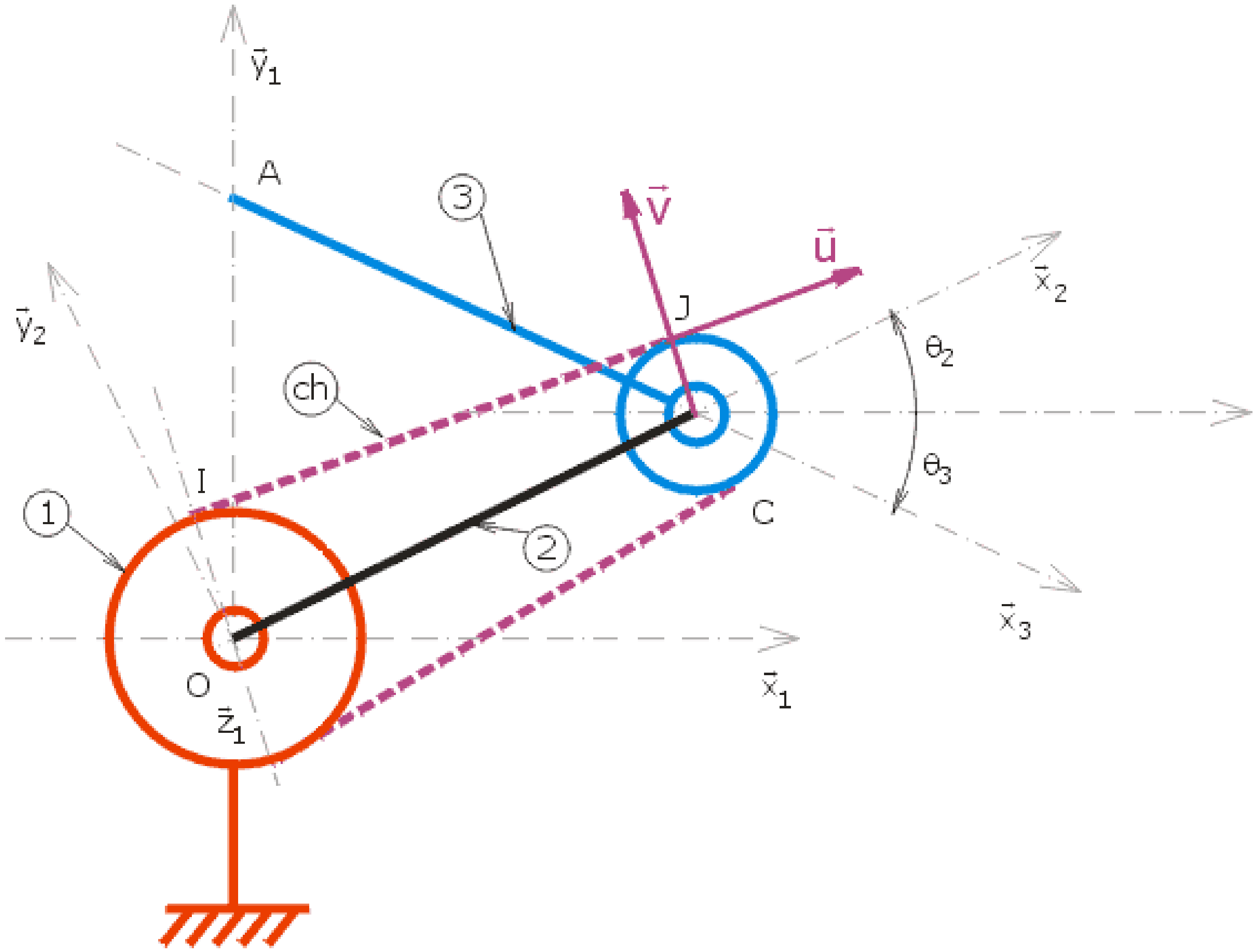
Enoncé

Inspiré d'un concours CAPET

On se propose d'étudier le pantographe simplifié de la figure ci-dessous



Il est constitué :

*D'une roue à chaîne d'axe $(O, \vec{z}_1)$, de rayon R_1 , solidaire du bâti (1)

*D'un bras principal (2) , de longueur $l_2 = \left\|\overrightarrow{OC}\right\|$, en pivot d'axe $(O, \vec{z}_1)$ avec le bâti (1)

*D'un bras secondaire (3) , de longueur $l_3 = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$, en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_1)$ avec le bras principal (2) , sur lequel est fixée une roue à chaîne d'axe $(C, \vec{z}_1)$ et de rayon R_3 .

*D'un archet (4), non représenté pour le moment, assurant le captage du courant .

*D'une chaîne (Ch) reliant les deux roues à chaîne de centre O et de centre C.Cette chaîne est considérée comme tangente au cercle de centre O et de rayon R_1 en I et comme tangente au cercle de centre C et de rayon R_3 en J . On note $\overrightarrow{IJ} = \left\|\overrightarrow{IJ}\right\|.\vec{u}$, $\vec{v}$ le vecteur tel que $\vec{u},\vec{v},\vec{z}_1$ soit un trièdre direct et $\vec{u}.\vec{x}_2 = \cos\alpha$. En position repliée, l'ensemble est tel que les barres (2) et (3) sont horizontales. $(\theta_2 = \theta_3 = 0)$.

1 Etude de la cinématique du bras (3)

1.1 Etablir, en utilisant le non-glissement aux points I et J entre la chaîne et les pièces (1) et (3) la relation liant θ_2 , θ_3 , R_1 et R_3

1.2 Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{OA}$ en projection dans $(\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ en fonction de L_2, L_3, θ_2 et θ_3 .

1.3 Donner l'expression de la vitesse du point A de la pièce (3) par rapport au bâti (1), notée $\vec{V}(A \in 3/1)$.

1.4 Construire la position du centre instantané de rotation du solide 3 par rapport au solide (1).

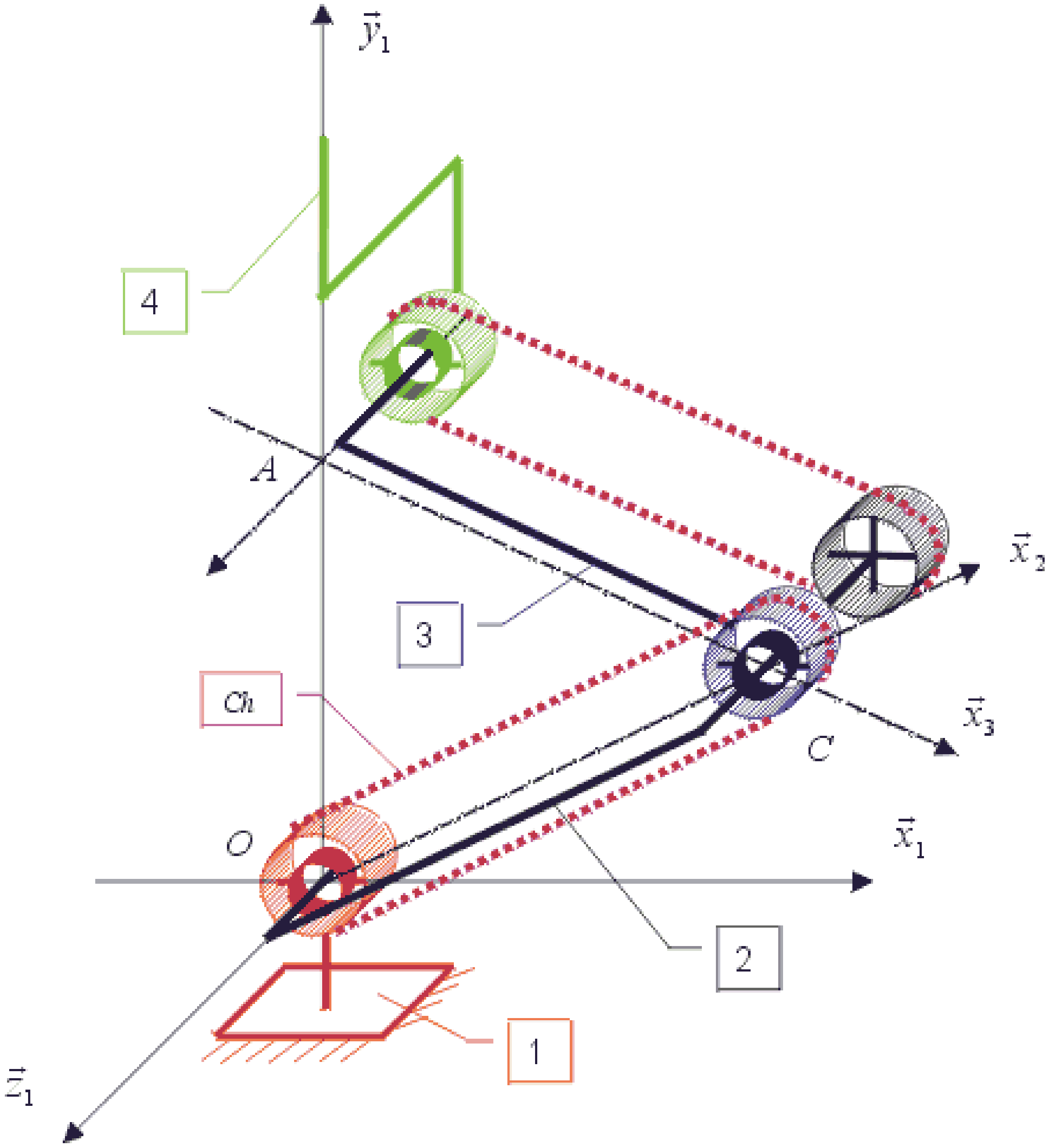
1.5 Sachant que $L_2 = L_3$, en déduire la relation liant R_1 et R_3 pour que la trajectoire , par rapport au bâti (1) , de l'extrémité A de la barre (3) , soit verticale passant par O. Donner dans ces conditions, l'expression de la vitesse du point A de la barre (3) par rapport au bâti (1) en fonction de θ_2 et de $\dot{\theta}_2$ (vitesse angulaire de (2) par rapport à (1))

2 On s'intéresse dans cette partie à la cinématique de l'archet (4) par rapport au bâti (1). Cette cinématique doit être une translation rectiligne suivant la direction donnée par le vecteur $\vec{y}_1$. Le point A doit se déplacer suivant l'axe $(O,\vec{y}_1)$. On a donc rajouté à l'occasion deux autres roues à chaîne :

* Une roue à chaîne d'axe $(C,\vec{z}_1)$, de rayon R_2 , solidaire du bras (2)

*Une roue à chaîne d'axe $(A,\vec{z}_1)$, de rayon R_4 , solidaire de l'archet (4) et qui se trouve en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z}_1)$ avec le bras (3).

Ces deux roues sont liées par une seconde chaîne.



2.1 Donner la forme du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{4/1}\}$ et sa particularité.

2.2 On souhaite à présent retrouver les résultats de l'étude menée au paragraphe 1 en décrivant la cinématique du mécanisme par rapport à la pièce (2). En prenant cette pièce comme référence , en considérant que $L_2 = L_3$, retrouver la relation liant les rayons R_1 et R_3 pour obtenir une translation rectiligne du point A.

2.3 En utilisant le travail effectué à la question précédente, déduire le rapport des rayons R_2 et R_4 pour obtenir le torseur cinématique souhaité $\{\mathcal{V}_{4/1}\}$. On considèrera que le rapport déterminé à la question précédente entre les rayons R_1 et R_3 est conservé dans cette question.

Solution

1.1 Ecrivons le non-glissement en I et J : $\left|\begin{array}{l}\vec{V}(I \in Ch/1) = \vec{V}(I \in 1/0) = \vec{0} \\ \vec{V}(J \in Ch/1) = \vec{V}(J \in 3/1)\end{array}\right.$.

Etablissons ensuite la relation entre les vitesses en I et J de la chaîne par rapport au bâti :

$$\vec{V}(I \in Ch/1) = \vec{V}(J \in Ch/1) + \overrightarrow{IJ} \wedge \vec{\Omega}_{Ch/1}$$

$$\vec{0} = \vec{V}(I \in 3/1) + \overrightarrow{IJ} \wedge \vec{\Omega}_{Ch/1}$$

$$\vec{0} = \vec{V}(C \in 3/1) + \overrightarrow{JC} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} + \overrightarrow{IJ} \wedge \vec{\Omega}_{Ch/1}$$

$$\vec{0} = \underbrace{\vec{V}(C \in 2/1)}_{\underbrace{\vec{V}(O \in 2/1)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{CO} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}} + \overrightarrow{JC} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} + \overrightarrow{IJ} \wedge \vec{\Omega}_{Ch/1}$$

D'après le paramétrage proposé, nous avons :

$$\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{JC} = -R_3 . \vec{u} \\ \overrightarrow{IJ} = -\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| . \vec{v}\end{array}\right.$$

En reprenant relation vectorielle :

$$\vec{0} = \underbrace{\overrightarrow{CO} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}}_{L_2 . \omega_{2/1} . \vec{y}_2} + \underbrace{\overrightarrow{JC} \wedge \vec{\Omega}_{3/1}}_{-R_3 . \omega_{3/1} . \vec{u}} + \underbrace{\overrightarrow{IJ} \wedge \vec{\Omega}_{Ch/1}}_{-\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| . \omega_{Ch/1} . \vec{v}} = \vec{0}$$

Par projection sur les directions $\vec{x}_2$ et $\vec{y}_2$

$$\left|\begin{array}{ll} /\,\vec{x}_2 & -R_3.\omega_{3/1}.\cos\alpha + \left\|\overrightarrow{IJ}\right\|.\omega_{Ch/1}.\sin\alpha = 0 \qquad (1) \\ /\,\vec{y}_2 & L_2.\omega_{2/1} - R_3.\omega_{3/1}.\sin\alpha - \left\|\overrightarrow{IJ}\right\|.\omega_{Ch/1}.\cos\alpha = 0 \qquad (2) \end{array}\right.$$

De plus, projetons le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ suivant la direction $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{IJ}.\vec{v} = \left\|\overrightarrow{IJ}\right\|.\underbrace{\vec{u}.\vec{v}}_{0} = \underbrace{\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CJ}\right)}_{-R_1.\vec{v}+L_2.\vec{x}_2+R_3.\vec{v}}.\vec{v} = -R_1 + L_2.\underbrace{\vec{x}_2.\vec{v}}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} + R_3 = -R_1 - L_2.\sin\alpha + R_3$$

$$\sin\alpha = \frac{R_3 - R_1}{L_2} \qquad (3)$$

En combinant les relations (1) et (2) il vient : $L_2.\omega_{2/1} = \omega_{3/1}.\dfrac{R_3}{\sin\alpha}$ et donc finalement à l'aide de la relation (3): $\boxed{\omega_{2/1} = \omega_{3/1}.\dfrac{R_3}{R_3 - R_1}}$

Par intégration à conditions initiales nulles, nous avons : $\boxed{\theta_2 = \theta_3.\dfrac{R_3}{R_3 - R_1}}$

1.2 Nous avons $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = L_2.\vec{x}_2 - L_3.\vec{x}_3$ ce qui donne en projection dans la base $\left(\vec{x}_1, \vec{y}_1\right)$:

$$\overrightarrow{OA} = L_2.\left(\cos\theta_2.\vec{x}_1 + \sin\theta_2.\vec{y}_1\right) - L_3.\left(\cos\theta_3.\vec{x}_1 + \sin\theta_3.\vec{y}_1\right)$$

$$\overrightarrow{OA} = \left(L_2.\cos\theta_2 - L_3.\cos\theta_3\right).\vec{x}_1 + \left(L_2.\sin\theta_2 - L_3.\sin\theta_3\right).\vec{y}_1 \,\#$$

1.3 Pour déterminer la vitesse du point A appartenant à la pièce 3, dérivons le vecteur position :

$$\vec{V}\left(A \in 3/1\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_1} = \left.\frac{d\left(L_2.\cos\theta_2 - L_3.\cos\theta_3\right).\vec{x}_1 + \left(L_2.\sin\theta_2 - L_3.\sin\theta_3\right).\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_1}$$

$\vec{V}(A \in 3/1) = \left(-L_2.\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 + L_3.\dot{\theta}_3.\sin\theta_3\right).\vec{x}_1 + \left(L_2.\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - L_3.\dot{\theta}_3 \cos\theta_3\right).\vec{y}_1$ #

1.4 Pour déterminer la position de l'axe instantané de rotation du solide (3) par rapport à (1), nous pouvons noter que :

*La cinématique est plane . L'axe central sera donc caractérisé par l'axe passant par le CIR : $I_{3/1}$ et orienté par le vecteur : $\vec{z}_1$.

*Comme nous avons non-glissement en J entre les solides (1) et (3), nous pouvons écrire : $\vec{V}(J \in 3/1) = \vec{V}(J \in Ch/1)$. De même nous pouvons traduire le non-glissement en I entre la chaîne et la roue liée à (1) : $\vec{V}(I \in Ch/1) = \vec{0}$

*La chaîne étant infiniment rigide suivant la direction $\overrightarrow{IJ}$, la vitesse $\vec{V}(J \in Ch/1)$ ne peut être que perpendiculaire en J à la direction $\overrightarrow{IJ}$ (en utilisant la propriété d'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses en tout point de la chaîne, compris entre les points I et J, nous pouvons remarquer que $\vec{V}(J \in Ch/1).\overrightarrow{IJ} = \vec{V}(I \in Ch/1).\overrightarrow{IJ} = 0$)

*En C, nous pouvons écrire : $\vec{V}(C \in 3/1) = \vec{V}(C \in 2/1)$. Donc la vitesse $\vec{V}(C \in 3/1)$ est perpendiculaire en C au vecteur $\overrightarrow{OC}$

A partir de ces constatations, nous déduisons que le CIR $I_{3/1}$ est à l'intersection des perpendiculaires aux vitesses $\vec{V}(J \in 3/1)$ et $\vec{V}(C \in 3/1)$ et donc, à l'intersection des droites (O, C) et (I, J) .

1.5 Pour que le point A se déplace suivant l'axe $(A, \vec{y}_1)$, à partir des composantes du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ exprimées dans le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, on déduit que : $L_2.\cos\theta_2 - L_3.\cos\theta_3 = 0$.
Si l'on considère de plus que $L_2 = L_3$, la condition devient : $\theta_2 = \pm\theta_3$.
*Le cas $\theta_2 = \theta_3$ nous donnerait un vecteur position

$$\overrightarrow{OA} = \underbrace{\left(L_2.\cos\theta_2 - L_3.\cos\theta_3\right)}_{\vec{0}}.\vec{x}_1 + \underbrace{\left(L_2.\sin\theta_2 - L_3.\sin\theta_3\right)}_{\vec{0}}.\vec{y}_1 = \vec{0}$$

* Le cas $\theta_2 = -\theta_3$ nous donne un vecteur position $\overrightarrow{OA} = 2.L_2.\sin\theta_2.\vec{y}_1$ et un vecteur vitesse $\vec{V}\left(A \in 3/1\right) = 2.L_2.\dot{\theta}_2.\cos\theta_2.\vec{y}_1$.

Le cas à retenir est donc le second cas. En utilisant à présent la relation cinématique intégrée de la question (1), nous obtenons la relation suivante sur les rayons de roues : $\boxed{R_1 = 2.R_3}$

2.1 Le torseur cinématique est dans ce cas un torseur couple $\left\{\vartheta_{4/1}\right\} = \underset{\forall M}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}\left(M \in 4/1\right) \end{Bmatrix}}$. Le champ des vecteurs vitesses est uniforme. Tout point appartenant à (4) aura un mouvement de translation rectiligne suivant la direction $\vec{y}_1$.

2.2 En utilisant la pièce (2) comme référence du mouvement, en traduisant le non glissement en I et J, nous pouvons écrire :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{V}\left(I \in Ch/1\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}\left(I \in Ch/2\right) = \vec{V}\left(I \in 1/2\right) \\ \vec{V}\left(J \in Ch/3\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}\left(J \in Ch/2\right) = \vec{V}\left(J \in 3/2\right) \end{array}\right.$$

. En considérant la chaîne infiniment rigide suivant la direction $\overrightarrow{IJ}$, nous pouvons écrire : $\vec{V}\left(I \in Ch/2\right) = \vec{V}\left(J \in Ch/2\right)$; ce qui entraîne

donc : $$\underbrace{\vec{V}\left(I \in 1/2\right)}_{\underbrace{\vec{V}\left(O \in 1/2\right)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/2}} = \underbrace{\vec{V}\left(J \in 3/2\right)}_{\underbrace{\vec{V}\left(C \in 3/2\right)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{JC} \wedge \vec{\Omega}_{3/2}}$$

. En développant cette dernière expression, nous obtenons : $$\underbrace{\overrightarrow{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/2}}_{-R_1.\vec{v} \wedge \omega_{1/2}.\vec{z}_1} = \underbrace{\overrightarrow{JC} \wedge \vec{\Omega}_{3/2}}_{-R_3.\vec{v} \wedge \omega_{3/2}.\vec{z}_1}$$ et donc

$-R_1.\omega_{1/2}\vec{u} = -R_3.\omega_{3/2}\vec{u}$. En projetant à présent cette expression sur $\vec{u}$, et en utilisant la composition des vitesses, on obtient la relation suivante : $-R_1.\omega_{1/2} = -R_3.\left(\omega_{3/1} + \omega_{1/2}\right)$. Il vient donc : $\boxed{\omega_{2/1} = \omega_{3/1}.\frac{R_3}{R_3 - R_1}}$. On retrouve donc la relation déterminée à la question 1-1. Cette procédure d'étude qui consiste à changer de référence dans l'étude des mouvements peut être très intéressante et peut éviter dans certains cas des lourdeurs dans les démonstrations (ex : Dans l'étude des trains épicycloïdaux on peut prendre le porte-satellite comme référence d'étude. Dans ce cas, l'étude est ramenée à l'étude d'un train simple d'engrenages)

2.3 Pour obtenir le torseur cinématique souhaité, il faut que le vecteur $\vec{\Omega}_{4/1} = \vec{0}$ lors du fonctionnement. Nous pouvons étudier ce dernier vecteur en utilisant la méthode utilisée précédemment qui permet de déduire , en prenant à présent le bras (3) comme référence, la relation entre $\omega_{4/2}$ et $\omega_{3/2}$ (en effet pour la seconde chaîne, la pièce (2) fait office de bâti). D'après l'étude précédente, nous pouvons écrire : $\boxed{\omega_{3/2} = \omega_{4/2}.\frac{R_4}{R_4 - R_2}}$.

Cherchons à présent la relation liant $\omega_{4/1}$ et $\omega_{2/1}$:

Nous avons par composition des vitesses : $\omega_{3/1} + \omega_{1/2} = \left(\omega_{4/1} + \omega_{1/2}\right).\frac{R_4}{R_4 - R_2}$. En utilisant la relation donnée par la première chaîne nous avons : $\frac{R_3 - R_1}{R_3}.\omega_{2/1} = \omega_{3/1}$. En combinant ces deux relations nous obtenons : $\frac{R_3 - R_1}{R_3}.\omega_{2/1} - \omega_{2/1} = \left(\omega_{4/1} - \omega_{2/1}\right).\frac{R_4}{R_4 - R_2}$ et donc

$$\boxed{\omega_{4/1} = \omega_{2/1}.\left(\frac{R_3.R_4 - R_1.R_4 + R_1.R_2}{R_3.R_4}\right)}$$

Cette dernière relation nous permet de dire que $\vec{\Omega}_{4/1} = \vec{0}$ pour $R_3.R_4 - R_1.R_4 + R_1.R_2 = 0$. En utilisant le rapport des rayons $R_1 = 2.R_3$ de la question précédente, on trouve donc un rapport $\boxed{R_4 = 2.R_2}$