrage angulaire contenant à la fois des angles orientés et non orientés :



Pour exprimer $\vec{v}$ dans la base 0, choisissons de déterminer l'angle $\gamma = (\overrightarrow{x_0},\vec{v})$, soit la situation suivante :



On aura alors :

$$\vec{v} = cos\,\gamma\,\overrightarrow{x_0} + sin\,\gamma\,\overrightarrow{y_0}$$

Pour ne pas faire d'erreurs, écrivons :

$$\gamma = (\widehat{\overrightarrow{x_0},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}}) + (\widehat{\overrightarrow{y_0},\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Relation de Chasles angulaire

Concernant l'angle orienté, on a :

$$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{y_0}}) = \beta \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{y_0},\vec{u}}) = -\beta$$

Concernant l'angle non orienté, il suffit d'associer le bon signe à l'angle utilisé :

$$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \alpha$$

Enfin, on fait de même pour l'angle entre $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$:

$$(\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}}) = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\gamma = (\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}}) + (\widehat{\overrightarrow{y_0},\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha = (\alpha - \beta) + \frac{\pi}{2}$$

Soit :

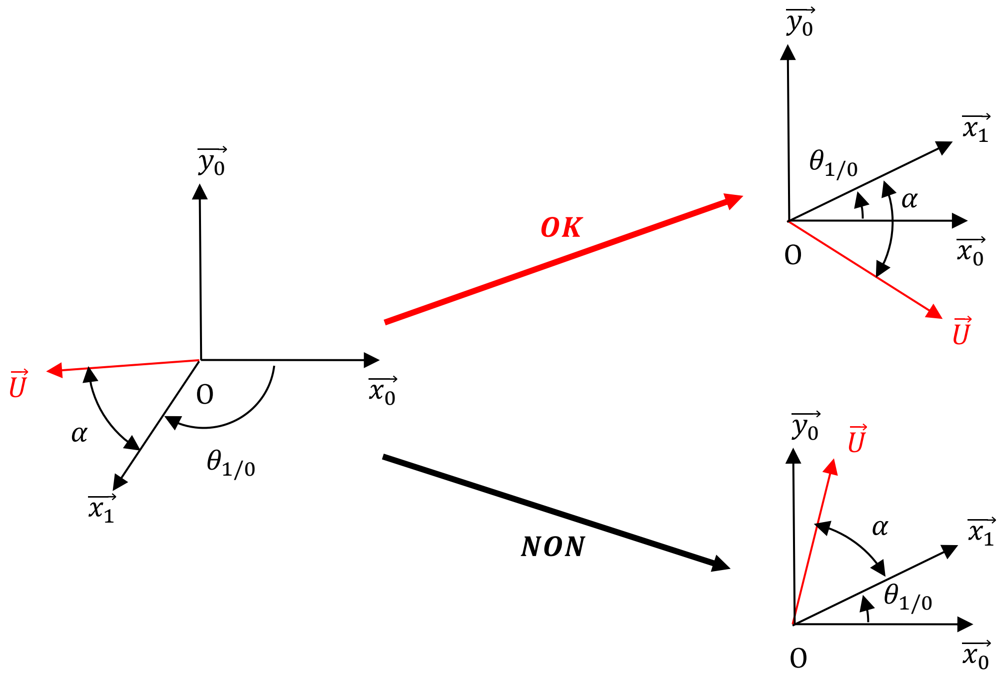
$$\vec{v} = cos\,\gamma\,\overrightarrow{x_0} + sin\,\gamma\,\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{v} = cos\left[(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{2}\right]\overrightarrow{x_0} + sin\left[(\alpha - \beta) + \frac{\pi}{2}\right]\overrightarrow{y_0}$$

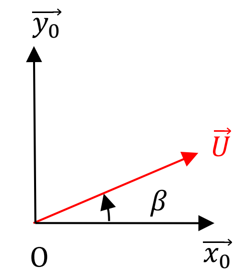
Cette application permet d'aller un peu plus loin :

$$\vec{v} = -\,sin(\alpha - \beta)\,\overrightarrow{x_0} + cos(\alpha - \beta)\,\overrightarrow{y_0}$$

Attention : un angle non orienté défini une position relative fixe entre deux vecteurs. On ne peut pas se permettre de le représenter comme on veut pour faire ensuite des calculs de projections :



On pourra toutefois se ramener à la situation suivante en exprimant correctement l'angle β :

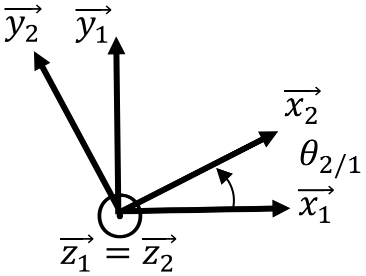


$$\beta = \left(\overrightarrow{x_0}, \vec{U}\right) = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) + \left(\overrightarrow{x_1}, \vec{U}\right) = \theta_{10} - \alpha$$

A.II.5 Cas particuliers

A.II.5.a Projection de la base 1 dans la base 2

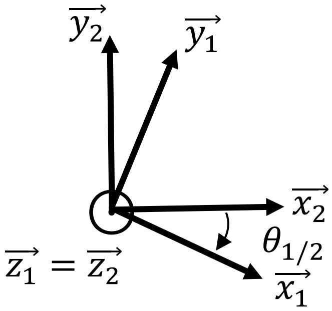
Généralement, lorsqu'il y a deux bases 1 et 2, on fait ce schéma :



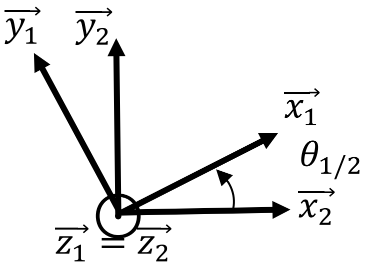
Si l'on demande les coordonnées des vecteurs de la base 2 dans la base 1, personne ne fait d'erreurs avec ce schéma :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -\sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$

Mais, si l'on demande les coordonnées des vecteurs de la base 1 dans la base 2, il vient des erreurs, surtout si la figure n'est pas représentée avec un angle positif inférieur à 90°, par exemple dans ce cas :



Le mieux est d'appliquer la démarche vue précédemment, en représentant ce schéma :



On écrit alors :

$$\overrightarrow{x_1} = \cos\theta_{1/2}\,\overrightarrow{x_2} + \sin\theta_{1/2}\,\overrightarrow{y_2}$$
$$\overrightarrow{y_1} = -\sin\theta_{1/2}\,\overrightarrow{x_2} + \cos\theta_{1/2}\,\overrightarrow{y_2}$$

On peut aussi exprimer ce résultat, si nécessaire, en fonction de $\theta_{2/1}$:

$$\theta_{1/2} = -\theta_{2/1}$$

$$\overrightarrow{x_1} = \cos(-\theta_{2/1})\,\overrightarrow{x_2} + \sin(-\theta_{2/1})\,\overrightarrow{y_2}$$
$$\overrightarrow{y_1} = -\sin(-\theta_{2/1})\,\overrightarrow{x_2} + \cos(-\theta_{2/1})\,\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{x_1} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_2} - \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_2}$$
$$\overrightarrow{y_1} = \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_2} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_2}$$

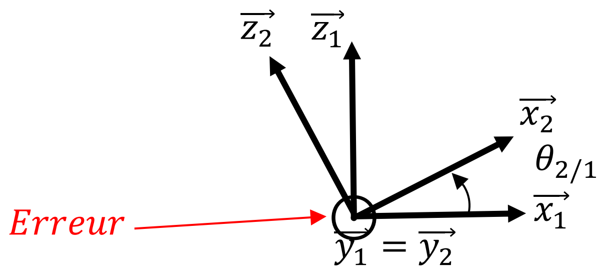
On retrouve bien la formule donnée précédemment $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$.

A.II.5.b Rotation autour de vecteurs $\vec{y}$

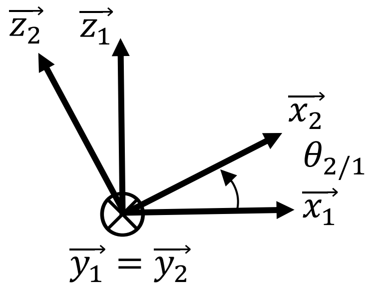
Jusqu'à maintenant, les rotations avaient lieu autour de vecteurs $\vec{z}$. Ainsi, les angles représentés positivement sur le schéma étaient réellement positifs autour de $\vec{z}$ dans le sens trigonométrique.
Ce n'est plus le cas lorsque l'on a une rotation autour d'un vecteur $\vec{y}$.

A.II.5.b.i Situation d'erreur

Soit la situation suivante :



Les bases étant directes, les vecteurs $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{y_2}$ « s'en vont vers l'arrière ».



La rotation proposée sur ce schéma est en sens direct visuellement, mais en réalité elle est en sens indirect autour de $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{y_2}$.

$$\boldsymbol{\theta_{2/1} < 0}$$

L'erreur à ne pas faire est donc la suivante :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{z_1}$$
$$\overrightarrow{z_2} = -\sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$

Erreurs

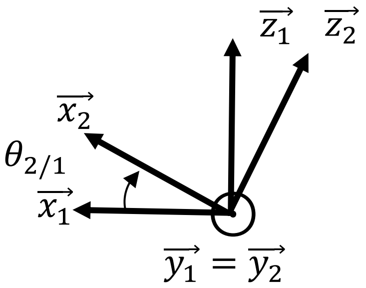
Il faut prendre en compte le fait que $\theta_{2/1}$ est négatif.
Ainsi :

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \sin(-\theta_{2/1})\,\overrightarrow{z_1}$$
$$\overrightarrow{z_2} = -\sin(-\theta_{2/1})\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} - \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{z_1}$$
$$\overrightarrow{z_2} = \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{y_1}$$

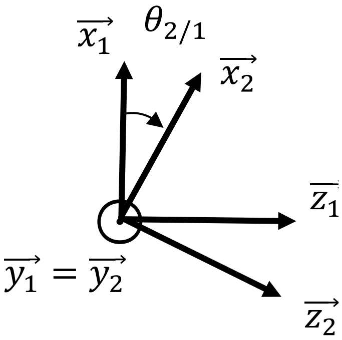
A.II.5.b.ii Transformations

Regardons la figure précédente de derrière :

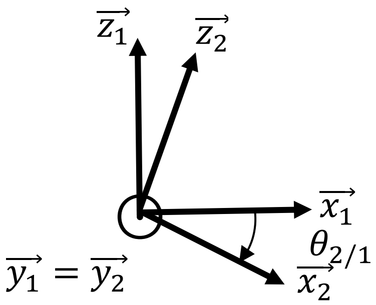


On remarque bien le fait que la rotation représentée est une rotation en sens négatif autour du vecteur $\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_2}$.

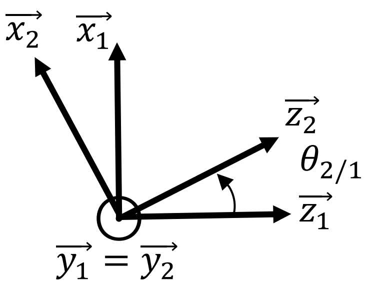
Retournons cette représentation afin d'obtenir la base 1 horizontalement et verticalement :



Ou encore :

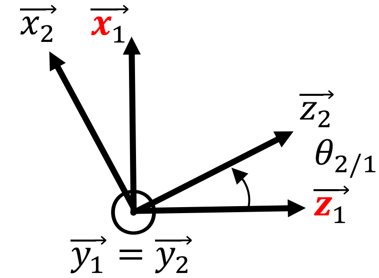


Comme nous l'avons vu précédemment, il est préférable de représenter la rotation positive suivante :



A.II.5.b.iii Solution générale

En présence d'une rotation autour d'un axe $\vec{y}$, il est préférable de représenter la figure de changement de base suivante, dans laquelle au lieu de mettre $\vec{x}$ horizontalement et $\vec{z}$ verticalement, on met $\vec{z}$ horizontalement et $\vec{x}$ verticalement



On a alors très simplement :

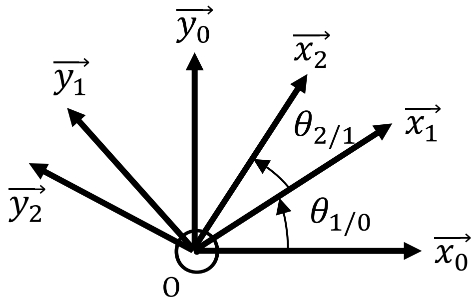
$$\overrightarrow{z_2} = \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{z_1} + \sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1}$$
$$\overrightarrow{x_2} = -\sin\theta_{2/1}\,\overrightarrow{z_1} + \cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{x_1}$$

Il suffit finalement de représenter la base de manière directe, le vecteur portant la rotation orienté « vers le lecteur ».

Mémo : Le mauvais réflexe était de chercher un ordre alphabétique dans la représentation des bases : $\vec{x}$ puis $\vec{z}$. Il faut donc retenir que dans le cas d'une rotation autour d'un vecteur $\vec{y}$, on met $\vec{z}$ horizontalement et $\vec{x}$ verticalement afin d'obtenir une rotation positive autour de $\vec{y}$ en réalité et dans la représentation graphique associée.

A.II.5.c Changements de base plans successifs

Soit la situation suivante :



Nous pouvons exprimer les vecteurs $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$ dans la base 0 par deux méthodes différentes, l'une étant à privilégier.

A.II.5.c.i Changements de bases successifs

La première méthode consiste à

- Exprimer $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$ en fonction de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$
- Exprimer $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$ en fonction de $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$
- Remplacer $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$ dans l'expression de $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$

$$\overrightarrow{x_2} = cos\theta_{2/1}\overrightarrow{x_1} + sin\theta_{2/1}\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -sin\theta_{2/1}\overrightarrow{x_1} + cos\theta_{2/1}\overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{x_1} = cos\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + sin\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0}$$
$$\overrightarrow{y_1} = -sin\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + cos\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{x_2} = cos\theta_{2/1}(cos\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + sin\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0}) + sin\theta_{2/1}(-sin\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + cos\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0})$$
$$\overrightarrow{y_2} = -sin\theta_{2/1}(cos\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + sin\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0}) + cos\theta_{2/1}(-sin\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + cos\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0})$$

$$\overrightarrow{x_2} = cos\theta_{2/1}cos\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + cos\theta_{2/1}sin\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0} - sin\theta_{2/1}sin\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + sin\theta_{2/1}cos\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -sin\theta_{2/1}cos\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} - sin\theta_{2/1}sin\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0} - cos\theta_{2/1}sin\theta_{1/0}\overrightarrow{x_0} + cos\theta_{2/1}cos\theta_{1/0}\overrightarrow{y_0}$$

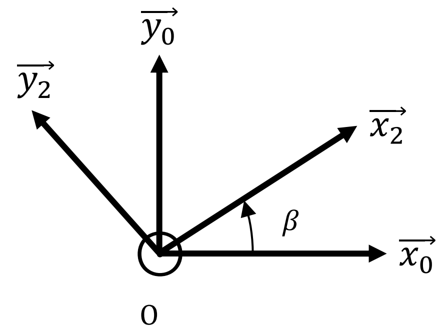
$$\overrightarrow{x_2} = \left(cos\theta_{2/1}cos\theta_{1/0} - sin\theta_{2/1}sin\theta_{1/0}\right)\overrightarrow{x_0} + \left(cos\theta_{2/1}sin\theta_{1/0} + sin\theta_{2/1}cos\theta_{1/0}\right)\overrightarrow{y_0}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -\left(sin\theta_{2/1}cos\theta_{1/0} + cos\theta_{2/1}sin\theta_{1/0}\right)\overrightarrow{x_0} + \left(cos\theta_{2/1}cos\theta_{1/0} - sin\theta_{2/1}sin\theta_{1/0}\right)\overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{x_2} = cos\left(\theta_{2/1} + \theta_{1/0}\right)\overrightarrow{x_0} + sin\left(\theta_{2/1} + \theta_{1/0}\right)\overrightarrow{y_0}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -sin\left(\theta_{2/1} + \theta_{1/0}\right)\overrightarrow{x_0} + cos\left(\theta_{2/1} + \theta_{1/0}\right)\overrightarrow{y_0}$$

On pourrait être tenté d'écrire $\theta_{2/1} + \theta_{1/0} = \theta_{2/0}$, mais nous préférerons l'éviter !!!

A.II.5.c.ii Utilisation de la méthode générale

La seconde solution, à privilégier, consiste à poser l'angle $\theta_{2/0}$ en appliquant la démarche classique de projection vue précédemment :



On a :

$$\beta = \theta_{2/1} + \theta_{1/0}$$

On applique les formules usuelles :

$$\overrightarrow{x_2} = cos\beta\overrightarrow{x_0} + sin\beta\overrightarrow{y_0}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -sin\beta\overrightarrow{x_0} + cos\beta\overrightarrow{y_0}$$

C'est-à-dire :

$$\overrightarrow{x_2} = cos(\theta_{2/1} + \theta_{1/0})\overrightarrow{x_0} + sin(\theta_{2/1} + \theta_{1/0})\overrightarrow{y_0}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -sin(\theta_{2/1} + \theta_{1/0})\overrightarrow{x_0} + cos(\theta_{2/1} + \theta_{1/0})\overrightarrow{y_0}$$

A.II.5.c.iii Conclusion

Dans le cas de projections en passant par plusieurs rotations autour du même axe (c'est toujours le cas en mécanismes plans), faire apparaître un produit de fonctions cosinus et sinus doit vous mettre la puce à l'oreille et vous faire réfléchir afin de faire au plus simple.
Par contre, dans le cas de mécanismes 3D, il n'est pas rare que des produits de cosinus et sinus apparaissent.

A.II.6 Récapitulatif

A.II.6.a Angles non orientés

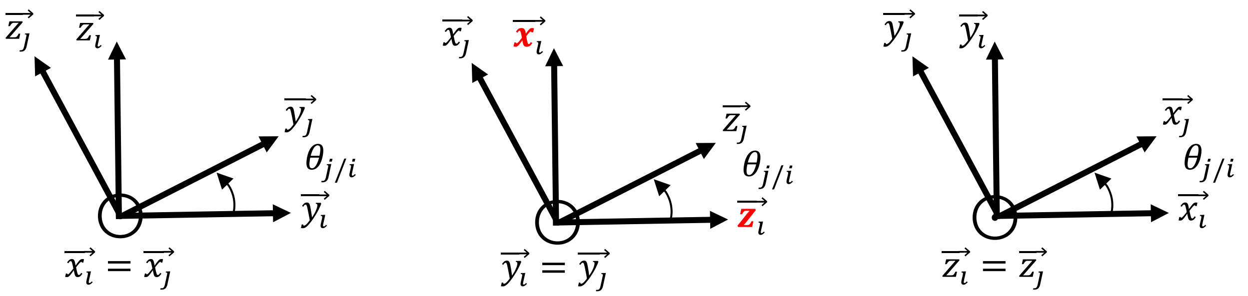
Le cas des angles non orientés est simple, si l'angle est dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, aucun problèmes de signe, on peut lire les composantes sur les vecteurs de base.

A.II.6.b Angles orientés

Pour éviter toute erreur du fait des signes et représentations :

- Représenter en premier le vecteur unitaire portant la rotation « venant vers nous »
- Représenter la base contenant ce vecteur dans le **sens direct** comme d'habitude
- Suivre la démarche classique de projection en orientant positivement la base à projeter et lire les composantes

Rotation autour de $\vec{x}$ | Rotation autour de $\vec{y}$ | Rotation autour de $\vec{z}$



Rotation autour de $\vec{x}$:

$$\vec{y_j} = \cos\theta_{j/i}\,\vec{y_i} + \sin\theta_{j/i}\,\vec{z_i}$$
$$\vec{z_j} = -\sin\theta_{j/i}\,\vec{y_i} + \cos\theta_{j/i}\,\vec{z_i}$$

Rotation autour de $\vec{y}$:

$$\vec{z_j} = \cos\theta_{j/i}\,\vec{z_i} + \sin\theta_{j/i}\,\vec{x_i}$$
$$\vec{x_j} = -\sin\theta_{j/i}\,\vec{z_i} + \cos\theta_{j/i}\,\vec{x_i}$$

Rotation autour de $\vec{z}$:

$$\vec{x_j} = \cos\theta_{j/i}\,\vec{x_i} + \sin\theta_{j/i}\,\vec{y_i}$$
$$\vec{y_j} = -\sin\theta_{j/i}\,\vec{x_i} + \cos\theta_{j/i}\,\vec{y_i}$$

A.II.6.c Angles orientés et non orientés

Dans le cas où il y a à la fois des angles orientés et non orientés, on choisira de poser un angle antre la base de projection et le vecteur à projeter, puis on appliquera une relation de Chasles angulaire afin de déterminer proprement cet angle.