



DS8 – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2016-2017 – Lycée Saint-Exupéry

29.04.2017

Problème 1 – « Peser la Terre »

1. **Mesure de la constante de torsion du fil.** On déduit la valeur de C des oscillations libres du pendule de torsion.

1.1 Le moment d'inertie par rapport à un axe quantifie la répugnance d'un solide à voir son mouvement de rotation autour de cet axe modifié. Plus la masse du solide est distribuée loin de l'axe plus son moment d'inertie par rapport à cet axe augmente.

1.2 Moment cinétique du pendule autour de l'axe Oz ;

$$L_{Oz} = J\dot{\theta}$$

1.3 Théorème du moment cinétique par rapport à Oz appliqué au pendule dans le référentiel du laboratoire galiléen :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}$$

Le poids et la tension du fil sont confondus avec Oz donc leurs moments par rapport à Oz sont nuls. Il vient :

$$J\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

1.4 Période T des oscillations : $T_0 \approx 10 \text{ min} \approx 600 \text{ s}$.

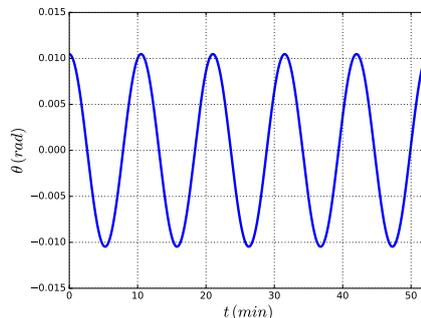


FIGURE 1 – Oscillations du pendule

Alors :

$$C = \frac{4\pi^2}{T_0^2} J = \frac{8\pi^2 m}{T_0^2} \left(l^2 + \frac{a^2}{5} \right)$$

A.N. : $C = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$.

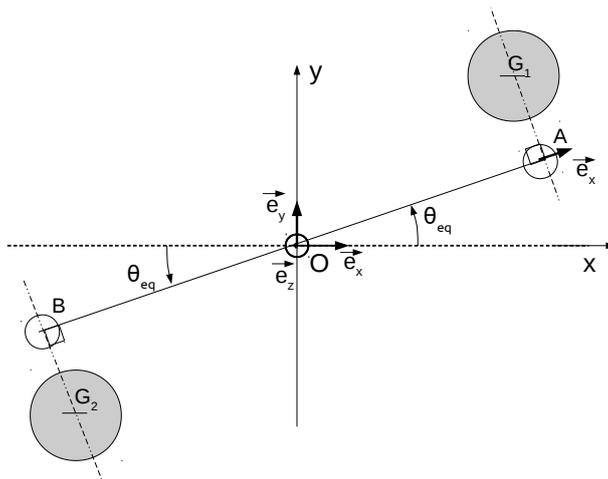


FIGURE 2 – Balance de Cavendish (vue de dessus)

2. Mesure de la masse de la Terre.

2.1 Force gravitationnelle exercée par chaque grosse sphère sur sa petite sphère voisine :

$$\vec{F}_g = \frac{GMm}{d^2} \vec{e}_\theta$$

avec \vec{e}_θ dont le sens dépend de la grosse sphère envisagée.

2.2 A l'équilibre, le moment de torsion compense le moment des forces gravitationnelles soit :

$$-C\theta_{eq} + 2F_g l = 0$$

dont on déduit une expression pour G :

$$G = \frac{C\theta_{eq}d^2}{2Mml}$$

A.N. : $G \approx 5,8 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

La valeur tabulée vaut $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. La valeur mesurée est relativement correcte vu la délicatesse de la mesure.

2.3 Masse de la Terre M_T .

$$P = mg = \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

donne :

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G}$$

A.N. : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $M_T \approx 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

La valeur tabulée est $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Problème 2 – Accélérateur linéaire de Wilderöe

1. Préliminaires

1.1 Energie mécanique au point A :

$$Em_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + eV_A$$

La particule n'est soumise qu'à la force électrique conservative donc son énergie mécanique se conserve.

1.2 La conservation de l'énergie mécanique impose :

$$E_m(B) = E_m(A)$$

$$\Leftrightarrow Ec_A + eV_A = Ec_B + eV_B$$

$$\Leftrightarrow \Delta Ec = eU$$

A.N. : $\Delta Ec = 0,75 \text{ MeV}$

1.3 Vitesse au point B .

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + \frac{2eU}{m}}$$

A.N. : pour l'ion Cs^+ , $v_B = 1,03.10^6 \text{ m.s}^{-1}$.

2. Etude de l'accélérateur.

2.1 Dans un tube, la particule n'est soumise à aucune force. Le référentiel d'étude étant galiléen, d'après le principe d'inertie sa vitesse est constante : $\vec{v} = c\vec{st}\vec{e}$.

2.2 A t_0 , $U(t) = U_0 \sin \varphi_0$. Cette tension est accélératrice si $\varphi_0 \in [0, \pi]$.

2.3 Si $t_{n+1} - t_n = \frac{T}{2}$ alors la particule est soumise à la même tension accélératrice dans deux zones adjacentes. Par récurrence, elle soumise à la même tension dans chacune des zones. La particule est ainsi accélérée de manière optimale.

2.4 Alors la tension U est la même qu'entre les tubes L_0 et L_1 à savoir :

$$\delta V_n = U_0 \sin \varphi_0$$

2.5 Chaque zone accélératrice est équivalente au condensateur de la question 1 avec $U_{AB} = \delta V_n <$. La particule entre dans le tube n après avoir traversé n zones accélératrice, on en déduit son énergie cinétique dans le tube n :

$$E_{c,n} = \frac{1}{2}mv_0^2 + neU_0 \sin \varphi_0$$

et sa vitesse v_n dans le tube n :

$$v_n = \sqrt{v_0^2 + \frac{2neU_0 \sin \varphi_0}{m}}$$

2.6 Longueur d'un tube. D'après la condition de synchronisation :

$$L_n = v_n \frac{T}{2} = \frac{T}{2} \sqrt{v_0^2 + \frac{2neU_0 \sin \varphi_0}{m}}$$

3. Applications numériques :

$$3.1 L_0 = \frac{v_0}{2f} = 5,13 \text{ cm.}$$

- 3.2 Pour N tubes, on vaut $E_{c,N} = 2E_{c,0} = mv_0^2 = 375 \text{ keV}$. Le nombre de tubes pour au moins doubler l'énergie est donnée par :

$$N = E \left(\frac{mv_0^2}{2eU_0 \sin \varphi_0} \right) + 1 = 3$$

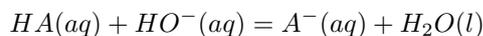
Donc il faut au moins 3 tubes pour doubler l'énergie cinétique initiale.

- 3.3 Vitesse de l'ion en sortie de l'accélérateur : $v_f = v_3 = 7,94 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$. D'après le graphe, à l'abscisse $v_3/c = 2 \cdot 10^{-3}$, la mécanique classique et relativiste converge. Les résultats calculés dans le cadre de la mécanique newtonienne sont donc valables.
4. **Stabilité du synchronisme.** À paramètres m, L_n, U_0, v_0 donnés, la condition de synchronisme n'est réalisée que si la particule entre exactement à l'instant t_0 , à une période près.
- 4.1 La particule entre à $t_0 + \tau_0 \gtrsim t_0$ alors elle est accélérée initialement par la tension $U_0 \sin(\varphi_0 + \delta\phi_0)$ avec $0 < \delta\phi_0 \ll \varphi_0$:
- si $\varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\sin(\varphi_0 + \delta\phi_0) > \sin(\varphi_0)$: la particule est plus accélérée que celle entrant à t_0 donc la particule comble peu à peu son retard jusqu'à, éventuellement, se synchroniser sur la tension.
 - si $\varphi_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors $\sin(\varphi_0 + \delta\phi_0) < \sin(\varphi_0)$: la particule est moins accélérée que celle entrant à t_0 donc son retard augmente.
- 4.2 La particule entre à $t_0 - \tau_0 \gtrsim t_0$ alors elle est accélérée initialement par la tension $U_0 \sin(\varphi_0 - \delta\phi_0)$ avec $0 < \delta\phi_0 \ll \varphi_0$.
- si $\varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\sin(\varphi_0 - \delta\phi_0) < \sin(\varphi_0)$: la particule est moins accélérée que celle entrant à t_0 donc la particule perd peu à peu son avance jusqu'à, éventuellement, se synchroniser sur la tension.
 - si $\varphi_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors $\sin(\varphi_0 - \delta\phi_0) > \sin(\varphi_0)$: la particule est plus accélérée que celle entrant à t_0 donc son avance augmente.
- 4.3 On en conclut que le mécanisme de synchronisation n'est stable que si $\varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- 4.4 D'après l'analyse précédente, si l'on injecte à l'entrée de l'appareil un faisceau continu, les particules injectées pendant une même demi-période autour de t_0 i.e telle que $\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vont, si l'accélérateur est suffisamment long, se synchroniser et sortir en même temps. Les autres particules subiront des accélérations erratiques. On obtient en sortie des impulsions T -périodique correspondant aux paquets de particules groupées.

Problème 3 – Analyse physico-chimique d'un vin

1. Acidité totale du vin.

- 1.1 Les pKa des différents acides sont voisins donc tous les acides sont titrés en même temps. La courbe présente donc un seul saut de pH.
- 1.2 Réaction de titrage :



Constante d'équilibre : $K = \frac{Ka}{Ke} = 10^{10}$. La réaction est donc quantitative.

- 1.3 Volume équivalent : $v_E = 10,5 \text{ mL}$. A l'équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stoechiométriques soit :

$$n_{HA,initiale} = n_{HO^-,versée}$$

avec $n_{HO^-,versée} = C_0 v_E$ d'où :

$$n_{HA,initiale} = C_0 v_E$$

Comme $HA(aq) + H_2O = A^-(aq) + H_3O^+$, la quantité de matière d'ions H_3O^+ libérable par litre vaut :

$$n = \frac{n_{HA,initiale}}{V}$$

soit :

$$n = \frac{C_0 v_E}{V}$$

A.N. : $n = 105 \text{ mmol.L}^{-1} > 50 \text{ mmol.L}^{-1}$.

Le vin est donc commercialisable.

2. Fermentation malolactique.

2.1 Fermentation malolactique et acidité.

2.1.1 Diagrammes de prédominance : fig.3.

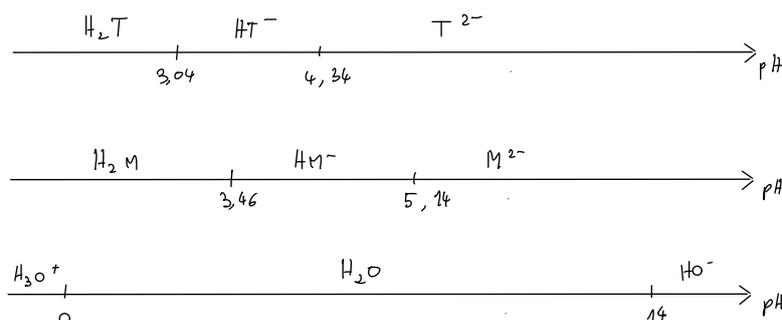


FIGURE 3 – Diagrammes de prédominance

2.1.2 A $pH = 3$:

— $pH \approx pKa(H_2T/HT^-) \ll pKa(HT^-/T^{2-})$ donc on peut supposer que $[H_2T] = [HT^-] = \frac{C_1}{2} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ avec $C_1 = \frac{2,26}{M_{H_2T}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[T^{2-}] \approx 0$.

— $pH \ll pKa(HM^-/H_2M)$ donc $[H_2M] \approx 0$. On calcule ensuite $[H_2M]$ et $[HM^-]$ par conservation de la matière et la loi d'action de masse appliquée à l'équilibre $H_2M + H_2O = HM^- + H_3O^+$:

— $[H_2M] + [HM^-] = C_2$ avec $C_2 = \frac{3,10}{134} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

— $Ka(H_2M/HM^-) = \frac{[HM^-][H_3O^+]}{[H_2M]c^0}$

— $[H_3O^+] = 10^{-pH}$

Après résolution, on trouve : $[H_2M] = 2,24 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[HM^-] = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

2.1.3 Equation-bilan correspondant à la fermentation malolactique. D'après les formules brutes de H_2T et H_2M , une mole de CO_2 formé par mole de H_2M consommée :



2.1.4 $pKa(HL/L^-) < pKa(H_2M/HM^-)$ donc la fermentation malo-lactique substitue un acide par un acide plus faible. On en déduit que le pH augmente au cours de la fermentation. (En fait, il faudrait prendre en compte l'acidité du CO_2 dissous également).

2.1.5 Le pétilllement du vin provient d'un dégagement de CO_2 formé au cours de la fermentation.

2.1.6 $[H_2M]_f = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ g.L}^{-1} \ll 3,10 \text{ g.L}^{-1}$ donc on peut considérer que la fermentation est terminée.

2.2 Durée de la fermentation

2.2.1 Cinétique de la fermentation :

$$v = k[H_2M] = -\frac{d[H_2M]}{dt}$$

d'où :

$$\frac{d[H_2M]}{dt} + k[H_2M] = 0$$

Solution :
$$\boxed{[H_2M](t) = [H_2M]_0 e^{-k.t}}$$

2.2.2 Au bout de $t_{1/2}$, l'avancement de la réaction est égal à la moitié de sa valeur finale soit :

$$[H_2M](t_{1/2}) = [H_2M]/2$$

Donne :

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}}$$

A.N. : $t_{1/2} = 12$ jours

Estimation de la durée de la fermentation malolactique $\tau \approx 5\tau \approx 2$ mois.

2.2.3 Durée T la fermentation malolactique du vin étudié.

$[H_2M]_0 = 3,10 \text{ g.L}^{-1}$, $[H_2M]_f = 0,05 \text{ g.L}^{-1}$. Or :

$$[H_2M](T) = [H_2M]_f = [H_2M]_0 e^{-k.T}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{[H_2M]_0}{[H_2M]_f} \right)}$$

A.N. : $T \approx 35$ jours