

# Mouvement dans un puits de potentiel

17

L'objet de ce chapitre est l'étude des mouvements dans un puits de potentiel, que l'on va définir. On y applique les résultats établis dans les chapitres précédents.

## 1 Mouvement conservatif dans un puits de potentiel

On définit un **puits de potentiel** comme une zone de l'espace qui entoure une position d'équilibre stable. On rappelle qu'en une telle position, l'énergie potentielle admet un minimum. Un puits de potentiel est donc une zone entourant un minimum d'énergie potentielle. Dans toute cette partie, on considère des mouvements pour lesquels les seules forces qui travaillent sont conservatives. On néglige ainsi systématiquement les forces de frottement.

### 1.1 Mouvement dans un puits de potentiel harmonique

On considère un objet modélisé par un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplaçant sur un axe  $(Ox)$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. Cet objet se déplace dans un puits de potentiel harmonique de la forme :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

On néglige toute force non conservative et notamment tout frottement. Les conditions initiales sont les suivantes : à l'instant  $t = 0$ , le mobile passe par le point d'abscisse  $x = x_0$  avec une vitesse  $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$ .

#### Remarque

Cette situation est un cas d'école auquel on peut très fréquemment se ramener.

Le point  $M$  n'est soumis qu'à des forces conservatives dont la résultante dérive de  $E_p(x)$ . Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à  $M$  stipule donc que l'énergie mécanique du système est une intégrale première du mouvement :

$$E_m = \text{constante.}$$

Le mouvement de  $M$  a lieu sur l'axe  $(Ox)$ . Le point  $M$  est repéré par son vecteur position  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$  et sa vitesse vaut  $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ . L'équation du mouvement donnée par la conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante},$$

et on peut déterminer cette constante à l'instant initial :  $E_m(t = 0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = E_{m_0}$ .

### a) Graphe énergétique

On peut alors tracer le graphe énergétique de ce mouvement en faisant apparaître l'énergie mécanique  $E_{m_0}$ . La courbe d'énergie potentielle est une parabole et la position  $x = 0$  est un minimum d'énergie potentielle. Il s'agit donc d'une position d'équilibre stable. L'ensemble des positions accessibles vérifie  $E_{m_0} > E_p(x)$ . C'est un segment  $[-X_m, X_m]$  symétrique par rapport à la position d'équilibre. La trajectoire est une trajectoire liée et le mobile  $M$  oscille périodiquement avec une amplitude  $X_m$  autour de sa position d'équilibre.

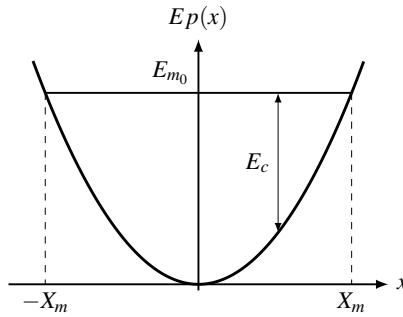


Figure 17.1 – Potentiel harmonique.

Pour le mouvement d'énergie mécanique  $E_{m_0}$ , le point  $x = X_m$  est un point où l'énergie cinétique  $E_c$  s'annule. C'est donc un point de vitesse nulle et  $X_m$  vérifie :

$$E_p(x = X_m) = \frac{1}{2}kX_m^2 = E_{m_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \quad \implies \quad X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}.$$

### b) Trajectoire de phase

On peut alors réécrire l'équation du mouvement en introduisant l'amplitude  $X_m$  :

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kX_m^2$$

puis divisant cette équation par  $\frac{1}{2}k$  et en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  :

$$\omega_0^2 x^2 + \dot{x}^2 = \omega_0^2 X_m^2. \quad \iff \quad \frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\omega_0 X_m)^2} = 1.$$

On reconnaît l'équation cartésienne d'une ellipse du plan de phase  $(x, \dot{x})$  dont la forme générale est décrite dans l'appendice mathématique :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{b^2} = 1,$$

avec ici  $a = X_m$  et  $b = \omega_0 X_m$ . La trajectoire de phase d'un mouvement harmonique est une ellipse.

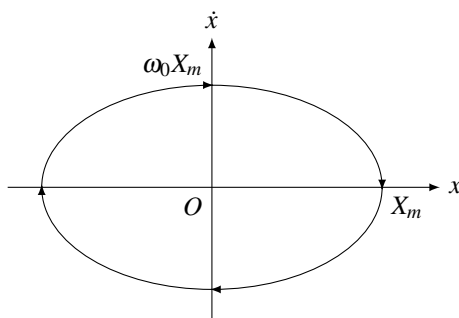


Figure 17.2 – Trajectoire de phase du mouvement de  $M$ .

La trajectoire de phase est une courbe fermée. Le mouvement est donc périodique. Par ailleurs, l'amplitude est nécessairement égale à  $X_m$ .

### c) Équation horaire du mouvement

L'équation énergétique du mouvement  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$  a déjà été étudiée dans le chapitre sur l'oscillateur harmonique. On obtient l'équation du mouvement en la dérivant par rapport au temps. On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et elle se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

C'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Les solutions de cette équation ont été étudiées en détail au chapitre sur l'oscillateur harmonique. Elles présentent des oscillations sinusoïdales de pulsation  $\omega_0$  que l'on écrit :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

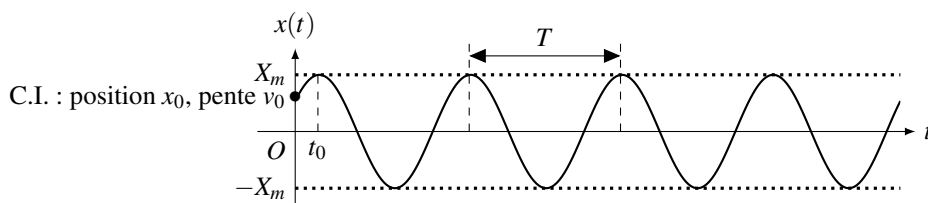


Figure 17.3 – Évolution temporelle de la position  $x$  du mobile.

À l'aide des conditions initiales, on trouve les expressions de  $X_m$  et de  $\varphi_0$  :

$$X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{et} \quad \varphi_0 \text{ vérifie } \begin{cases} \cos \varphi_0 = \frac{x_0}{X_m} \\ \sin \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 X_m}. \end{cases}$$

Le mouvement de  $M$  présente des oscillations sinusoïdales de période  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ , d'amplitude  $X_m$  et de phase à l'origine  $\varphi_0$ . La figure 17.3 représente l'évolution de son abscisse  $x(t)$  au cours du temps.

Dans un puits de potentiel harmonique  $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ , un mobile de masse  $m$  est animé d'oscillations sinusoïdales dont la période  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  ne dépend pas de l'amplitude. On parle d'**isochronisme** des oscillations.

## 1.2 Mouvement dans un puits de potentiel quelconque

### a) Mouvement de faible amplitude au voisinage d'une position d'équilibre stable

On considère une particule ponctuelle de masse  $m$  soumise à la seule force  $\vec{F}$  conservative dirigée selon le vecteur  $\vec{u}_x$  et ne dépendant que de  $x$ . Cette force dérive de l'énergie potentielle  $E_p$  ne dépendant que d'un paramètre de position  $x$ . On a établi dans le chapitre précédent :

$$\vec{F} = F_x(x)\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad F_x(x) = -\frac{dE_p}{dx}.$$

On a également établi qu'en un point d'équilibre stable d'abscisse  $x_{\text{eq}}$ , la force  $\vec{F}$  s'annule et l'énergie potentielle admet un minimum. Dans le cas où  $E_p(x)$  est deux fois dérivable et où sa dérivée seconde n'est pas nulle en  $x = x_{\text{eq}}$ , on en a déduit que :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{\text{eq}}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{\text{eq}}} > 0.$$

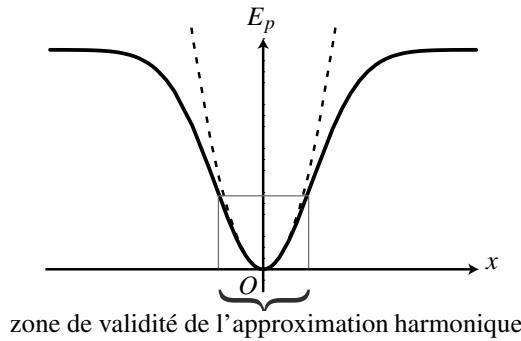
Même si la force  $\vec{F}$  n'est pas une force de rappel élastique, on va montrer que, sous réserve de ne pas trop s'éloigner de la position d'équilibre stable d'abscisse  $x_{\text{eq}}$ , on peut assimiler le mouvement du mobile au mouvement obtenu dans un puits de potentiel harmonique.

Graphiquement, cette approximation revient à assimiler l'énergie potentielle tracée en trait plein sur la figure 17.4 au potentiel harmonique tangent de forme parabolique tracé en pointillés sur la même figure. Il est visible que cette approximation n'est valable qu'au voisinage du minimum d'énergie potentielle.

Analytiquement, on peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre stable  $x_{\text{eq}}$  :

$$E_p(x) = E_p(x_{\text{eq}}) + (x - x_{\text{eq}}) \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{\text{eq}}} + \frac{(x - x_{\text{eq}})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{\text{eq}}}. \quad (17.1)$$

Le fait d'effectuer un développement limité restreint la validité de l'étude qui en découle à de faibles écarts à la position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$ .



**Figure 17.4** – Puits de potentiel (trait plein) et son approximation harmonique valable au voisinage du minimum d'énergie potentielle (en pointillé).

En utilisant le fait que  $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{\text{eq}}} = 0$ , en notant  $k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{\text{eq}}} > 0$  et en restant au voisinage de  $x_{\text{eq}}$ , l'équation (17.1) permet d'assimiler la fonction  $E_p(x)$  à une parabole d'équation :

$$E_p(x) = E_p(x_{\text{eq}}) + k \frac{(x - x_{\text{eq}})^2}{2}.$$

L'énergie potentielle étant définie à une constante près, il est toujours possible de choisir la référence des énergies potentielles en  $x = x_{\text{eq}}$  pour fixer  $E_p(x_{\text{eq}}) = 0$ . En posant  $X = x - x_{\text{eq}}$ , ce qui revient à décaler l'origine de l'axe des  $x$  à la position d'équilibre, on peut ensuite réécrire l'énergie potentielle sous la forme :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kX^2.$$

On peut assimiler le potentiel au voisinage de la position  $x_{\text{eq}}$  à un potentiel harmonique de constante de rappel élastique  $k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{\text{eq}}}$ . On est alors ramené au cas d'école du paragraphe précédent.

Les mouvements de faibles amplitudes au voisinage d'une position d'équilibre stable peuvent être assimilés à des mouvements d'oscillations harmoniques centrées sur la position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$  et de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  où la constante de rappel élastique  $k$  est donnée par la relation :

$$k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{\text{eq}}}.$$

## b) Mouvements de grande amplitude dans un puits de potentiel quelconque

On a vu dans le paragraphe précédent que les mouvements de faible amplitude au voisinage d'une position d'équilibre stable peuvent être modélisés par des mouvements dans un puits de

potentiel harmonique. On se pose ici la question de savoir ce qui change lorsque l'amplitude des oscillations est trop grande pour pouvoir réaliser cette approximation.

On rappelle les caractéristiques essentielles du mouvement harmonique : il s'agit d'oscillations périodiques, de forme sinusoïdale et de période indépendante de l'amplitude. On va montrer que, lorsque la forme du potentiel n'est plus harmonique, le mouvement est toujours constitué d'oscillations, mais que ces oscillations ne sont ni sinusoïdales, ni isochrones.

Pour visualiser ces changements, on trace les solutions, obtenues par résolution numérique, des mouvements de grande amplitude dans le puits de potentiel de la figure 17.4. Ce puits est de la forme :

$$E_p(x) = E_0 \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right) \right),$$

ce qui fournit une échelle d'énergie  $E_0$  qui caractérise la profondeur du puits de potentiel et une échelle de longueur  $L$  qui caractérise sa largeur. Pour un mobile de masse  $m$ , on trouve

alors une échelle de vitesse  $v_0 = \sqrt{\frac{E_0}{m}}$  puisqu'une énergie est égale au produit d'une masse par une vitesse au carré. On en déduit une échelle de temps  $t_0 = \frac{L}{v_0} = L\sqrt{\frac{m}{E_0}}$ .

On peut alors écrire l'équation du mouvement en appliquant le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe ( $Ox$ ) :

$$\frac{d(m\dot{x})}{dt} = -\frac{dE_p}{dx} = -E_0 \frac{2x}{L^2} \exp \left( - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right).$$

On introduit les grandeurs adimensionnées  $x^* = \frac{x}{L}$  et  $t^* = \frac{t}{t_0}$  et on obtient l'équation différentielle du mouvement adimensionnée :

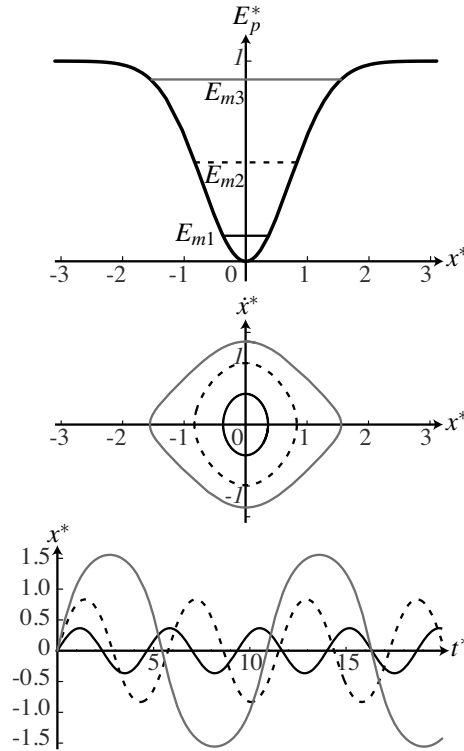
$$\frac{mL}{t_0^2} \frac{d^2(x^*)}{dt^{*2}} = -\frac{2E_0}{L} x^* \exp(-x^{*2}) \iff \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = -2x^* \exp(-x^{*2})$$

que l'on peut résoudre numériquement. Les courbes de la figure 17.5 sont établies avec comme condition initiale :  $x(t=0) = 0$  et  $\dot{x}(t=0) > 0$ .

Les courbes en trait plein noir correspondent à l'énergie mécanique  $E_{m1}$  faible. Le mouvement est alors de faible amplitude et quasi-sinusoidal de période  $T^* \simeq 4,5$ . Les courbes en trait pointillé correspondent à une énergie mécanique  $E_{m2}$  plus importante. L'amplitude et la période du mouvement augmentent toutes les deux. La période atteint  $T^* \simeq 5,8$ . Les courbes en trait plein gris correspondent à l'énergie mécanique  $E_{m3}$  encore plus grande. L'amplitude et la période augmentent encore. La période atteint  $T^* \simeq 10,9$ . La trajectoire de phase n'est clairement plus elliptique.

On peut noter que, dans l'approximation harmonique, les mouvements de faible amplitude sont sinusoïdaux de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  où  $k = \left( \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x=0} = 2\frac{E_0}{L^2} = 2\frac{m}{t_0^2}$  soit  $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{t_0}$ .

La période  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{2}\pi t_0$  correspond alors à  $T^* = \sqrt{2}\pi \simeq 4,5$ .



**Figure 17.5** – Mouvement dans un potentiel non harmonique pour trois énergies mécaniques différentes.

On remarque l'évolution de la période des oscillations avec l'amplitude, ce qui prouve que l'isochronisme des oscillations n'est pas vérifié par les mouvements de grande amplitude. Par ailleurs, la forme des oscillations évolue également, ce qui est particulièrement visible sur les trajectoires de phase. Les oscillations de grande amplitude ne sont plus sinusoïdales.

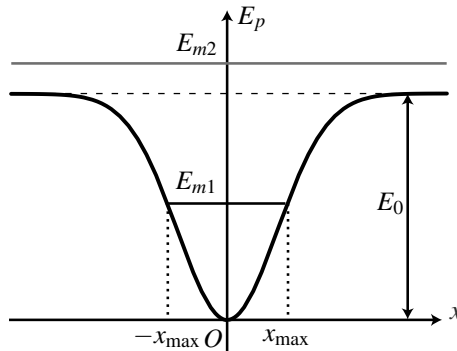
La présence de mouvements d'oscillations sinusoïdales isochrones est une signature des mouvements dans des potentiels rigoureusement ou quasiment harmoniques.

### c) Condition de sortie d'un puits de potentiel

On se pose maintenant la question de savoir quelle énergie il est nécessaire de procurer au mobile pour qu'il puisse sortir d'un puits de potentiel. La réponse est directement issue du théorème de l'énergie mécanique et du signe positif de l'énergie cinétique :

$$E_m = E_p + E_c \geq E_p.$$

Pour que le mobile puisse accéder à tous les points, il faut donc que son énergie mécanique dépasse la plus haute valeur de l'énergie potentielle. Pour franchir une barrière de potentiel de profondeur  $E_0$ , il doit donc avoir une énergie mécanique supérieure à  $E_0$  (voir figure 17.6).



**Figure 17.6** – Puits de potentiel. Avec l'énergie mécanique  $E_{m1}$ , le mobile est confiné entre les abscisses  $x_{\max}$  et  $-x_{\max}$ . Avec l'énergie mécanique  $E_{m2}$ , il peut sortir du puits et accéder à l'ensemble des positions.

## 2 Mouvements dans un puits de potentiel : influence des frottements

Dans la partie précédente, on n'a pas tenu compte des forces de frottement. Or les frottements existent toujours mais se font plus ou moins ressentir. On s'intéresse ici au cas où on peut les modéliser par une force proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}.$$

On restreint l'étude aux mouvements dans un puits de potentiel harmonique pour lequel la résolution analytique est possible. On peut envisager d'autres formes de potentiels mais il faudra alors chercher des solutions numériques.

### 2.1 Équation différentielle du mouvement

On reprend le puits de potentiel harmonique étudié au paragraphe 1. L'énergie mécanique du système vaut alors  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ . Le mouvement est à un seul degré de liberté et on le résout à l'aide du théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{NC}), \quad (17.2)$$

où  $\mathcal{P}(\vec{f}_{NC})$  est la puissance des forces non conservatives, c'est-à-dire ici des frottements fluides. On calcule alors :

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x},$$

et

$$\mathcal{P}(\vec{f}_{NC}) = \mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda \vec{v} \cdot \vec{v} = -\lambda \dot{x}^2,$$

que l'on remplace dans l'équation (17.2) pour aboutir à  $m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = -\lambda \dot{x}^2$ . On simplifie ensuite par  $\dot{x}$  qui correspond à un point  $M$  immobile à tout instant et l'équation différentielle



du mouvement devient :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti.

On a déjà rencontré ce type d'équation différentielle lors de l'étude du régime libre du circuit *RLC* série dans le chapitre *Circuit linéaire du second ordre*. La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur vérifiait alors l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0,$$

et on l'avait écrite sous forme canonique :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2u_C = 0.$$

On va procéder de même ici.

En pratique, les phénomènes oscillatoires sont présents dans divers domaines de la physique et il arrive souvent que l'on puisse les modéliser par une équation différentielle du type oscillateur amorti. Lorsque c'est le cas, le modèle étant identique, ses prévisions seront analogues à celles que l'on a établi dans le chapitre *Circuit linéaire du second ordre*. Tous les phénomènes étudiés en électricité (existence de trois régimes transitoires dépendant de l'importance de la dissipation, phénomène de résonance, etc. . .) peuvent alors exister de manière analogue. On étudie ici l'influence des frottements sur la nature des régimes libres observés.

## 2.2 Équation caractéristique et observation

### a) Équation caractéristique

L'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

peut être écrite sous une forme dite canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (17.3)$$

ce qui revient à introduire la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  tels que :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda} \end{cases}.$$

On utilise cette notation dans toute la suite mais d'autres écritures peuvent être adoptées. On peut notamment utiliser la forme canonique suivante :

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_0^2} + 2\xi\frac{\dot{x}}{\omega_0} + x = 0,$$

ce qui revient à utiliser  $\omega_0$  et un facteur d'amortissement  $\xi$  relié à  $Q$  par la relation :  $\xi = \frac{1}{2Q}$ .

**b) Observation de régimes différents selon la valeur de  $Q$**

La figure 17.7 illustre les différents comportements adoptés par le système en fonction de la valeur du facteur de qualité  $Q$ . Pour ces graphiques, on a choisi  $x(t = 0) = x_0$  et  $\dot{x}(t = 0) = 0$  comme conditions initiales. On étudie donc le **régime libre** de l'oscillateur amorti qui, éloigné d'une distance  $x_0$  de sa position d'équilibre, y retourne librement. On se sert de  $x_0$  pour définir une longueur sans dimension  $x^* = \frac{x}{x_0}$  et de la période propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  pour définir un temps sans dimension  $t^* = \frac{t}{T_0}$ . La vitesse sans dimension est alors  $\dot{x}^* = \frac{dx^*}{dt^*} = \dot{x} \frac{T_0}{x_0}$ . Enfin, on définit l'énergie mécanique initiale  $E_0$  comme échelle d'énergie et on trace  $E_c^* = \frac{E_c}{E_0}$  et  $E_p^* = \frac{E_p}{E_0}$ . On distingue :

- un cas où l'on observe des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps appelé **régime pseudo-périodique** ;
- un cas où l'on n'observe pas d'oscillations appelé **régime aperiodique**.

Un cas limite appelé **régime critique** sépare les deux cas précédents. Il n'est pas représenté mais ressemble fortement au régime aperiodique.

**2.3 Résolution : les trois régimes**

La méthode de résolution de l'équation différentielle (17.3) est détaillée dans l'annexe mathématique et a été pratiquée en électricité. On introduit l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0, \quad \text{de discriminant } \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = (2\omega_0)^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right).$$

On distingue plusieurs types de solutions suivant le signe du discriminant.

**a) Régime pseudo-périodique**

Il s'agit du cas où le discriminant est négatif :

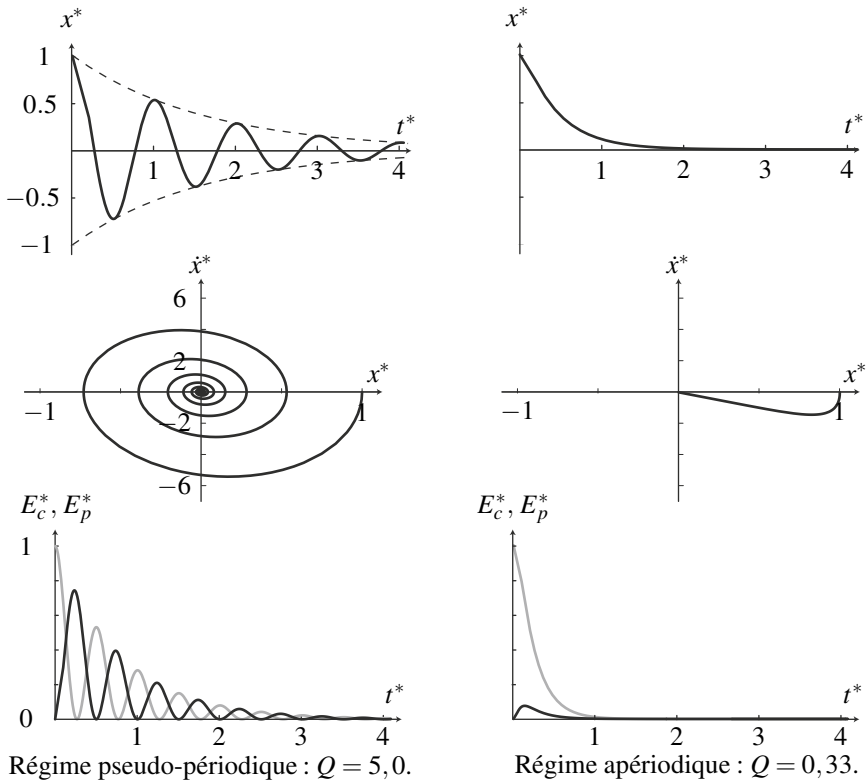
$$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{2\sqrt{km}}.$$

Cela correspond donc au cas où le frottement défini grâce au coefficient  $\lambda$  est faible. On peut noter que l'oscillateur harmonique correspond à la limite  $\lambda = 0$ . Les deux racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :

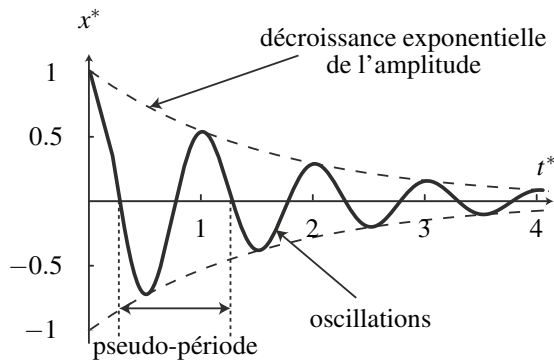
$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega,$$

et la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$x(t) = X_m \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \cos(\omega t + \varphi_0),$$



**Figure 17.7** – Différents comportements du système. De haut en bas : évolution temporelle de  $x^*$ , trajectoire de phase et évolution temporelle des énergies cinétiques (courbe noire) et potentielle (courbe grise).



**Figure 17.8** – Régime pseudo-périodique.  $Q = 5,0$ ;  $x^*(t = 0) = 1$  et  $\dot{x}^*(t = 0) = 0$ .

où  $(X_m, \varphi_0)$  sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

La solution que l'on a représenté sur la figure 17.8 est le produit d'une fonction d'amplitude :  $A(t) = X_m \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$  qui diminue au cours du temps, par un terme d'oscillations sinusoïdales :  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ . Elle correspond à des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps. Cela justifie l'appellation de **régime pseudo-périodique** donnée à ce type de solutions. L'amplitude  $A(t)$  des oscillations décroît de façon exponentielle avec un temps caractéristique  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ .

Pour caractériser les oscillations d'amplitude décroissante, on définit deux grandeurs : la **pseudo-période** et le **décroissement logarithmique**.

**La pseudo-période** Elle caractérise la durée d'une oscillation et mesure la période du terme oscillant  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  qui vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

$\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < 1$  donc  $T > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$  où  $T_0$  est la période de l'oscillateur harmonique associé ou période propre. La pseudo-période est un peu plus longue que la période propre.

**Le décroissement logarithmique** Il caractérise l'amortissement des oscillations et mesure la diminution de leur amplitude pendant une pseudo-période :

$$\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}T\right)}\right) = \frac{\omega_0}{2Q}T = \frac{\pi}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

**Cas d'un amortissement faible** Dans le cas d'un amortissement faible, caractérisé par la présence de nombreuses oscillations avant l'arrêt du mobile,  $Q \gg 1$ . On obtient alors :

$$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 \quad \text{et} \quad \delta \simeq \frac{\pi}{Q}$$

La mesure de la pseudo-période  $T$  et du décroissement logarithmique  $\delta$  donne directement accès à la pulsation propre  $\omega_0$  et au facteur de qualité  $Q$ . Les paramètres de l'équation différentielle sont donc immédiatement accessibles à la mesure.

À la limite où il n'y a pas de frottement, la période est rigoureusement égale à la période propre ( $T = T_0$ ) et l'amplitude des oscillations est constante ( $\delta = 0$ ), ce qui est cohérent.

**Évaluation rapide du facteur de qualité** L'amplitude des oscillations décroît de façon exponentielle avec un temps caractéristique  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ . Lorsque le facteur de qualité  $Q$  est suffisam-

ment grand (en pratique supérieur à 3), le nombre d'oscillations observables correspond approximativement à  $Q \pm 1$ . En effet, pour  $Q$  grand, la durée d'une oscillation vaut  $T \simeq T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Après  $Q$  oscillations, il s'est donc écoulé le temps  $\Delta t = Q \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \frac{2Q}{\omega_0}$  et l'amplitude  $A(t)$  est réduite à  $\exp(-\pi) \simeq 4.10^{-2}$  fois sa valeur initiale. Si l'amplitude initiale représente 5 cm, l'amplitude vaut 2 mm après  $Q$  oscillations. L'amplitude des oscillations suivantes est encore plus petite ce qui les rend difficiles à voir.

### Remarque

Un oscillateur de bonne qualité présente un grand nombre d'oscillations avant de s'arrêter. Son facteur de qualité est grand.

## b) Régime aperiodique

Il s'agit du cas où le discriminant est positif :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{2\sqrt{km}}.$$

Cela correspond donc au cas où le frottement défini grâce au coefficient  $\lambda$  est fort. L'équation caractéristique admet alors deux racines réelles :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}.$$

Comme  $\frac{\omega_0}{2Q} > \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$ , les deux racines sont négatives et la solution de l'équation différentielle :

$$x(t) = X_+ \exp(r_+ t) + X_- \exp(r_- t)$$

est la somme de deux exponentielles décroissantes. L'amplitude diminue au cours du temps sans que n'apparaissent d'oscillations. Cela correspond bien à ce que l'on observe sur la figure 17.9 et justifie l'appellation **régime aperiodique** donnée à ce type de solutions.

## c) Régime critique

Ce régime est un cas limite qui sépare les deux cas précédents. Il correspond à  $\Delta = 0$  soit  $Q = \frac{1}{2}$ . L'équation caractéristique admet la racine double  $r = -\omega_0$  et la solution s'écrit :

$$x(t) = (\lambda t + \mu) \exp(-\omega_0 t),$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

L'allure est la même que pour le régime aperiodique et on n'observe pas d'oscillations.

### 2.4 Évaluation rapide de la durée des différents régimes

La valeur d'une exponentielle décroissante de la forme  $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  de temps caractéristique  $\tau$  est réduite à 1% de sa valeur initiale après une durée  $\Delta t = -\tau \ln\left(\frac{1}{100}\right) \simeq 4,6\tau$ .

- pour le régime pseudo-périodique, les oscillations voient leur amplitude décroître de façon exponentielle avec un temps caractéristique  $\tau_1 = \frac{2Q}{\omega_0}$ . L'amplitude est réduite à 1% de sa valeur initiale au bout d'une durée  $\Delta t_1 = 4,6\frac{2Q}{\omega_0}$  ;
- pour le régime apériodique, les deux termes décroissent de façon exponentielle avec des temps caractéristiques  $-\frac{1}{r_+}$  et  $-\frac{1}{r_-}$ . La décroissance est limitée par le terme qui possède la plus grande constante de temps, à savoir  $\tau_2 = -\frac{1}{r_+} = \frac{2Q}{\omega_0} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}$ . Ce terme est réduit à 1% de sa valeur initiale au bout d'une durée  $\Delta t_2 = 4,6\tau_2$  ;
- pour le régime critique, la solution comporte un terme exponentiel de temps caractéristique  $\tau_3 = \frac{1}{\omega_0}$ . Il est réduit à 1% de sa valeur initiale au bout d'une durée  $\Delta t_3 = 4,6\tau_3$  ;

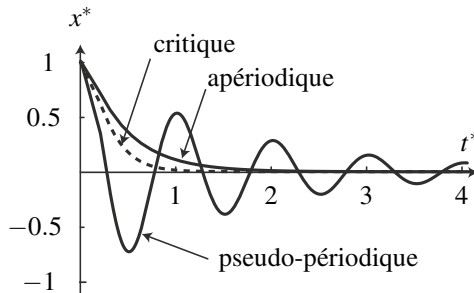


Figure 17.9 – Comparaison des durées des trois régimes.

On peut voir sur la figure 17.9 que, pour une période propre donnée, le régime critique est celui pour lequel le retour en  $x = 0$  sans oscillations est le plus rapide. On cherche donc à se rapprocher de ce cas lorsque l'on veut que le système revienne rapidement à l'équilibre. Cette propriété est expliquée par les inégalités suivantes :

$$\tau_3 < \tau_1 \text{ pour } Q > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \tau_3 < \tau_2 \text{ pour } Q < \frac{1}{2}.$$

Il faut noter qu'on a raisonné ici uniquement sur l'amplitude de la solution pseudo-périodique. Quand on étudie plus finement ce cas, on montre qu'il permet de revenir plus rapidement en  $x = 0$ , à condition que le système puisse osciller sans dommage. Pour une analyse plus complète, on peut se reporter au chapitre *Circuit linéaire du second ordre* où on définit précisément le temps de réponse à 5% qui permet de comparer la durée de chacun des régimes transitoires.

#### Exemple

Les amortisseurs sont destinés à ramener une voiture rapidement à l'équilibre sans oscillations excessives. On les règle pour qu'ils fonctionnent quasiment au régime critique.

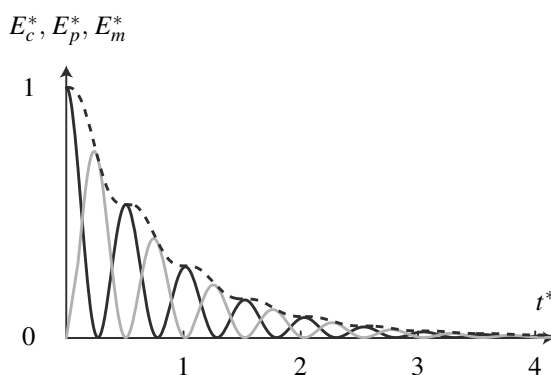
## 2.5 Aspects énergétiques

### a) Variations d'énergie

À partir des expressions de  $x(t)$  obtenues précédemment, on peut tracer les différentes énergies en fonction du temps, c'est-à-dire :

- l'énergie cinétique :  $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  ;
- l'énergie potentielle :  $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$  car  $k = m\omega_0^2$  ;
- l'énergie mécanique :  $E_m = E_c + E_p$  .

La figure 17.10 représente l'évolution de ces différentes énergies dans le cas d'un régime pseudo-périodique.



**Figure 17.10** – Évolution des énergies cinétiques (courbe noire), potentielle (courbe grise) et mécanique (tirets) pour  $Q = 5, 0$ .

Dans ce cas, on connaît  $x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$  où  $A(t) = X_m \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  avec  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ . On en déduit :

$$E_p(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2(t) \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2(t) \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)) .$$

L'énergie potentielle présente des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps. La pseudo-période des oscillations vaut  $\frac{T}{2}$  et l'amplitude décroît de façon exponentielle avec un temps caractéristique  $\tau' = \frac{\tau}{2}$  car  $A^2(t) = X_m^2 \exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right)$ .

L'énergie cinétique présente les mêmes caractéristiques mais est en opposition de phase. Au final, l'énergie mécanique n'oscille quasiment plus et présente quasiment une décroissance exponentielle de temps caractéristique  $\tau'$ .

### b) Origine de la variation d'énergie mécanique

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{NC}) = -\lambda \dot{x}^2 < 0,$$

où  $\mathcal{P}(\vec{f}_{NC})$  est la puissance des forces non conservatives, soit ici la puissance des forces de frottement. L'énergie mécanique du point matériel diminue sous l'action des frottements. Elle est dissipée sous forme de chaleur.

### SYNTHÈSE

#### SAVOIRS

- puits de potentiel, barrière de potentiel
- puits de potentiel harmonique
- savoir que les mouvements harmoniques sont isochrones et présentent des trajectoires de phase elliptiques
- savoir que seules les forces linéaires dérivent d'un potentiel harmonique
- savoir qu'un puits de potentiel quelconque peut être assimilé à un puits harmonique au voisinage de son minimum
- savoir que les mouvements de faibles amplitudes au voisinage d'une position d'équilibre stable peuvent être assimilés à des oscillations harmoniques
- définition d'un oscillateur amorti
- forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti en terme de pulsation propre et de facteur de qualité
- différents régimes libres possibles
- nature du régime libre en fonction de la valeur du facteur de qualité

#### SAVOIR-FAIRE

- identifier les mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable aux mouvements d'un oscillateur harmonique
- mettre en évidence des forces non linéaires par la perte d'isochronisme et les déformations des trajectoires de phase
- évaluer l'énergie minimale nécessaire pour franchir une barrière de potentiel
- écrire sous forme canonique l'équation différentielle d'un oscillateur amorti
- identifier la pulsation propre et le facteur de qualité
- déterminer le polynôme caractéristique associé et en trouver les racines
- déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre
- déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité

#### MOTS-CLÉS

- |                          |                        |                      |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| • puits de potentiel     | • effets non-linéaires | • facteur de qualité |
| • barrière de potentiel  | • oscillateur amorti   | • régime libre       |
| • oscillateur harmonique | • pulsation propre     | • régime transitoire |