

CORRIGE - CORRECTION DE TILT D'UNE OPTIQUE ADAPTATIVE

Système conçu pour le VLT par le DESPA, Observatoire de Paris-Meudon.

Question 1 : A partir du schéma d'architecture de la Figure 4, déterminer et justifier par calcul (association de liaisons) la forme générale du torseur cinématique de la liaison globale équivalente 1-3. On étudiera pour cela les associations de liaisons 1-2 et 2-3. Nommer cette liaison, préciser ses éléments géométriques caractéristiques et son degré de mobilité m .

Les liaisons entre 2 et 3 sont des liaisons rotules en A et B, en parallèle.

Intuitivement la liaison équivalente est une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_2)

Montrons ce résultat. On note $V_{2/3}^a$ le torseur cinématique de la liaison rotule en A et $V_{2/3}^b$ celui de la liaison rotule en B

$$V_{2/3}^a = \begin{Bmatrix} \omega_x^a & 0 \\ \omega_y^a & 0 \\ \omega_z^a & 0 \end{Bmatrix}_{A;R} \quad \text{où } R \text{ correspond à n'importe quelle base.}$$

$$V_{2/3}^b = \begin{Bmatrix} \omega_x^b & 0 \\ \omega_y^b & 0 \\ \omega_z^b & 0 \end{Bmatrix}_{B;R} \quad \text{où } R \text{ correspond à n'importe quelle base.}$$

Les liaisons étant en parallèle, $V_{2/3}^{eq} = V_{2/3}^b = V_{2/3}^a$ (à écrire au même point)

Pour simplifier les calculs par la suite, on choisit d'écrire les torseurs au même point O.

$$V_{2/3}^a = \begin{Bmatrix} \omega_x^a & 0 \\ \omega_y^a & -r \omega_z^a \\ \omega_z^a & r \omega_y^a \end{Bmatrix}_{A; \vec{x}_2}$$

$$V_{2/3}^b = \begin{Bmatrix} \omega_x^b & 0 \\ \omega_y^b & r \omega_z^b \\ \omega_z^b & -r \omega_y^b \end{Bmatrix}_{B; \vec{x}_2}$$

En égalisant les différents termes, il vient $\omega_y^a = \omega_y^b$ mais aussi $\omega_x^a = -\omega_x^b$, ainsi $\omega_x^a = \omega_x^b = 0$. De la même manière $\omega_z^a = \omega_z^b = 0$

Le torseur équivalent aux deux liaisons en parallèle est donc le suivant : $V_{2/3}^b = \begin{Bmatrix} \omega_{2/3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O;R_2}$. On a donc une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_2)

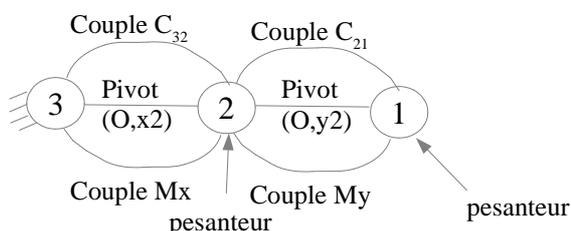
De la même manière, on montre que la liaison 1/2 est une liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_2)

Pour déterminer la liaison équivalente entre 1 et 3, on considère donc les deux liaisons pivots en série. On écrit les deux torseurs au point O dans la base R_2 (base commune aux deux torseurs) et on somme ces torseurs.

On aboutit ainsi à $V_{1/3} = \begin{Bmatrix} \omega_{2/3} & 0 \\ \omega_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O;R_2}$.

On obtient ainsi une liaison rotule à doigt en O, de doigt \vec{x}_2 et de plan de rainure $(O, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (ou bien liaison rotule à doigt de centre O, de doigt \vec{y}_2 de plan de rainure $(O, \vec{x}_2, \vec{z}_2)$)

Question 2 : Réaliser un graphe de structure en remplaçant les liaisons en parallèle par leur liaison équivalente. Faire le schéma cinématique minimal correspondant.



Question 3 :

On isole 1 soumis :

- à l'action de la pesanteur en O (moment nul en O)
- à l'action du ressort de torsion, torseur couple $C_{21} \vec{y}_2$
- à l'action motrice, torseur couple $M_y \vec{y}_2$
- à l'action de la liaison pivot de 2 sur 1 d'axe (O, \vec{y}_2)

Pour ne pas faire apparaître les inconnues de la liaison pivot, on écrit, dans R_3 galiléen, le théorème du moment dynamique en O en projection selon \vec{y}_2 .

On isole 1+2 soumis à :

- l'action de la pesanteur en O (moment nul en O)
- à l'action du ressort de torsion, torseur couple $C_{32} \vec{x}_2$
- à l'action motrice, torseur couple $M_x \vec{x}_2$
- à l'action de la liaison pivot de 3 sur 2 d'axe (O, \vec{x}_2)

Pour ne pas faire apparaître les inconnues de la liaison pivot, on écrit, dans R_3 galiléen, le théorème du moment dynamique en O en projection selon \vec{x}_2 .

Question 4 : Réaliser ces calculs en utilisant notamment l'expression obtenue pour $\vec{\sigma}(O, 1/3)$.

On isole 1 Soit : $0 - k\phi + M_y = \vec{\delta}(O, 1/3) \cdot \vec{y}_2$

On isole 1+2 Soit : $0 - k\theta + M_x = \vec{\delta}(O, (1+2)/3) \cdot \vec{x}_2$

Question 5 : Calculer la FTBO à partir du diagramme fonctionnel de la Figure 5. Tracer alors les diagrammes de Bode asymptotiques correspondant à cette fonction de transfert en précisant les grandeurs caractéristiques (pulsation de coupure, résonance, gain pour des faibles pulsations, pentes...). Comparer avec les relevés expérimentaux du prototype.

Entre les points P2 et P5 on a $P5(p) = K_4 H(p) K_3 K_2 P_2(p)$ donc $FTBO(p) = \frac{P5(p)}{P2(p)} = \frac{K_4 K_3 K_2}{k(1+T p + (\frac{J}{k}) p^2)}$ c'est à

dire $FTBO(p) = \frac{20,62}{(1 + 10^{-3} p + 15 \cdot 10^{-5} p^2)} = \frac{20,62}{\left(1 + \frac{2,0,04}{81,6} p + \left(\frac{p}{81,6}\right)^2\right)}$ On trace alors le diagramme de Bode dans second ordre

avec une pulsation propre de 80 rad/s environ,

l'amortissement étant inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ on a

une résonance tel que

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2} \approx \omega_0 \text{ de maximum}$$

$$G_{dB, \max} = 20 \cdot \log\left(\frac{K}{2z \sqrt{1 - z^2}}\right) = 48 \text{ dB}$$

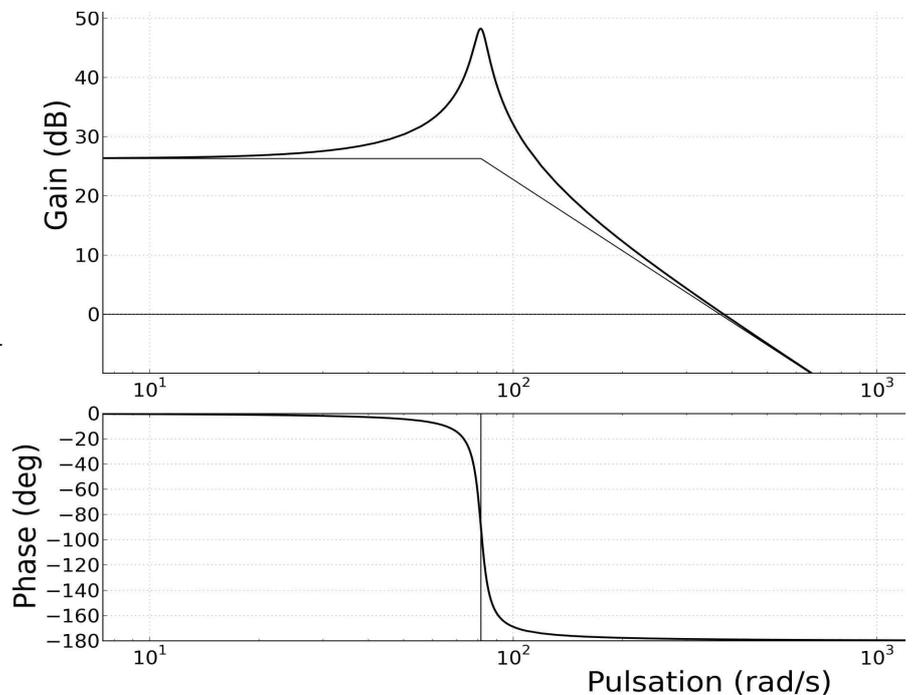
Pour le diagramme de Gain :

En basse fréquence on a 26 dB, puis une asymptote de -40 dB/dec à partir de la pulsation propre.

Pour le diagramme de phase :

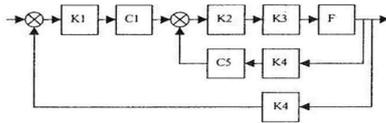
Classique pour un second ordre.

Sur le relevé expérimental on retrouve l'allure, le gain pour les BF, le gain maxi et le comportement asymptotique.



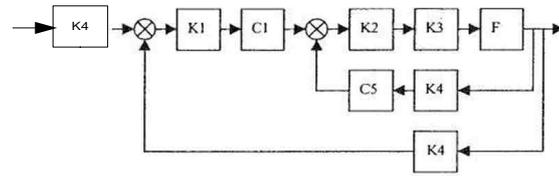
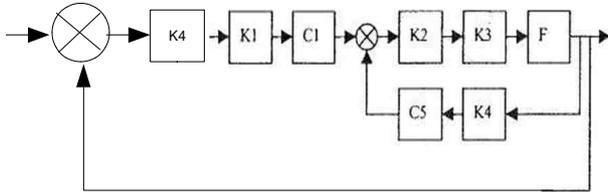
Question 6 : Indiquer la valeur à prendre pour ce gain d'adaptation de manière à pouvoir rendre le schéma-bloc à retour unitaire (comparaison directe entre l'angle de consigne θ_c et l'angle réel θ). Donner alors ce schéma-bloc à retour unitaire.

On peut se ramener à un schéma-bloc de la forme suivante :



puis pour comparer les deux angles directement il suffit d'ajouter un bloc K4 entre l'entrée et le premier sommateur.

Il suffit alors de 'rentrer' le K4 dans la chaîne d'action.



Question 7 : Déterminer la fonction de transfert $\frac{U_a(p)}{E(p)}$ sous forme canonique de manière littérale. Au vu de cette fonction de transfert, indiquer dans quel paramètre intervient le gain K_5 . Quel est alors l'intérêt d'utiliser ce correcteur PD dans la boucle de retour ?

On a
$$U_0(p) = K_4 H(p) K_3 K_2 (E(p) - K_5 p U_0(p)) \quad \text{soit} \quad \frac{U_0(p)}{E(p)} = \frac{K_4 H(p) K_3 K_2}{1 + K_4 H(p) K_3 K_2 K_5 p} = \frac{K_4 K_3 K_2}{k \left(1 + T p + \frac{J}{k} p^2 \right) + K_4 K_3 K_2 K_5 p}$$

Soit en mettant sous forme canonique :
$$1 + \left(T + K_4 K_3 K_2 K_5 / k \right) p + \frac{J}{k} p^2$$

On constate donc que le gain K_5 intervient uniquement sur le coefficient d'amortissement de cette fonction du second ordre. Il a donc pour rôle d'atténuer les oscillations (qui étaient certainement très importantes sur le système non bouclé), étant donné que les dépassements ne dépendent que du coefficient d'amortissement.

Question 8 : Quel est le critère que l'on souhaite améliorer en mettant dans la chaîne directe un correcteur dit proportionnel intégral $K_1 \frac{1 + T_i p}{T_i p}$. Justifier succinctement.

Le correcteur PI permet d'améliorer la précision car il augmente la classe de la FTBO du système (qui est alors de 1). Le système sera donc précis pour une entrée en échelon.

Question 9 : A partir de la réponse indicielle Figure 8, proposer en le justifiant un modèle du second ordre (des valeurs numériques sont attendues) pour la fonction de transfert en boucle fermée Figure 5. Vérifier que le modèle proposé est cohérent vis à vis des diagrammes de Bode en boucle fermée (on extrapolera les diagrammes de Bode si nécessaire).

Sur la figure 8 on reconnaît un second ordre grâce à la tangente nulle à l'origine :

- le gain est de $2,4 \cdot 10^{-4}$ rad
- le premier dépassement est de l'ordre de 0,1 pour 2,4 de valeur de convergence soit 4% donc avec l'abaque des dépassements transitoires on en déduit un coefficient d'amortissement de 0,7.
- le temps de réponse à 5% est de 1,2 ms donc avec l'abaque du temps de réponse réduit : $\omega_0 = \frac{5}{0,0012} = 2500 \text{ rad/s}$

En observant la figure 7 du diagramme de Bode en boucle fermée on a un second ordre en extrapolant la courbe de phase et en constatant que la pente dans le diagramme de gain est de l'ordre de -40 dB/décade :

- le gain est de $20 \log K = -72 \text{ dB}$ soit $K = 3 \cdot 10^{-4}$ rad ce qui est assez proche.
- la fréquence de cassure (obtenue par intersection des asymptotes sur la courbe de gain) est de 400 Hz soit $\omega_0 \approx 2500 \text{ rad/s}$
- pour cette fréquence le gain est de -74,3 dB soit $20 \log \left(\frac{K}{2z} \right) = -74$ ou $-72 - 20 \log(2z) = -74,3$ d'où $z = 0,7$ environ (on pouvait penser que n'ayant pas de résonance visible l'amortissement était proche de 0,7)

Question 10 : Analyser les performances du prototype vis à vis du cahier des charges. Pour cela, faire les tracés nécessaires sur les courbes du document réponse.

Sur les diagrammes de Bode, on mesure :

- une bande passante à -3dB de 500 Hz, le CDC stipulait une bande passante à -3 dB > 400 Hz, le CDC est respecté (il vaut mieux une bande passante plus grande pour des questions de rapidité)
- un déphasage de 20° à 50Hz, c'est la valeur demandé par le CDC

Sur la réponse indicielle, on relève :

- un dépassement de 10%, or le CDC demandait un dépassement maximum de 10% (CDC juste respecté)
- le système est stable (pas d'oscillation)
- un temps de réponse à 90% de 1ms (mesuré depuis l'origine de l'échelon de consigne) : le CDC demandait un temps inférieur à 2ms, celui-ci est respecté.

Question 11 : Déduire du relevé de bruit que la résolution sur le ciel (ou sur le basculement mécanique) est conforme

Le bruit mesuré ne dépasse pas 2 carreaux se qui correspond à 1 microradian sur le miroir. Or la résolution imposée par le CDC sur le basculement mécanique est de 3 microradians, ce qui veut dire que l'on ne souhaite pas obtenir une résolution trop fine. Ainsi le bruit sera compris dans l'erreur que l'on accepte pour le mécanisme. La résolution du ciel, qui est liée au basculement mécanique, est alors conforme au cahier des charges.