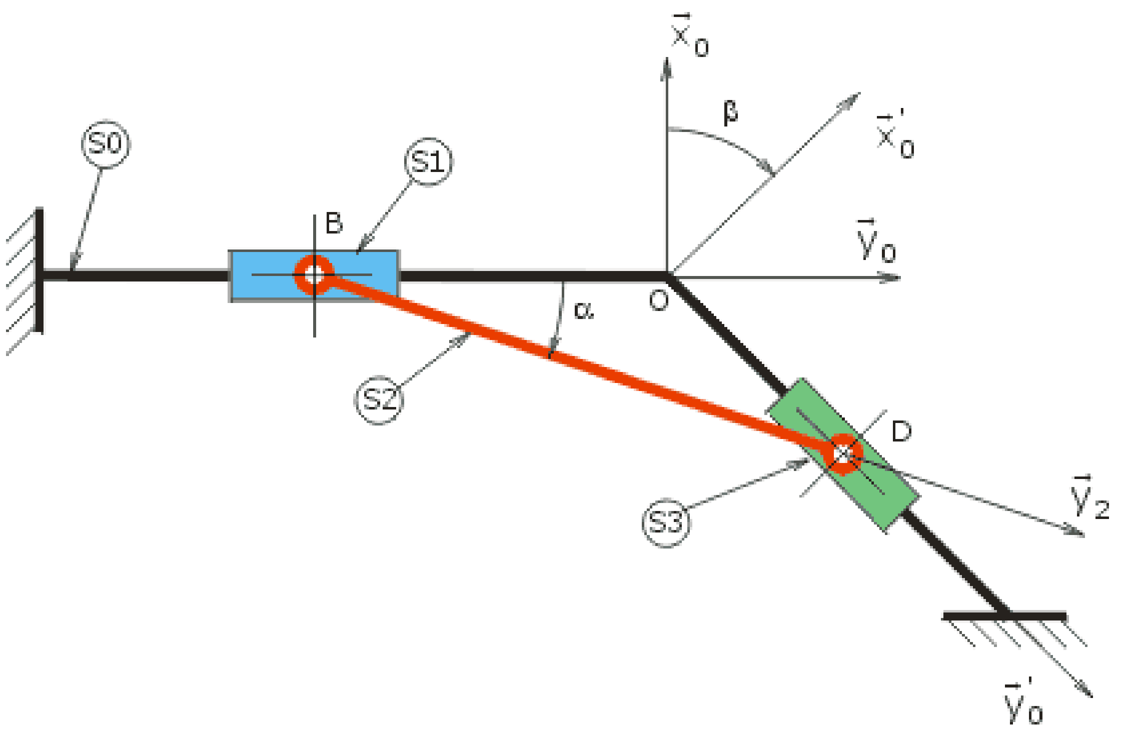
Enoncé

On étudie le mouvement dans le plan $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ d'une chaîne fermée de trois solides rigides SI , S2 , S3 . Le bâti est le solide SO , considéré comme fixe . La liaison entre SO et SI est une glissière prismatique sans frottement de direction fixe $\vec{y}_0$. La liaison entre SO et S3 est une glissière prismatique sans frottement de direction fixe $\vec{y}_0\,'$. La liaison entre SI et S2 est une pivot sans frottement d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec $\alpha = \left(\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_2}\right)$) . La liaison entre S3 et S2 est une pivot sans frottement d'axe $(D, \vec{z}_0)$.

On pose :

$\left\|\overrightarrow{BD}\right\| = l_2 = cte$ $\quad \overrightarrow{OB} = r_1 . \vec{y}_0$ $\quad \overrightarrow{OD} = r_3 . \vec{y}_0\,'$ $\quad \left(\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_0\,'}\right) = \beta$



1 Ecrire l'expression littérale de r_1 et r_3 , en fonction de α , β et l_2

2 On appelle I le centre instantané de rotation de S2 par rapport à SO . On notera x_i et y_i ses coordonnées dans le repère $R(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$: $\overrightarrow{OI} = x_i . \vec{x}_0 + y_i . \vec{y}_0$. Calculer littéralement x_i et y_i en

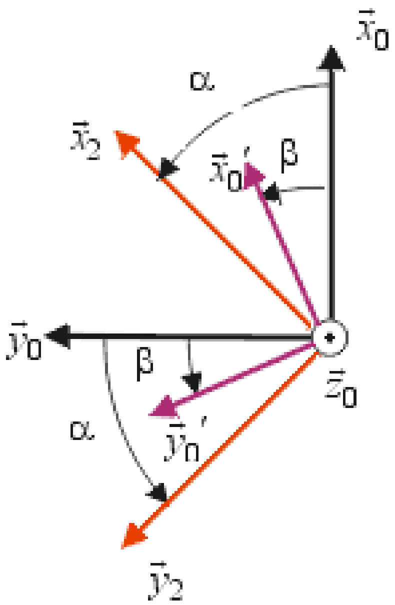
fonction de η_1, η_3 et β. Définir en une phrase, la construction géométrique permet de définir la position du point I.

3 Pour la position particulière $\eta_1 = -a$, $\eta_3 = a$, $\alpha = \alpha_0$ exprimer littéralement : α_0, l_2, x_i et y_i en fonction de a et $\frac{\beta}{2}$. Au voisinage de cette position particulière on pose $\eta_1 = -a + v_1$, $\eta_3 = a + v_3$, $\alpha = \alpha_0 + \theta$. Exprimer les relations littérales linéarisées de v_1 et v_3 en fonction de a, $\frac{\beta}{2}$ et θ

Solution

1 Pour déterminer les expressions de η_1 et de η_3, réalisons la fermeture géométrique :

$\overrightarrow{OO} = \underbrace{\overrightarrow{OD}}_{\eta_3 \cdot \vec{y}_0} + \underbrace{\overrightarrow{DB}}_{-l_2 \cdot \vec{y}_2} + \underbrace{\overrightarrow{BO}}_{-\eta_1 \cdot \vec{y}_0} = \vec{0}$ A partir des figures planes :



Nous obtenons en projection :

$$/\vec{x}_0 \quad 0 = r_3.\vec{y}_0'.\vec{x}_0 - l_2.\vec{y}_2.\vec{x}_0$$

$$0 = -r_3.\sin\beta + l_2.\sin\alpha \qquad (1)$$

$$/\vec{y}_0 \quad 0 = r_3.\vec{y}_0'.\vec{y}_0 - l_2.\vec{y}_2.\vec{y}_0 - r_1$$

$$0 = r_3.\cos\beta - l_2.\cos\alpha - r_1 \qquad (2)$$

2 Pour déterminer la position du CIR de S2/S0, utilisons la relation du cours qui permet à partir de la connaissance en un point quelconque des éléments de réduction du torseur cinématique S2/S0 de connaître la position du CIR I . En connaissant par exemple en B, le torseur

$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{V}(B \in 2/0) \end{Bmatrix}$, nous avons :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{\vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{V}(B \in 2/0)}{\left\|\vec{\Omega}_{2/0}\right\|^2} = \frac{\dot{\alpha}.\vec{z}_0 \wedge \dot{r}_1.\vec{y}_0}{\dot{\alpha}^2} = -\frac{\dot{r}_1}{\dot{\alpha}}.\vec{x}_0$$

D'après la relation (1) nous avons par dérivation : $\dot{r}_3.\sin\beta = l_2.\dot{\alpha}.\cos\alpha$

D'après la relation (2) nous avons par dérivation : $\dot{r}_3.\cos\beta = \dot{r}_1 - l_2.\dot{\alpha}.\sin\alpha$

En divisant terme à terme les deux relations précédentes nous obtenons :

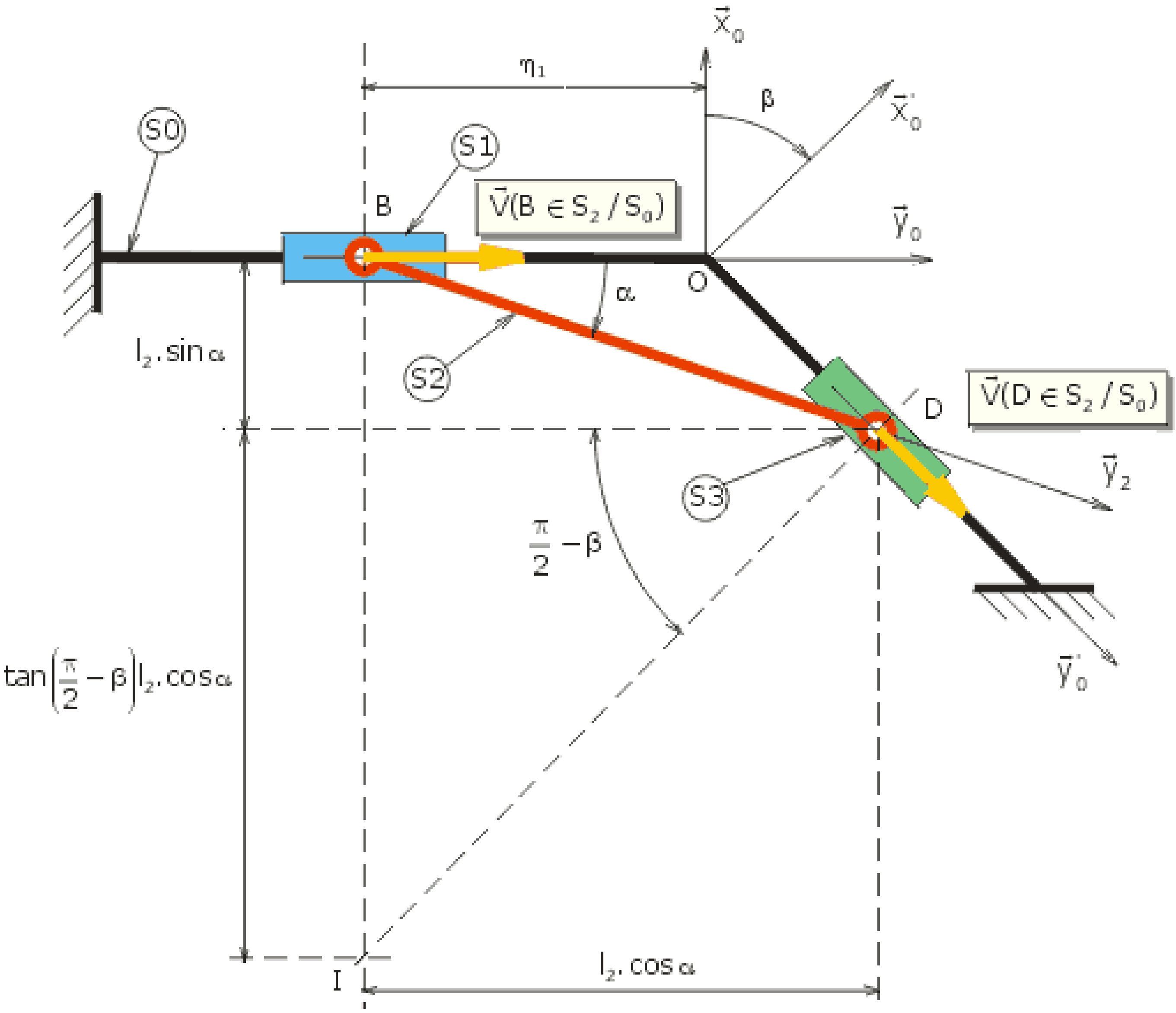
$\tan\beta = \dfrac{l_2.\dot{\alpha}.\cos\alpha}{\dot{\eta}_1 - l_2.\dot{\alpha}.\sin\alpha}$. A partir de cette relation nous pouvons écrire :

$\dot{\eta}_1 = l_2.\dot{\alpha}\left(\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\tan\beta}\right)$. Cette dernière relation permet de déterminer entièrement la position du CIR I avec $\overrightarrow{BI} = -l_2.\left(\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\tan\beta}\right).\vec{x}_0$. Les coordonnées du CIR I dans le repère $R\left(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)$ seront :

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} = \eta_1.\vec{y}_0 - l_2.\left(\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\tan\beta}\right).\vec{x}_0 = x_i.\vec{x}_0 + y_i.\vec{y}_0$ et l'on déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{OI}\left|\begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} -l_2.\left(\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\tan\beta}\right) \\ \eta_1 \end{matrix}\right.}$$

Par construction graphique, remarquons que $\vec{V}\left(B \in S2/S0\right)$ est orientée par $\vec{y}_0$ et que $\vec{V}\left(D \in S2/S0\right)$ est orientée par $\vec{y}_0\,'$. Le CIR I est à l'intersection des perpendiculaires abaissées aux points B et D aux vitesses $\vec{V}\left(B \in S2/S0\right)$ et $\vec{V}\left(D \in S2/S0\right)$.



3 Pour la position particulière $\eta_1 = -a$, $\eta_3 = a$, $\alpha = \alpha_0$, à partir des relations (1) et (2) nous obtenons :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_0 = \frac{a}{l_2}\sin\beta$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha_0 = \frac{a.\cos\beta + a}{l_2}$$

On déduit donc :

$\tan\alpha_0 = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta + 1} = \tan\dfrac{\beta}{2}$ ce qui nous donne donc $\boxed{\alpha_0 = \dfrac{\beta}{2}}$

Dans le triangle quelconque (O, B, D) nous avons

$(l_2)^2 = a^2 + a^2 - 2.a^2.\underbrace{\cos(\pi - \beta)}_{-\cos\beta} = 2.a^2 + 2.a^2 \cos\beta$. La longueur l_2 est telle que

$$\boxed{l_2 = \sqrt{2.a^2.\left(1+\cos 2.\frac{\beta}{2}\right)} = 2.a.\cos\frac{\beta}{2}}$$

A partir des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OI}$ trouvées précédemment, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OI}\left|\begin{array}{l} x_i \\ y_i \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} -\sqrt{2.a^2.\left(1+\cos 2.\frac{\beta}{2}\right)}.\left(\sin\frac{\beta}{2} + \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\tan 2.\frac{\beta}{2}}\right) \\ -a \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} -\frac{a}{\tan\frac{\beta}{2}} \\ -a \end{array}\right.}$$

Pour exprimer les relations littérales linéarisées de ν_1 et ν_3 en fonction de a , $\frac{\beta}{2}$ et θ , différentions les relations (1) et (2) :

$$\left|\begin{array}{lll} (1) & \rightarrow & \sin\beta.d\eta_3 = l_2.\cos\alpha.d\alpha \\ (2) & \rightarrow & cos\beta.d\eta_3 = -l_2.\sin\alpha d\,\alpha + d\eta_1 \end{array}\right.$$

En posant alors $d\alpha = \theta$ avec θ petit, on assimile la variation des fonctions η_1 et η_3 respectivement aux différentielles $\alpha = \alpha_0$ et $d\eta_3 = \nu_3$. Les équations précédentes deviennent alors :

$$\left|\begin{array}{r} \sin\beta.\nu_3 = l_2.\cos\alpha.\theta \\ cos\beta.\nu_3 = -l_2.\sin\alpha.\theta + \nu_1 \end{array}\right.$$

En utilisant alors le fait que pour $\alpha = \alpha_0$ nous avons $l_2 = 2.a.\cos\frac{\beta}{2}$ et $\alpha_0 = \frac{\beta}{2}$, nous déduisons les expressions de ν_1 et ν_3 :

$$\left|\begin{array}{l} 2.\cos\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\nu_3 = 2.a\cos^2\frac{\beta}{2}.\theta \\ cos\beta.\nu_3 + 2.a.\cos\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\theta = \nu_1 \end{array}\right.$$

On obtient alors les expressions linéarisées autour de la position $\alpha = \alpha_0$: $\left| \begin{array}{l} v_3 = \dfrac{a.\theta}{\tan \dfrac{\beta}{2}} \\ v_1 = \dfrac{a.\theta}{\tan \dfrac{\beta}{2}} \end{array} \right.$ #