



DS2 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2017-2018 – Lycée Saint-Exupéry

14.10.2017

Problème 1 – Autour du Thallium

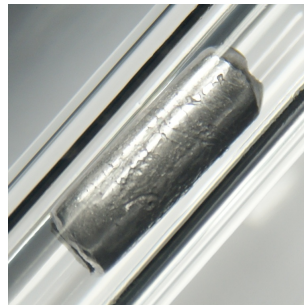
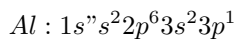


FIGURE 1 – Un échantillon de Thallium. Par *Hi-Res Images of Chemical Elements* — <http://images-of-elements.com/thallium.php>, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=28869960>

Données :

- constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$,
- définition de l'électron-Volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

1. L'isotope ${}_{81}^{205}\text{Tl}$ du thallium est composé de $Z = 81$ protons et de $N = A - Z = 205 - 81 = 124$ neutrons.
2. Configuration électronique de l'atome d'aluminium Al ($Z = 13$) dans son état fondamental.



3. Le thallium appartient à la famille de l'aluminium et à la sixième période donc sa couche de valence sa configuration électronique s'écrit :



4. L'aluminium forme Al^{3+} pour acquérir la configuration électronique du gaz noble le plus proche (le néon). Appartenant à la même famille que l'aluminium, l'ion stable a priori formé par l'atome de thallium est Tl^{3+} .
5. La figure 2 fait apparaître quelques niveaux d'énergie électronique du thallium, le niveau fondamental étant $6^2P_{1/2}$.

5.1 La raie dont la longueur d'onde appartenant au domaine du visible est $\lambda = 5350,46 \text{ \AA}$: il s'agit donc de la raie observé par Crookes. La transition électronique correspondante s'opère entre les niveaux d'énergie $7^2S_{1/2}$ et $6^2P_{3/2}$.

5.2 Calculons l'énergie du niveau noté $6^2P_{3/2}$. D'après le diagramme des niveaux d'énergie, par conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \text{— } E(7^2S_{1/2}) - E(6^2S_{1/2}) &= \frac{hc}{\lambda_1} \quad \text{avec } \lambda_1 = 5350,46 \text{ \AA}; \\ \text{— } E(7^2S_{1/2}) - E(6^2S_{3/2}) &= \frac{hc}{\lambda_2} \quad \text{avec } \lambda_2 = 3775,22 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

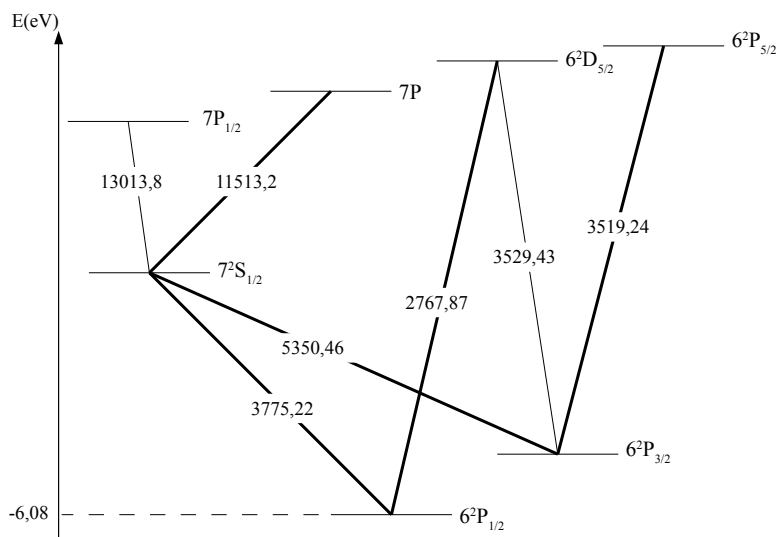


FIGURE 2 – Quelques transitions de l'atome de Thallium

On en déduit :

$$E(6^2S_{3/2}) = E(6^2S_{1/2}) + \frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1}$$

A.N. : $\underline{E(6^2S_{3/2}) = -5,11 \text{ eV}}$

Problème 2 – Principe de l'échographie

1. Généralités sur les ondes sonores

1.1 L'oreille humaine n'est sensible qu'aux sons de fréquence $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$.

1.2 Dans l'air la célérité du son vaut en moyenne $c_s \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.3 Par définition de la longueur d'onde : $\lambda = \frac{c_s}{f}$ d'où le domaine de longueur d'onde dans l'air des ondes ultra-sonores : $[34 \mu\text{m}, 17 \text{ mm}]$.

2. Modélisation des ondes émises par la sonde échographique

2.1 Au bout de $t_1 = 2 \mu\text{s}$, l'onde se propage sur une distance $\delta = c_s t_1 = 3 \text{ mm}$ vers les x : fig.3.

2.2 En $x = 0$, la vibration ultra-sonore s'écrit :

$$p(x = 0, t) = p_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t)$$

En un point d'abscisse x , la pression p présente les même variation temporelle qu'en $x = 0$ mais avec un retard à la propagation $\Delta t = \frac{x}{c_s}$ ce qui s'écrit mathématiquement :

$$p(x, t) = p(x = 0, t - x/c_s) = p_0 e^{-(t-x/c_s)^2/\tau^2} \cos(\omega(t - x/c_s)) = p_0 e^{-(t-x/c_s)^2/\tau^2} \cos(\omega t - kx)$$

2.3 La largeur spatiale de l'impulsion vaut $\delta = 2 \text{ mm}$. Nommons A et B les points extrêmes de l'impulsion et considérons un capteur fixe recevant la vibration correspondant à B à $t = 0$. L'onde se propageant à la célérité c_s , le capteur reçoit la vibration A à l'instant $t = \frac{\delta}{c_s}$. On en déduit que la largeur

temporelle de l'impulsion est $\tau = \frac{\delta}{c_s} = 1,33 \mu\text{s}$.

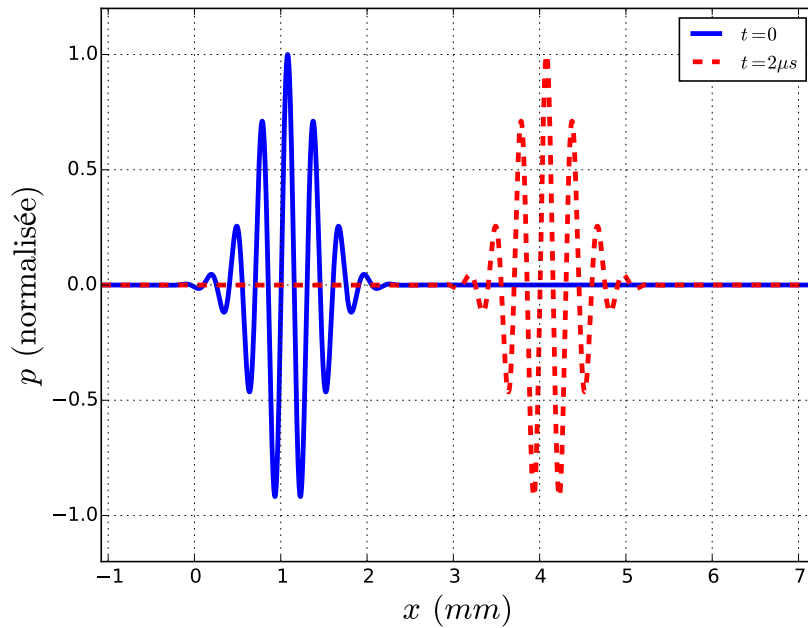


FIGURE 3 – Propagation de l'impulsion ultrasonore

- 2.4 Deux cibles échogènes sont distinguées si leurs échos ne se superposent pas. En supposant que les échos ont même forme d'onde que l'impulsion incidente, plus précisément qu'ils ne sont pas élargis, alors la résolution longitudinale est de l'ordre de la largeur de l'impulsion incidente à savoir $\delta = 2 \text{ mm}$. Un raisonnement plus complet et plus optimiste donnerait une résolution $\delta/4 = 0,5 \text{ mm}$.

3. Principe de l'échographie

3.1 Propriétés acoustiques des milieux biologiques

$$3.1.1 \quad C_{mb} = 1,49 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad Z_{mb} = 1,49 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$3.1.2 \quad C_{os} = 12,40 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad Z_{os} = 7,59 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.2 Etude d'un cas pratique

On donne plus précisément le tableau fig.4 des valeurs numériques des impédances acoustiques de quelques milieux biologiques :

Milieu	Air	Graisse	Tissou mou	Foie	Muscle	Os
$Z(\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$	400	$1,36 \cdot 10^6$	$1,62 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^6$	$1,71 \cdot 10^6$	$7,80 \cdot 10^6$

FIGURE 4 – Impédance acoustiques de quelques milieux biologiques

- 3.2.1 L'onde sonore réfléchi se propage en sens inverse de l'onde incidente. Si la cible échogène se situe à une distance h de la sonde, l'onde réfléchi à la sonde revient avec un retard $\Delta t = c_s \times 2h$ soit :

$$h = \frac{1}{2} c_s \cdot \Delta t$$

avec $\Delta t = 30 \mu\text{s}$ (voir fig.5), $c_s = 1,49 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en supposant les tissus mous, on trouve :

$$h \approx 2,2 \text{ cm}$$

- 3.2.2 En négligeant toute atténuation de l'onde incidente lors de sa propagation à travers les tissus mous, le coefficient de réflexion par le tissu échogène est donné par $r = \frac{A'}{A}$ et l'impédance de ce tissu vaut :

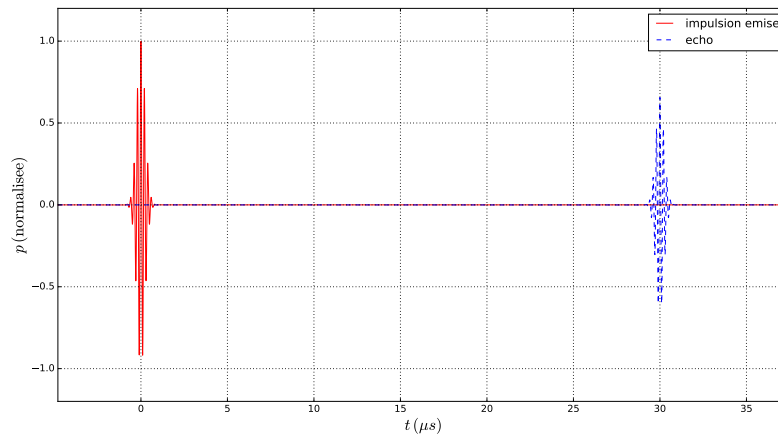


FIGURE 5 – Impulsion ultrasonore et son écho. Ce type de signaux est ensuite traité et transformé en image.

$$Z_2 = Z_1 \frac{1+r}{1-r}$$

A.N. : avec $Z_1 = 1,62 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (tissus mous), $A = 1$, $A' = 0,65$, on trouve $Z_2 = 7,63 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. C'est donc un os ! (Plus précisément une calcification).

- 3.2.3 Les os étant fortement réfléchissants, très peu d'énergie est transmise au delà, d'autant plus que l'onde rencontre ensuite une interface os-tissu mou également très réfléchissante. L'onde transmise a donc une très faible amplitude.
- 3.2.4 La cône d'ombre acoustique derrière l'os s'explique par la faible amplitude de l'onde transmise par l'os. Les échos devant à nouveau franchir une interface tissu mou/os puis une interface os/tissu mou en sont encore davantage atténuée. L'intensité du signal provenant de cette région est donc quasiment nulle : on ne peut pas la sonder.



FIGURE 6 – Phénomène de cône d'ombre acoustique.

Problème 3 – Modes propres d'une diode laser

1. On réalise l'analyse spectrale du faisceau sortant de la diode laser. Son spectre est représenté fig.8.

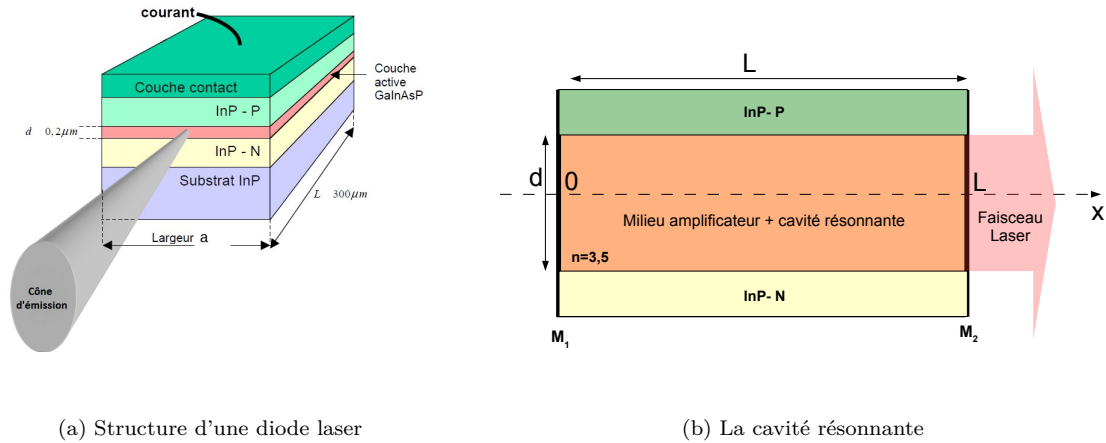


FIGURE 7 – La diode laser

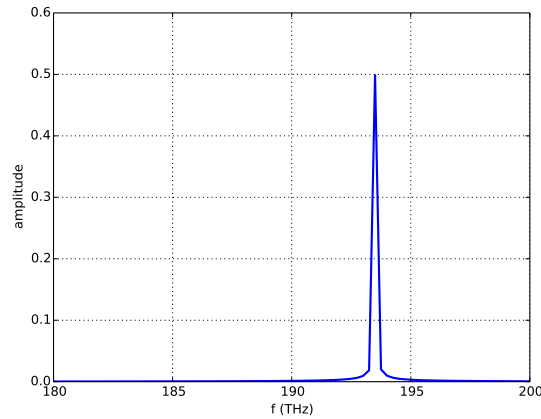


FIGURE 8 – Spectre de la diode laser

1.1 Longueur d'onde moyenne d'émission $\lambda_{0,M} = \frac{c}{f_{0,M}}$. A.N. : avec, graphiquement, $f_{0,M} = 193,5 \times 10^{12}$ Hz :

$$\lambda_{0,M} = 1,55 \mu\text{m}$$

1.2 Le spectre montre que la radiation émise par la diode est harmonique (1 seul pic sur le spectre de longueur d'onde $\lambda_{0,M}$: seules les expressions (a) et (b) conviennent. La propagation se fait suivant les x croissants donc l'expression correcte de la radiation lumineuse est la (a) :

$$E(x, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_{0,M}} x\right)$$

- 2. Par analogie avec la corde vibrante, on peut interpréter la nullité du champ électrique sur les parois de la cavité par l'interférence destructive des ondes incidente et réfléchie au sein de la cavité.
- 3. En mode d'émission continu, une onde électromagnétique monochromatique de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ de la forme suivante :

$$E(x, t) = E \sin(\omega t) \cos(kx + \varphi) \quad \text{où} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

peut naître dans la cavité. Ce type de mode est appelé **mode longitudinal**.

3.1 $E(x, t) = E \sin(\omega t) \cos(kx + \varphi)$ traduit l'existence d'une onde stationnaire au sein de la cavité.

3.2 Annulation de l'onde en $x = 0$:

$$\forall t, E(0, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t, E \sin(\omega t) \cos(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

On peut librement choisir $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. L'onde s'écrit donc :

$$E(x, t) = E \sin(\omega t) \cos(kx - \frac{\pi}{2}) = E \sin(\omega t) \sin(kx)$$

3.3 Modes de vibration autorisés au sein de la cavité. L'onde doit s'annuler en $x = L$:

$$\forall t, E(L, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t, E \sin(\omega t) \sin(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow k_m L = m\pi, m \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k_m = m \frac{\pi}{L}, m \in \mathbb{N}}$$

Soit, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, en terme de longueur d'onde :

$$\boxed{\lambda_m = \frac{2L}{m}, m \in \mathbb{N}}$$

Ce résultat pouvait être déterminé physiquement en constatant que l'annulation de l'onde en $x = 0$ et $x = L$ impose que L doit être un multiple de la demi-longueur d'onde λ soit $L = m \frac{\lambda_m}{2}$.

3.4 Fréquences f_m des modes longitudinaux m susceptibles d'exister dans la cavité laser.

$$f_m = \frac{c}{\lambda_m} = \frac{c_0}{n\lambda_m} \Rightarrow \boxed{f_m = m \frac{c_0}{2nL}}$$

3.5 Mode fondamental : $m = 1$. Soit $E_1(x, t) = E_1 \sin(2\pi f_1 t) \sin(\frac{2\pi}{\lambda_1} x)$ avec $f_1 = \frac{c_0}{2nL} = 1,43 \times 10^{11}$ Hz et $\lambda_1 = 2L = 600 \mu\text{m}$. Représentation graphique : fig.9.

3.6 Modes $m = 3$ et $m = 5$: fig.10 et fig.11

4. L'effet laser peut se produire pour les modes dont la longueur d'onde est incluse dans l'intervalle $[\lambda_{0,M} - \sigma_\lambda, \lambda_{0,M} + \sigma_\lambda]$ où $\lambda_{0,M}$ est la longueur d'onde moyenne déterminée précédemment et $\sigma_\lambda = 50$ nm.

4.1 Le spectre de la diode est en fait polychromatique. Les différentes harmoniques représentées correspondent aux modes propres d'oscillations du champ électrique dans la cavité compatibles avec l'effet laser.

4.2 Mode m_0 correspondant à la longueur d'onde moyenne $\lambda_{0,M}$ du faisceau laser :

$$m_0 \frac{\lambda_M}{2} = L \quad \text{avec} \quad \lambda_M = \frac{\lambda_{0,M}}{n}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_0 = \frac{2nL}{\lambda_{0,M}}}$$

A.N. : graphiquement : $\lambda_{0,M} \approx 1,558 \mu\text{m}$ (raie centrale) donne $m_0 = 1349$.

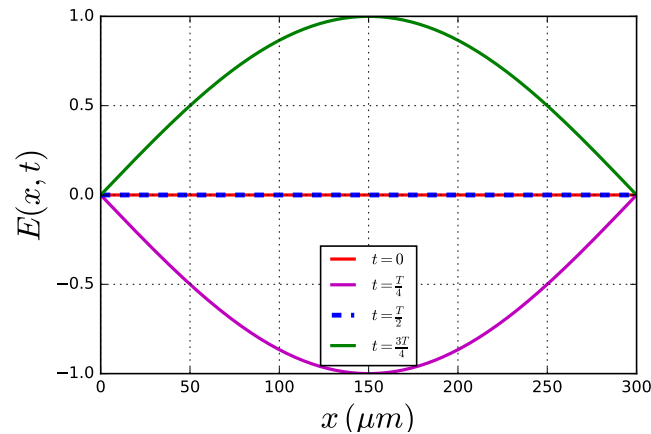
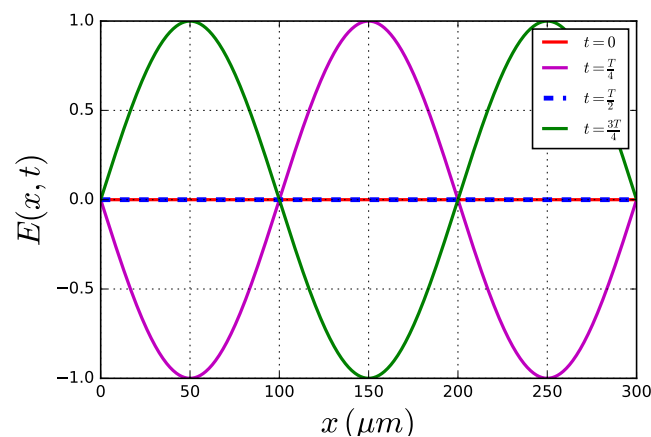


FIGURE 9 – Mode fondamental de vibration du champ électrique au sein de la cavité à différents instants.

FIGURE 10 – Mode $m=3$ de vibration du champ électrique au sein de la cavité à différents instants.

4.3 Intervalle spectral libre ISL_λ du laser :

$$ISL_\lambda = |\lambda_{0,m+1} - \lambda_{0,m}|$$

$$\Leftrightarrow ISL_\lambda = \left| 2nL \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \right) \right|$$

$$\Leftrightarrow ISL_\lambda = \frac{2nL}{m(m+1)}$$

Si $m \gg 1$ alors $m+1 \approx m$, d'où :

$$ISL_\lambda = \frac{2nL}{m(m+1)} \approx \frac{2nL}{m^2}$$

avec $\lambda_{0,m} = n\lambda_m = \frac{2L}{m}$, il vient :

$$ISL_\lambda \approx \frac{\lambda_{0,m}^2}{2nL}$$

4.4 Pour obtenir une diode monomode, il faut que que l'intervalle spectrale libre autour la longueur d'onde moyenne $\lambda_{0,M}$ soit supérieur à σ_λ afin que seul le mode m_0 puisse « laser ». Soit, en supposant σ_λ indépendant de la longueur L de la cavité :

$$ISL_\lambda(\lambda_{0,M}) > \sigma_\lambda$$

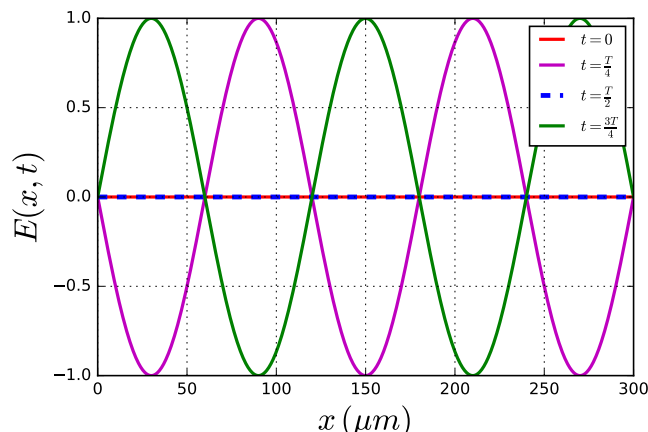


FIGURE 11 – Mode $m=5$ de vibration du champ électrique au sein de la cavité à différents instants.

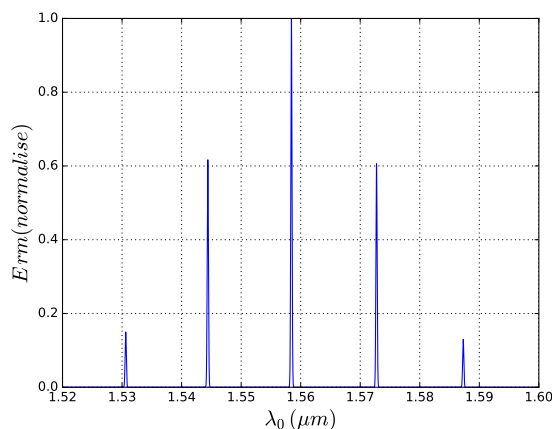


FIGURE 12 – Spectre de la diode laser. Les longueurs d’onde indiquées sont les longueurs d’onde dans le vide.

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_{0,M}^2}{2nL} > \sigma_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L < \frac{\lambda_{0,M}^2}{2\sigma_\lambda}}$$

A.N. : la longueur de la cavité laser ne doit pas excéder $L_{max} = \frac{\lambda_{0,M}^2}{2\sigma_\lambda} = 42 \mu\text{m}$.

5. La divergence du faisceau laser provient probablement de la diffraction par l’ouverture de la diode de l’ordre de $a \sim 0,2 \mu\text{m}$ dans le sens de la hauteur et de $d \sim 3 \mu\text{m}$ dans le sens de la largeur. Les angles de divergences correspondant sont de l’ordre de :

$$\theta_a \sim \frac{\lambda_0, M}{a} \sim 3 \text{ rad} \quad \text{et} \quad \theta_d \sim \frac{\lambda_0, M}{d} \sim 0,5 \text{ rad}$$

La différence de divergence suivant la hauteur et la largeur explique la forme elliptique de la section du faisceau laser. Le valeur numérique déterminée sont surestimées car l’approximation des petits angles n’est plus valable. Néanmoins les valeurs réels sont très grandes : une lentille doit être employée pour refocaliser le faisceau.