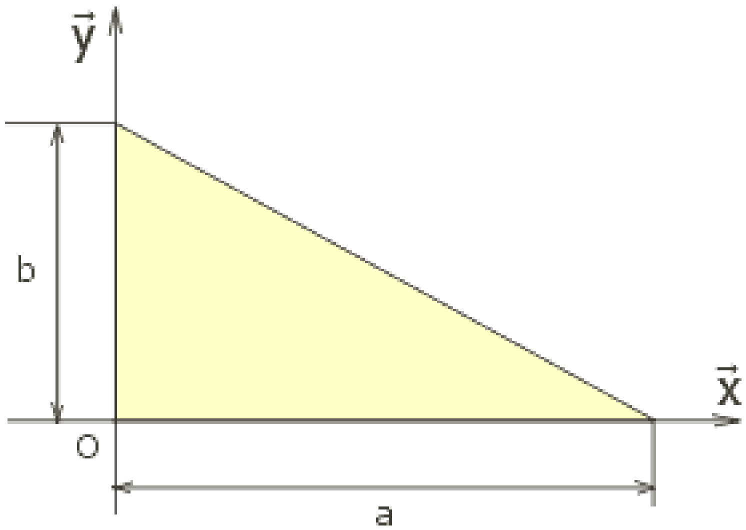
Enoncé

Considérons un triangle rectangle de cotés de longueurs a et b

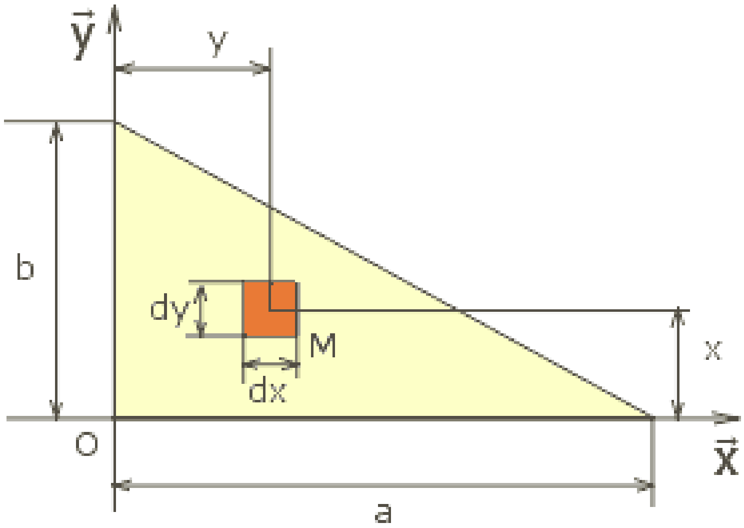


1 Déterminer les coordonnées du centre de gravité de ce triangle dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y})$.

Solution

1 La position du centre de gravité est donnée par $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \iint \overrightarrow{OM}\, ds$. En explicitant les différents composants de cette relation, nous avons :

$$\left|\begin{array}{l} S = \frac{1}{2}.a.b \\ \overrightarrow{OM} = x.\vec{x} + y.\vec{y} \\ ds = dx.dy \end{array}\right.$$



L'expression du vecteur $\overrightarrow{OG}$ devient alors : $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{a.b}.\int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}.x+b} (x.\vec{x} + y.\vec{y}).dy.dx$.

* En intégrant par rapport à y nous obtenons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{a.b}.\int_0^a \left[x.y.\vec{x} + \frac{1}{2}y^2\vec{y} \right]_0^{-\frac{b}{a}.x+b} .dx \;=\; \frac{2}{a.b}.\int_0^a \left(x.\left(-\frac{b}{a}.x+b\right).\vec{x} + \frac{1}{2}.\left(-\frac{b}{a}.x+b\right)^2 \vec{y} \right).dx$$

* En intégrant à présent par rapport à x nous obtenons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{a.b}.\left[\left(-\frac{b}{3.a}.x^3 + \frac{b}{2}.x^2\right).\vec{x} - \frac{a}{2.3.b}.\left(-\frac{b}{a}.x+b\right)^3.\vec{y} \right]_0^a$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{a.b}.\left(\left(-\frac{b}{3.a}.a^3 + \frac{b}{2}.a^2\right).\vec{x} - \frac{a}{2.3.b}.\left(-\frac{b}{a}.a+b\right)^3.\vec{y} - \left(-\frac{a}{2.3.b}.\left(-\frac{b}{a}.0+b\right)^3.\vec{y} \right) \right)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{a.b}.\left(\frac{b.a^2}{6}.\vec{x} - \underbrace{\frac{a}{2.3b}.\left(-\frac{b}{a}.a+b\right)^3}_{0}.\vec{y} + \frac{a.b^2}{6}.\vec{y}\right)$$

On a donc : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{a}{3}.\vec{x} + \frac{b}{3}.\vec{y}}$