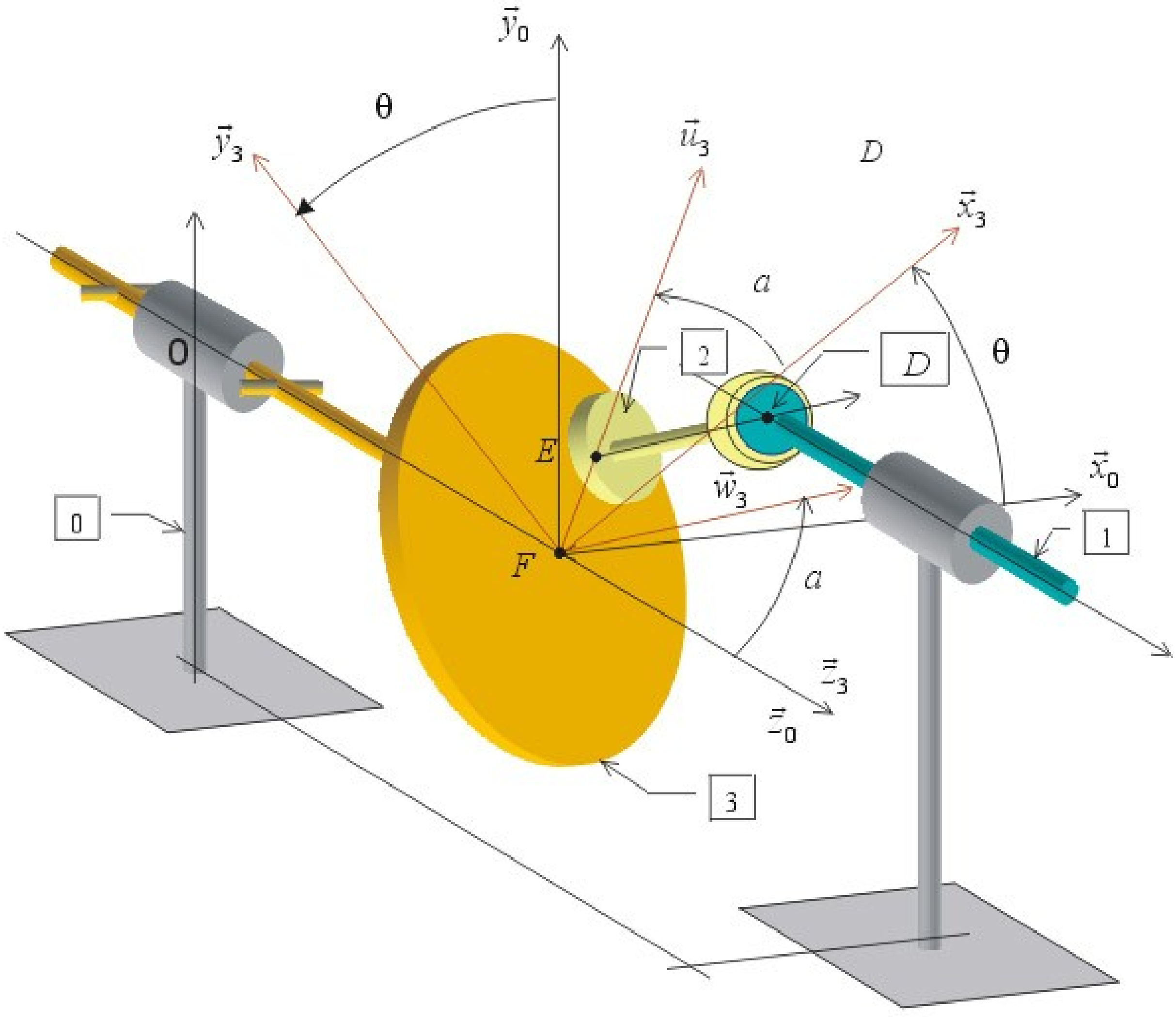
Enoncé *D'après concours ENS Cachan*

La pompe est constituée par un corps (0) dans lequel sont répartis six pistons (1) dont les axes sont situés sur un cylindre de révolution d'axe $(O,\vec{z}_0)$ et de rayon R . La liaison entre chaque piston (1) et le corps (0) est une liaison pivot glissant d'axe $(D,\vec{z}_0)$.

L'extrémité D de chaque piston vient en contact , par l'intermédiaire d'une rotule de centre D, avec un patin (2).
Chaque patin (2) fait l'objet d'une liaison plane avec le plateau incliné de l'arbre moteur (3). Le point E est la projection orthogonale du point D sur le plateau incliné, la longueur ED est constante et égale à h.
L'intersection du plateau incliné avec l'axe de rotation de l'arbre (3) est le point F. Le plateau incliné, donc aussi l'arbre (3) auquel il est lié, est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti (0).

La rotation de l'arbre moteur (3) entraîne le déplacement des pistons et l'aspiration ou le refoulement du fluide hydraulique.
L'étude a pour objet le calcul des efforts dans les liaisons de ce mécanisme en fonctionnement quasi statique.
L'action d'un ressort permettant de plaquer le patin (2) sur le plan incliné lié à (3) n'est pas prise en compte.



$$(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0) \xrightarrow{(\theta,\vec{z}_0=\vec{z}_3)} (\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3) \xrightarrow{(a,\vec{y}_3)} (\vec{y}_3,\vec{w}_3,\vec{u}_3)$$

Toutes les liaisons sont supposées parfaites. Les actions de pesanteur sont négligées . Le torseur d'action mécanique de la pièce (i) sur la pièce (j) sera noté :

$$\{T_{i\to j}\} = {}_M\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(-,-,-)}$$

L'action du fluide hydraulique sur le piston (1) est un glisseur :

$$_D\{T_{Fluide\to 1}\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -p_r.S & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

L'action du moteur sur l'arbre (3) est un couple tel que :

$$_D\{T_{Moteur\to 3}\} = {}_F\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

On donne :

$\overrightarrow{FD} = R.\vec{x}_0 + \lambda.\vec{z}_0$ avec R constant et λ variable

$\overrightarrow{ED} = h.\vec{w}_3$ avec h constant et $\vec{w}_3$ vecteur normal au plan d'appui entre (2) et (3)

$\overrightarrow{FE} = X.\vec{u}_3 + Y.\vec{y}_3$ avec X et Y variables.

1 Etablir les expressions de X, Y *et* λ en fonction de R, h, θ *et* α

Préciser les torseurs suivants :

$_F\{T_{0\to 3}\}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$, $_D\{T_{3\to 2}\}_{(\vec{u}_3,\vec{y}_3,\vec{w}_3)}$, $_D\{T_{2\to 1}\}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$ et $_D\{T_{1\to 0}\}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$

3 Traduire l'équilibre de la pièce (1) et écrire les équations scalaires qui en sont déduites.

4 Traduire l'équilibre de la pièce (2) et écrire les équations scalaires qui en sont déduites.

5 Traduire l'équilibre de la pièce (3) et écrire les équations scalaires qui en sont déduites.

6 Résoudre le système d'équations obtenu de façon à exprimer chaque composante inconnue des torseurs transmissibles en fonction de la pression P_r, de l'angle θ et des caractéristiques géométriques constantes. Exprimer le couple moteur $\mathbb{C}$ en fonction de ces mêmes quantités.

Solution

1 Nous avons : $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} = R.\vec{x}_0 + \lambda.\vec{z}_0 - h.\vec{w}_3 = X.\vec{u}_3 + Y.\vec{y}_3$. En projetant cette relation dans la base $(\vec{u}_3, \vec{y}_3, \vec{w}_3)$ nous obtenons :

$$/\vec{y}_3 \qquad R.\underbrace{\vec{x}_0.\vec{y}_3}_{-\sin\theta} + \lambda.\underbrace{\vec{z}_0.\vec{y}_3}_{0} - h.\underbrace{\vec{w}_3.\vec{y}_3}_{0} = Y$$

$$/\vec{u}_3 \qquad R.\underbrace{\vec{x}_0\vec{u}_3}_{\cos\theta.\cos a}+\lambda.\underbrace{\vec{z}_0\vec{u}_3}_{-\sin a}-h.\underbrace{\vec{w}_3\vec{u}_3}_{0}=X$$

$$/\vec{w}_3 \qquad R.\underbrace{\vec{x}_0.\vec{w}_3}_{\cos\theta.\sin a}+\lambda.\underbrace{\vec{z}_0.\vec{w}_3}_{\cos a}-h.\underbrace{\vec{w}_3.\vec{w}_3}_{1}=0$$

Par combinaison de ces dernières relations nous obtenons :

$$\boxed{\begin{aligned} &Y=-R.\sin\theta\\ &X=\frac{(R.\cos\theta-h\sin a)}{\cos a}\\ &\lambda=\frac{h}{\cos a}-R.\cos\theta.\tan a\end{aligned}}$$

2 A partir des liaisons du mécanisme nous avons :

$$\{T_{0\to3}\}=\underset{\forall M\in(F,\vec{z}_3)}{\begin{Bmatrix}X_{03} & L_{03}\\ Y_{03} & M_{03}\\ Z_{03} & 0\end{Bmatrix}}_{(-,-,\vec{z}_3)}=\underset{F}{\begin{Bmatrix}X_{03} & L_{03}\\ Y_{03} & M_{03}\\ Z_{03} & 0\end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

$$\{T_{3\to2}\}=\underset{\forall M}{\begin{Bmatrix}0 & L_{32}\\ 0 & M_{32}\\ Z_{32} & 0\end{Bmatrix}}_{(-,-,\vec{w}_3)}=\underset{D}{\begin{Bmatrix}0 & L_{32}\\ 0 & M_{32}\\ Z_{32} & 0\end{Bmatrix}}_{(\vec{u}_3,\vec{y}_3,\vec{w}_3)}$$

$$\{T_{2\to1}\}_{(-,-,-)}=\underset{D}{\begin{Bmatrix}X_{21} & 0\\ Y_{21} & 0\\ Z_{21} & 0\end{Bmatrix}}_{(-,-,-)}=\underset{D}{\begin{Bmatrix}X_{21} & 0\\ Y_{21} & 0\\ Z_{21} & 0\end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

$$\{T_{1\to0}\}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}=\underset{\forall M\in(D,\vec{z}_0)}{\begin{Bmatrix}X_{10} & L_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}}_{(-,-,\vec{z}_0)}=\underset{D}{\begin{Bmatrix}X_{10} & L_{10}\\ Y_{10} & M_{10}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

3 Etudions l'équilibre de la pièce (1) :

*Isolons la pièce (1)

*Caractérisons les actions externes par des torseurs :

$$_D\{T_{Fluide\to1}\}=\underset{D}{\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -p_r.S & 0\end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

$$_D\{T_{2\to1}\}=\underset{D}{\begin{Bmatrix}X_{21} & 0\\ Y_{21} & 0\\ Z_{21} & 0\end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

$$_D\{T_{0\to1}\}=-_D\{T_{1\to0}\}=\underset{D}{\begin{Bmatrix}-X_{10} & -L_{10}\\ -Y_{10} & -M_{10}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

*En appliquant le PFS à (1) en D, il vient en projection sur la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$:

$$\left|\begin{array}{ll} X_{21} - X_{10} = 0 & 1) \\ Y_{21} - Y_{10} = 0 & 2) \\ Z_{21} - P_r.S = 0 & 3) \\ L_{10} = 0 & 4) \\ M_{10} = 0 & 5) \end{array}\right.$$

4 Etudions l'équilibre de la pièce (2) :

*Isolons la pièce (2)

*Caractérisons les actions externes par des torseurs :

$$_D\left\{T_{1 \to 2}\right\} = -\,_D\left\{T_{2 \to 1}\right\} = \,_D\left\{\begin{array}{l|l} -X_{21} & 0 \\ -Y_{21} & 0 \\ -Z_{21} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

$$_D\left\{T_{3 \to 2}\right\} = \,_D\left\{\begin{array}{l|l} 0 & L_{32} \\ 0 & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{u}_3, \vec{y}_3, \vec{w}_3)} = \,_D\left\{\begin{array}{l|l} Z_{32}.\sin a & L_{32}.\cos a \\ 0 & M_{32} \\ Z_{32}.\cos a & -L_{32}.\sin a \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

*En appliquant le PFS à (2) en D, il vient en projection sur la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$:

$$\left|\begin{array}{ll} -X_{21} + Z_{32}.\sin a = 0 & 6) \\ -Y_{21} = 0 & 7) \\ -Z_{21} + Z_{32}.\cos a = 0 & 8) \\ L_{32}.\cos a = 0 & 9) \\ M_{32} = 0 & 10) \\ L_{32}.\sin a = 0 & 11) \end{array}\right.$$

5 Etudions l'équilibre de la pièce (3) :

*Isolons la pièce (3)

*Caractérisons les actions externes par des torseurs :

$$_D\left\{T_{Moteur \to 3}\right\} = \,_F\left\{\begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

$$_D\left\{T_{2 \to 3}\right\} = -\,_D\left\{T_{3 \to 2}\right\} = \,_D\left\{\begin{array}{l|l} 0 & -L_{32} \\ 0 & -M_{32} \\ -Z_{32} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{u}_3, \vec{y}_3, \vec{w}_3)} = \,_F\left\{\begin{array}{l|l} -Z_{32}.\sin a & -(L_{32} + Y.Z_{32}).\cos a \\ 0 & -M_{32} + X.Z_{32} \\ -Z_{32}.\cos a & (L_{32} + Y.Z_{32}).\sin a \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

$$_F\left\{T_{0 \to 3}\right\} = \,_F\left\{\begin{array}{l|l} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

*En appliquant le PFS à (3) en F, il vient en projection sur la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$:

$$\left|\begin{array}{ll} X_{03} - Z_{32}.\sin a = 0 & 12) \\ Y_{03} = 0 & 13) \\ Z_{03} - Z_{32}.\cos a = 0 & 14) \\ L_{03} - \left(L_{32} + Y Z_{32}\right).\cos a = 0 & 15) \\ M_{03} - M_{32} + X.Z_{32} = 0 & 16) \\ \mathbb{C} + \left(L_{32} + Y.Z_{32}\right).\sin a = 0 & 17) \end{array}\right.$$

6 En reprenant l'ensemble des équations , nous obtenons par combinaison :

1) $X_{21} - X_{10} = 0$

2) $Y_{21} - Y_{10} = 0$

3) $Z_{21} - P_r.S = 0$

4) $L_{10} = 0$

5) $M_{10} = 0$

6) $-X_{21} + Z_{32}.\sin a = 0$

7) $Y_{21} = 0$

8) $-Z_{21} + Z_{32}.\cos a = 0$

9) $L_{32}.\cos a = 0$

10) $M_{32} = 0$

11) $L_{32}.\sin a = 0$

12) $X_{03} - Z_{32}.\sin a = 0$

13) $Y_{03} = 0$

14) $Z_{03} - Z_{32}.\cos a = 0$

15) $L_{03} - \left(L_{32} + Y.Z_{32}\right).\cos a = 0$

16) $M_{03} - M_{32} + X.Z_{32} = 0$

17) $\mathbb{C} + \left(L_{32} + Y.Z_{32}\right).\sin a = 0$

soit :

$\boxed{X_{10} = -P_r.S.\tan a}$

$\boxed{Y_{10} = 0}$

$\boxed{L_{01} = 0}$

$\boxed{M_{01} = 0}$

$\boxed{X_{21} = P_r.S.\tan a}$

$\boxed{Y_{21} = 0}$

$\boxed{Z_{21} = P_r.S}$

$\boxed{Z_{32} = \dfrac{P_r.S}{\cos a}}$

$\boxed{M_{32} = 0}$

$$\boxed{L_{32} = 0}$$

$$\boxed{X_{03} = P_\gamma.S.\tan a}$$

$$\boxed{Y_{03} = 0}$$

$$\boxed{Z_{03} = P_\gamma.S}$$

$$\boxed{L_{03} = Y.P_\gamma.S = -R.\sin\theta.P_\gamma.S}$$

$$\boxed{M_{03} = -X.\frac{P_\gamma.S}{\cos a} = -\frac{\left(R.\cos\theta - h.\sin a\right).P_\gamma.S}{\cos^2 a}}$$

$$\boxed{\mathbb{C} = -Y.P_\gamma.S.\tan a = R.\sin\theta.P_\gamma.S.\tan a}$$