A.V. Energie – Puissance

A.V.1 Energie cinétique

A.V.1.a Définition

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_E \vec{V}^2(M,S/R_0)\,dm$$

L'énergie cinétique est un scalaire.

A.V.1.b Cas d'un solide

• **Calcul**

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_E \vec{V}^2(M,S/R_0)\,dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}(G,S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right)^2 dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}^2(G,S/R_0)\,dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right)^2 dm + \int_S \vec{V}(G,S/R_0).\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\,dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\int_S \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}.\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\,dm$$
$$+\vec{V}(G,S/R_0).\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\int_S \overrightarrow{GM}\,dm\right)$$

$$\int_S \overrightarrow{GM}\,dm = 0$$

$$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} = \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}.\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right) = (\vec{v}\wedge\vec{w}).\vec{u} = \overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right).\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\int_S \overrightarrow{GM}\wedge\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\,dm$$

• **Récapitulatif**

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(G,S/R_0)$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}M\vec{V}(G,S/R_0)\\ \vec{\sigma}(G,S/R_0)\end{Bmatrix}_G.\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R_0)\\ \vec{V}(G,S/R_0)\end{Bmatrix}_G=\frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R_0}\}\{\mathcal{V}_{S/R_0}\}$$

Rappel : un comoment est un invariant indépendant du point d'expression des deux torseurs, on pourra donc le calculer en d'autres points :

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}M\vec{V}(G,S/R_0)\\ \vec{\sigma}(A,S/R_0)\end{Bmatrix}_A.\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R_0)\\ \vec{V}(A,S/R_0)\end{Bmatrix}_A$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(A,S/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

A.V.1.c Cas d'un ensemble matériel

L'énergie cinétique d'un ensemble E de N solides S_i est obtenue en calculant l'énergie cinétique de chaque solide puis en faisant la somme au même point:

$$T(E/R_0)=\sum_{i=1}^{N}T(S_i/R_0)$$

A.V.1.d Cas particuliers

A.V.1.d.i Masses et inerties négligées

Négliger masses et inerties d'un solide revient à avoir une énergie cinétique nulle :

$$T(S/R_0)=0$$

A.V.1.d.ii Rotation autour d'un point A fixe dans R_0

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R_0}\}\{\mathcal{V}_{S/R_0}\}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}M\vec{V}(G,S/R_0)\\ \vec{\sigma}(A,S/R_0)\end{Bmatrix}_A.\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R_0)\\ \vec{V}(A,S/R_0)\end{Bmatrix}_A$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(A,S/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(A,S/R_0)$$

A.V.1.d.iii Mouvements plans dans $(O,\vec{x},\vec{y})$

- **Mouvement de translation**

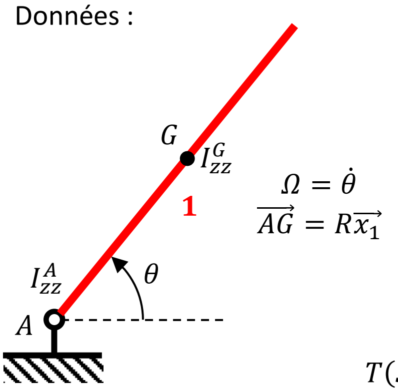
Dans le cas d'un solide S en translation à la vitesse V, on a :

$$\vec{\Omega}(S/R_0)=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad T(S/R_0)=\frac{1}{2}MV^2$$

- **Mouvement de rotation**

Dans le cas d'un solide S en rotation autour d'un axe fixe $(A,\vec{z})$ dans R_0 tel que $AG=R$

Données :



$$\vec{\Omega}(S/R_0)=\Omega\vec{z}$$

$I_{(G,\vec{z})}=I_{zz}^G$ le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$

$I_{(A,\vec{z})}=I_{zz}^A$ le moment d'inertie de S par rapport à l'axe de rotation $(A,\vec{z})$

M masse de 1 de centre de gravité G

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2+\frac{1}{2}I_{zz}^G\Omega^2=\frac{1}{2}\Omega^2 I_{zz}^A$$

Preuve :

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2+\frac{1}{2}\Omega^2\vec{z}.\left[I(G,S)\vec{z}\right]$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2+\frac{1}{2}I_{zz}^G\Omega^2=\frac{1}{2}\left(I_{zz}^G+MR^2\right)\Omega^2$$

D'après le théorème de Huygens généralisé uniquement sur le terme zz, on a :

$$I_{zz}^A=I_{zz}^G+M(x^2+y^2)=I_{zz}^G+MR^2$$

$$\Rightarrow T(S/R_0)=\frac{1}{2}I_{zz}^A\Omega^2$$

On peut aussi directement utiliser la formule en A : $T(S/R_0)=\frac{1}{2}\Omega^2\vec{z}.\left[I(A,S)\vec{z}\right]=\frac{1}{2}I_{zz}^A\Omega^2$

Remarque :

Dans le cas d'une masse ponctuelle en G en rotation, on a : $I_{zz}^G=0; I_{zz}^A=MR^2$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2\quad;\quad \textit{Masse ponctuelle}$$

- **Mouvement de translation et de rotation**

Il suffit d'ajouter les deux termes précédents en décomposant le mouvement en une translation, et une rotation.

A.V.2 Puissances

A.V.2.a Torseur s'exerçant sur un ou plusieurs solides indéformables

A.V.2.a.i Cas d'un solide

La puissance dans le référentiel R_0 développée par un torseur $\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}$ s'exerçant sur un solide S en mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}\{\mathcal{V}(S/R_0)\}$$

La puissance est le comoment des torseurs d'effort et cinématique effectué en un point quelconque A :

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{\bar{S}\to S} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R}_{\bar{S}\to S})} \end{matrix}\right\}_A . \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A,S/R_0) \end{matrix}\right\}_A = \vec{R}_{\bar{S}\to S}.\vec{V}(A,S/R_0) + \overrightarrow{M_A(\vec{R}_{\bar{S}\to S})}.\vec{\Omega}(S/R_0)$$

On reconnaît des termes connus : FV et $C\omega$

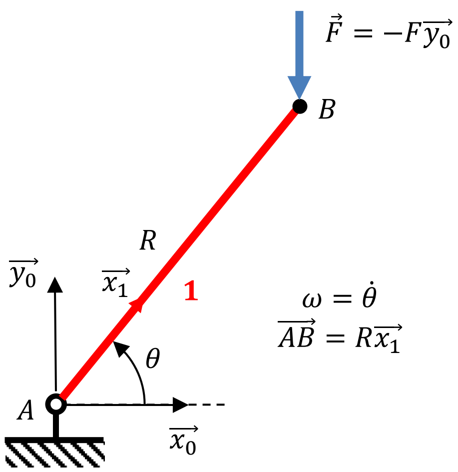
Dans le cas d'une liaison extérieure parfaite :

$$P_{ext}(L_{parfaite} \to S/R_0) = 0$$

Remarques :

- Le résultat d'un comoment est indépendant du point
- Le comoment de deux torseurs doit être calculé avec les torseurs exprimés au même point
- La puissance dépend du repère dans lequel elle est calculée

Exemple : Supposons la liaison 1/0 parfaite



$$\omega = \dot{\theta}$$
$$\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{x_1}$$

$$P_{F\to 1} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}} \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}}$$
$$= \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}} \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -FR\cos\theta \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}}$$
$$= \left\{\begin{matrix} 0 & -R\omega\sin\theta \\ 0 & R\omega\cos\theta \\ \omega & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}} \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}}$$
$$= -FR\cos\theta\,\omega$$

$$P_{0\to 1} = \left\{\begin{matrix} \omega & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_O^{\mathfrak{B}} \left\{\begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix}\right\}_O^{\mathfrak{B}} = 0$$

Ne pas oublier les liaisons extérieures, parfaites ou non !

A.V.2.a.ii Cas de plusieurs solides

Pour déterminer la puissance des actions extérieures sur un ensemble E de N solides S_i, il suffit de sommer les puissances de chaque action extérieure sur l'ensemble de solides isolés :

$$P(\bar{S} \rightarrow E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{S} \rightarrow S_i/R_0)$$

A.V.2.b Inter-efforts

A.V.2.b.i Entre deux solides

La puissance développée par les efforts de liaison entre deux solides S_i et S_j ou « puissance des inter-efforts entre S_i et S_j » s'écrit :

$$P(S_i, S_j) = P(S_j, S_i) = \left\{\mathcal{T}_{S_i \rightarrow S_j}\right\}\left\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\right\}$$

La puissance des inter-efforts est le comoment des torseurs statique et cinématique du mouvement relatif de S_i et S_j en un point A quelconque :

$$P(S_i, S_j) = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}} \\ \overrightarrow{M_A\left(\overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}}\right)} \end{matrix}\right\}_A \cdot \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_j/S_i) \\ \vec{V}(A, S_j/S_i) \end{matrix}\right\}_A = \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}} \cdot \vec{V}(A, S_j/S_i) + \overrightarrow{M_A\left(\overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}}\right)} \cdot \vec{\Omega}(S_j/S_i)$$

Remarques :

- $P(S_j, S_i) = P(S_i, S_j) \leq 0$ dans les liaisons – Actions et mouvements sont opposés et créent des pertes
- $P(S_j, S_i) \geq 0$ dans le cas d'une liaison motorisée (moteur par exemple)
- Attention au jeu d'indices i et j
- La référence à un référentiel R_0 disparaît.
- La liaison entre deux solides est énergétiquement parfaite si $P(S_i, S_j) = 0$.

Exemples :

Pivot intérieure parfaite	Pivot avec frottement C_f de signe opposé à P_{10}
$P(1,0) = \begin{Bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}} = 0$	$P(1,0) = \begin{Bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} \begin{Bmatrix} X_{01} & C_f \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}} = P_{10}C_f$

A.V.2.b.ii Entre N solides

Soit un ensemble matériel composé de N solides. La puissance des inter-efforts entre les N solides est définie par :

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} P(S_i, S_j)$$

Démonstration : Pour chaque solide, la puissance développé par les N-1 autres solide est :

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{N} P(S_j \rightarrow S_i/R_g)$$

Pour les N solides, on a donc :

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} P(S_j \rightarrow S_i/R_g)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} P(S_j \rightarrow S_i/R_g) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N-1} P(S_j \rightarrow S_i/R_g)$$

Or :

$$P(S_j \rightarrow S_i/R_g) = \left\{\mathcal{T}_{S_j \rightarrow S_i}\right\}\left\{\mathcal{V}(S_i/R_g)\right\}$$

$$P(S_i \rightarrow S_j/R_g) = \left\{\mathcal{T}_{S_i \rightarrow S_j}\right\}\left\{\mathcal{V}(S_j/R_g)\right\}$$

$$P(S_j \rightarrow S_i/R_g) + P(S_i \rightarrow S_j/R_g) = \left\{\mathcal{T}_{S_j \rightarrow S_i}\right\}\left\{\mathcal{V}(S_i/R_g)\right\} + \left\{\mathcal{T}_{S_i \rightarrow S_j}\right\}\left\{\mathcal{V}(S_j/R_g)\right\}$$

$$= \left\{\mathcal{T}_{S_i \rightarrow S_j}\right\}\left\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} P(S_i, S_j)$$

A.V.2.c « Puissances réciproques » entre 2 solides

Le terme de « puissances réciproques » n'est pas officiel. Il existe une relation entre la puissance Galiléenne des actions réciproques entre deux solides :

$$P(S_i,S_j) = P(S_j \to S_i/R_0) + P(S_i \to S_j/R_0)$$

Démonstration :

$$P(S_j \to S_i/R_0) = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{S_j\to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j\to S_i}\right)} \end{matrix}\right\}_A \cdot \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_i/R_0) \\ \vec{V}(A,S_i/R_0) \end{matrix}\right\}_A$$

Or :

$$\left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_i/R_0) \\ \vec{V}(A,S_i/R_0) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_i/S_j) \\ \vec{V}(A,S_i/S_j) \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_j/R_0) \\ \vec{V}(A,S_j/R_0) \end{matrix}\right\}_A$$

D'où :

$$P(S_j \to S_i/R_0) = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{S_j\to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j\to S_i}\right)} \end{matrix}\right\}_A \cdot \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_i/S_j) \\ \vec{V}(A,S_i/S_j) \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{S_j\to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j\to S_i}\right)} \end{matrix}\right\}_A \cdot \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_j/R_0) \\ \vec{V}(A,S_j/R_0) \end{matrix}\right\}_A$$

Et :

$$\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{S_j\to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j\to S_i}\right)} \end{matrix}\right\}_A = -\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{S_i\to S_j} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_i\to S_j}\right)} \end{matrix}\right\}_A$$

Donc :

$$P(S_j \to S_i/R_0) = P(S_i,S_j) - \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{S_i\to S_j} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_i\to S_j}\right)} \end{matrix}\right\}_A \cdot \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_j/R_0) \\ \vec{V}(A,S_j/R_0) \end{matrix}\right\}_A$$

Soit :

$$P(S_j \to S_i/R_0) = P(S_i,S_j) - P(S_i \to S_j/R_0)$$

$$P(S_i,S_j) = P(S_j \to S_i/R_0) + P(S_i \to S_j/R_0)$$

Attention : si la liaison entre S_i et S_j est parfaite :

$$P(S_j \to S_i/R_0) = -P(S_i \to S_j/R_0) \neq 0$$

L'isolement de S_i ou S_j doit tenir compte de cette puissance.

A.V.3 Théorème de l'énergie cinétique

A.V.3.a Enoncé

Le théorème de l'énergie cinétique (TEC) s'exprime pour un solide ou un ensemble de solides dans son mouvement par rapport à un référentiel Galiléen R_g. On précise donc toujours le système isolé.

Ce théorème est aussi appelé Théorème de **l'énergie puissance**.

A.V.3.a.i Cas d'un solide

A chaque instant, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique Galiléenne du solide S est égale à la puissance galiléenne développée par les efforts extérieurs s'exerçant sur S.

$$\frac{dT(S/R_g)}{dt} = P_{ext}$$

$$P_{ext} = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

Cette relation produit une équation différentielle qui n'est pas indépendante de celles obtenues à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

Démonstration :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}$$

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}.\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}.\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}.\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = M\vec{\Gamma}(G,S/R_g).\vec{V}(A,S/R_g) + \vec{\delta}(A,S/R_g).\vec{\Omega}(S/R_g)$$

$$= \int_S \vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\,.\vec{V}(A,S/R_g)dm + \left[\int_E \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g)$$

$$= \int_S \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_g)}{dt}\right)_{R_g}.\left[\vec{V}(M,S/R_g) + \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Omega}(S/R_g)\right]dm + \left[\int_E \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g)$$

$$= \int_S \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_g)}{dt}\right)_{R_g}.\vec{V}(M,S/R_g)dm + \int_S \vec{\Gamma}(M,S/R_g).\left[\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Omega}(S/R_g)\right]dm + \left[\int_E \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g)$$

Or :

$$\int_S \vec{\Gamma}(M,S/R_g).\left[\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Omega}(S/R_g)\right]dm - \left[\int_E \vec{\Gamma}(M,S/R_g)\wedge\overrightarrow{AM}dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g) = 0$$

Car

$$\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}$$

Soit :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}.\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \int_S \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_g)}{dt}\right)_{R_g}.\vec{V}(M,S/R_g)dm$$

$$= \int_S \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\vec{V}^2(M,S/R_g)\right]dm$$

$$= \frac{d}{dt}\int_S \left[\frac{1}{2}\vec{V}^2(M,S/R_g)\right]dm$$

$$= \frac{dT(S/R_g)}{dt}$$

Finalement :

$$\frac{dT(S/R_g)}{dt} = P(\bar{S} \to S/R_g)$$

A.V.3.a.ii Cas d'un ensemble de solides US_i

A chaque instant, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique Galiléenne d'un ensemble de solides US_i est égale à la puissance galiléenne développée par les efforts extérieurs s'exerçant sur US_i augmentée de la puissance des inter-efforts développés dans les liaisons.

$$\frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$P_{ext} = P(\overline{US_i} \to US_i/R_g)$$

$$P_{int} = P_i(US_i) \leq 0$$

Cette formule s'applique dans le cas d'un solide car $P_{int} = 0$.

Démonstration :

Soit un ensemble matériel composé de N solides. Appliquons le TEC à chacun des N solides :

$$\frac{dT(S_i/R_g)}{dt} = P(\bar{S_i} \to S_i/R_g) = P(\bar{E} \to S_i/R_g) + \sum_{j=1,j\neq i}^{N} P(S_j \to S_i/R_g)$$

Pour les N solides, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{dT(S_i/R_g)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{E} \to S_i/R_g) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} P(S_j \to S_i/R_g)$$

$$\frac{dT(E/R_g)}{dt} = P(\bar{E} \to E/R_g) + P_i(E)$$

A.V.3.a.iii Forme intégrée

L'intégration des relations précédentes entre les instants t_1 et t_2 donne la variation d'énergie cinétique Galiléenne de S entre les instants t_1 et t_2:

$$T_2(US_i/R_g) - T_1(US_i/R_g) = W_{1,2}(\overline{US_i} \rightarrow US_i/R_g) + Wi_{1,2}(US_i)$$

$W_{1,2}(\overline{US_i} \rightarrow US_i/R_g)$ est le travail Galiléen des efforts extérieurs à E entre t_1 et t_2.

$Wi_{1,2}(US_i)$ est le travail des efforts intérieurs à E entre t_1 et t_2.

Cette forme intégrée du théorème permet de comparer des états d'un système à deux instants.

A.V.3.b Inerties et masses équivalentes

Afin de simplifier les problèmes traités avec le théorème de l'énergie cinétique, on demande souvent avant de l'appliquer de déterminer une inertie équivalente ou une masse équivalente d'un ensemble de solides en mouvement.

L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces. En général, cette pièce étudiée est la pièce dont on veut la loi de mouvement. Sinon, il suffit d'utiliser les relations cinématiques pour avoir celle d'autres pièces.

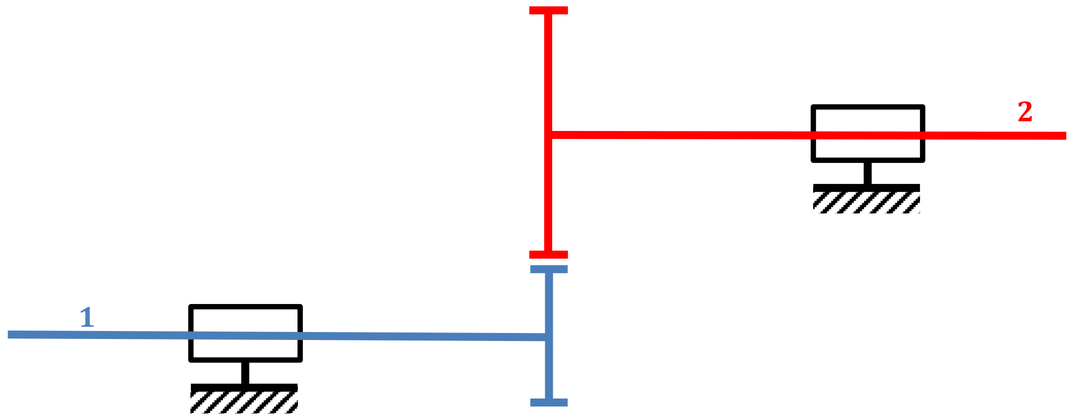
Cela consiste à exprimer l'énergie cinétique d'un ensemble de pièces en mouvement de la forme :

$$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2}J_{eq}\omega^2 \quad ou \quad T(US_i/R_0) = \frac{1}{2}M_{eq}V^2$$

ω ou V étant une des inconnues cinématiques du système.

Exemple 1 :

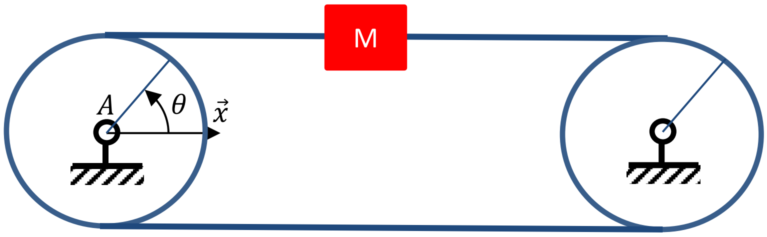
On souhaite déterminer la loi d'accélération de l'arbre d'entrée d'un réducteur en tenant compte des masses et inerties de toutes les pièces à accélérer et des actions extérieures :



Pour déterminer la loi de mouvement de l'un des arbres, on détermine l'inertie équivalente de l'ensemble ramenée à l'arbre étudié puis on détermine sa loi de mouvement en appliquant le TEC. On peut alors en plus obtenir la loi de mouvement de l'autre arbre avec le rapport de réduction.

Exemple 2 :

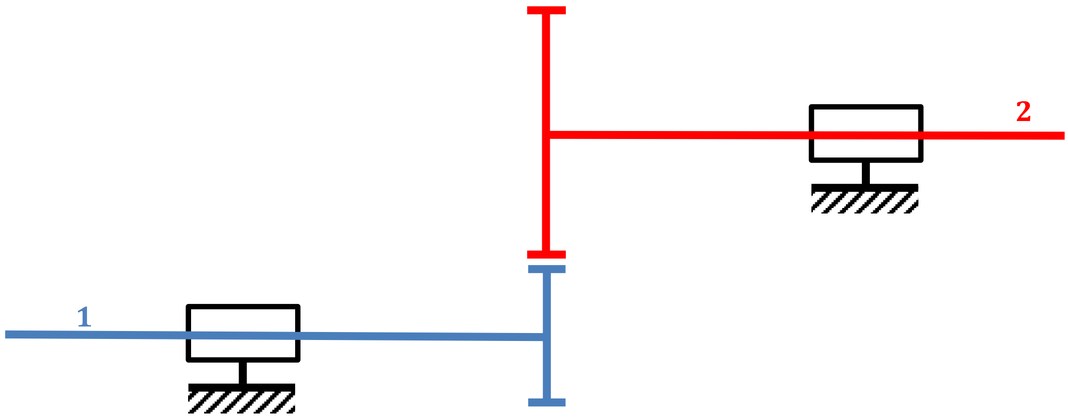
On souhaite déterminer la loi d'accélération de la masse entraînée par une courroie en tenant compte de sa masse M et des inerties des deux roues à accélérer et des actions extérieures :



Pour déterminer la loi de mouvement de la masse, on détermine la masse équivalente de l'ensemble puis on détermine sa loi de mouvement en appliquant le TEC. On peut alors en plus obtenir la loi de mouvement des poulies avec la relation $V = R\dot{\theta}$.

Dans ce problème : on néglige masse et inertie de la courroie et on suppose qu'elle ne l'allonge pas sous l'effet des actions mécaniques qui s'exercent dedans.

A.V.3.b.i Inertie équivalente



Prenons l'exemple d'un réducteur composé de deux arbres 1 et 2 en liaison pivot avec le bâti de rapport de réduction $k = \frac{\omega_2}{\omega_1}$

On peut exprimer deux inerties équivalentes pour ce problème :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2}{J_{eq}}^1{\omega_1}^2$$

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2}{J_{eq}}^2{\omega_2}^2$$

${J_{eq}}^1$ sera appelée « Inertie équivalente ramenée à l'arbre 1 »

${J_{eq}}^2$ sera appelée « Inertie équivalente ramenée à l'arbre 2 »

Dans l'exemple proposé, on aura :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2}J_1{\omega_1}^2 + \frac{1}{2}J_2{\omega_2}^2 = \frac{1}{2}J_1{\omega_1}^2 + \frac{1}{2}J_2k^2{\omega_1}^2 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2k^2){\omega_1}^2$$

$${J_{eq}}^1 = J_1 + J_2k^2$$

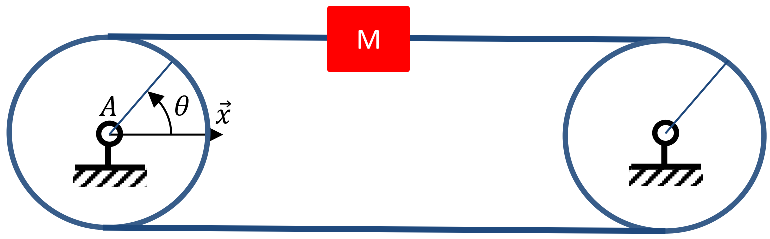
Ou alors :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2}J_1{\omega_1}^2 + \frac{1}{2}J_2{\omega_2}^2 = \frac{1}{2}\frac{J_1}{k^2}{\omega_2}^2 + \frac{1}{2}J_2{\omega_2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}J_1 + J_2\right){\omega_2}^2$$

$${J_{eq}}^2 = \frac{J_1}{k^2} + J_2$$

A.V.3.b.ii Masse équivalente

Soit le système suivant composé d'une masse M (solide 3) en translation à la vitesse V et de deux poulies 1 et 2 d'inerties J autour de leurs axes de rotation de vitesse de rotation ω :



On a la relation :

$$V = R\omega$$

On néglige le poids de la courroie. L'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement vaut :

$$T(1U2U3/R_0) = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2 = J\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

On peut soit déterminer une inertie équivalente ramenée à un arbre d'une des poulies

$$T(1U2U3/R_0) = \frac{1}{2}J_{eq}\omega^2 = \frac{1}{2}(2J)\omega^2 + \frac{1}{2}(MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(2J + MR^2)\omega^2$$

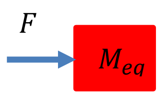
$$J_{eq} = 2J + MR^2$$

On peut aussi exprimer la masse équivalente du système :

$$T(1U2U3/R_0) = \frac{1}{2}M_{eq}V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2J}{R^2}\right)V^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2J}{R^2} + M\right)V^2$$

$$M_{eq} = \frac{2J}{R^2} + M$$

Ainsi, on peut connaître la loi de mouvement de la masse en intégrant l'inertie des deux roues avec le modèle simplifié :



Où F est soit une action directement appliquée à la masse M du modèle initial, soit $F = \frac{C}{R}$ si un couple est appliqué à l'une des poulies.

Le TEC nous donnera :

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}M_{eq}V^2\right)}{dt} = FV \Leftrightarrow M_{eq}\dot{V}V = FV \Leftrightarrow M_{eq}\dot{V} = F \; si \; V \neq 0 \Leftrightarrow \dot{V} = \frac{F}{M_{eq}}$$

A.V.3.c Applications usuelles du TEC

A.V.3.c.i Deux types d'applications

Le TEC nous donne une équation différentielle liant actions entrée/sortie, inerties et accélérations. Cette équation est généralement utilisée de deux manières différentes selon le contexte :

- Recherche de la relation entrée sortie en effort pour un régime permanent, souvent à vitesse nulle
- Recherche de la loi d'accélération des pièces d'un mécanisme en régime non permanent

A.V.3.c.ii Relation entrée/sortie en efforts/couples en régime permanent

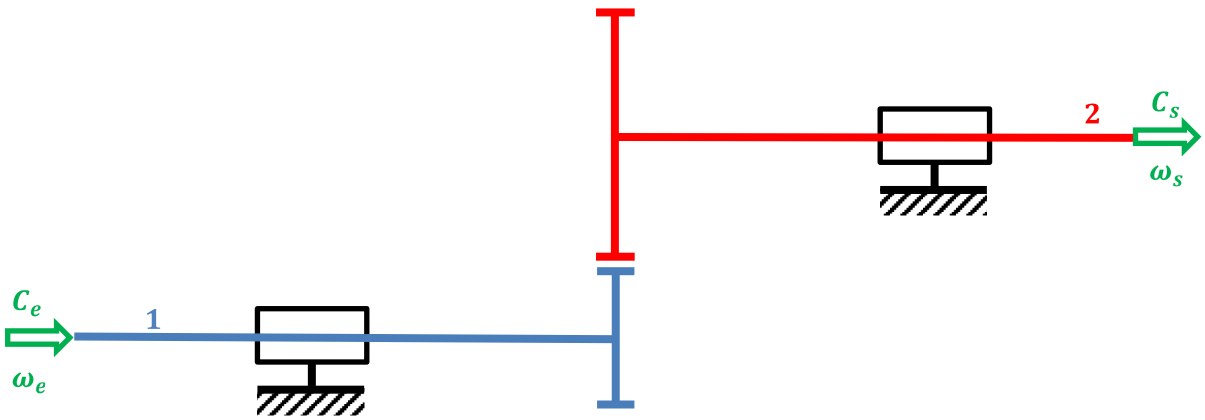
Connaissant la relation cinématique entre une entrée et une sortie d'un mécanisme à une mobilité, l'application du théorème de l'énergie cinétique permet d'obtenir immédiatement la relation en effort entre l'entrée et la sortie.

Attention toutefois à certaines précisions et hypothèses nécessaires afin d'obtenir le bon résultat :

- Système isolé ?
- Référentiel Galiléen ?
- Liaisons parfaites ?
- Régime stationnaire ?

• **<u>Présentation du problème</u>**

Soit un réducteur dont le rapport de réduction vaut k : $k = \frac{\omega_s}{\omega_e}$ $(algébrique)$



On fait les hypothèses suivantes :

- On appelle J_1 et J_2 les moments d'inertie des solides S_1 et S_2 autour de leurs axes de rotation.
- C_e couple extérieur sur l'arbre d'entrée
- C_s couple extérieur sur l'arbre de sortie
- Le référentiel est supposé Galiléen.

On veut déterminer la relation entre C_s et C_e.

• **Inertie équivalente**

On isole l'ensemble des pièces suivantes : Arbre 1 – Arbre 2

Comme on l'a vu dans l'exemple traité plus tôt, dans le cas étudié, on a :

$$T(1U2/R_0) = T(1/R_0) + T(2/R_0) = \frac{1}{2}J_1{\omega_e}^2 + \frac{1}{2}J_2{\omega_s}^2 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2k^2){\omega_e}^2$$

$${J_{eq}}^e = J_1 + J_2k^2$$

• **Puissance extérieure**

Le terme P_{ext}, d'après la définition donnée précédemment, vaut dans notre cas :

$$P_{ext} = C_s\omega_s + C_e\omega_e$$

• **Relation entrée/sortie**

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{dT(1U2/R_0)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$${J_{eq}}^e\omega_e\dot{\omega}_e = C_s\omega_s + C_e\omega_e + P_{int}$$

Cette relation met en jeu vitesses de rotation et couples. Attention, connaissant la loi entrée/sortie en cinématique, cette relation permet de mettre en rapport des couples/efforts d'entrée sortie. Il ne faut pas faire l'inverse, sauf cas particulier. La relation entrée sortie cinématique est imposée par les pièces non déformables, et ne peut changer. Par contre, couples et efforts évoluent avec les pertes et les accélérations. Dans le seul cas où le régime est permanent avec un rendement égal à 1, si l'on connait la relation entre efforts/couples d'entrée et sortie, on peut en déduire la loi cinématique.

Remarque : il est bien plus rapide de mener une étude cinématique qu'une étude statique d'un système. La résolution cinématique donnant la relation entrée sortie cinématique, il est alors simple d'obtenir la relation entrée/sortie en efforts/couples. Ne surtout pas faire les deux démarches, et à choisir, faire une résolution cinématique.

Nous obtenons donc une relation entre les couples d'entrée et de sortie.

Introduisons alors des hypothèses supplémentaires généralement vérifiées :

- Liaisons parfaites à l'intérieur du système isolé et pas d'actions particulières entre les pièces : $P_{int} = 0$
- Régime stationnaire : $\omega_e = cste \rightarrow \dot{\omega}_e = 0 \rightarrow \frac{dT(1U2/R_0)}{dt} = 0$

On obtient alors la relation suivante :

$$C_s\omega_s + C_e\omega_e = 0$$

$$C_s = -C_e\frac{\omega_e}{\omega_s} = -\frac{C_e}{k}$$

En termes de puissance :

Les choix suivants ont beaucoup d'importance pour les signes. On nomme

- « Puissance d'entrée $P_{entrée}$ » la puissance fournie à l'arbre d'entrée par l'extérieur
- « Puissance de sortie P_{sortie} » la puissance que le système fournit en sortie à quelque chose d'extérieur
- C_e le couple extérieur sur l'arbre d'entrée
- C_s le couple extérieur sur l'arbre de sortie

On a alors :

$$C_e\omega_e = P_{entrée}$$

$$C_s\omega_s = -P_{sortie}$$

C_s couple extérieur sur 2 - P_{sortie} puissance sortante du réducteur

On a ainsi la relation :

$$P_{entrée} - P_{sortie} = 0$$

$$\boxed{P_{entrée} = P_{sortie}}$$

ATTENTION : cette relation n'est vraie que si : Référentiel Galiléen – Régime stationnaire – Liaisons parfaites

- **Puissance intérieure – Rendement**

Dans le cas où les liaisons ne sont pas parfaites, et **uniquement en régime stationnaire**, on introduit la notion de rendement :

$$P_{entrée} - P_{sortie} + P_{int} = 0$$

$$P_{sortie} = P_{entrée} + P_{int}$$

$$\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}} = 1 + \frac{P_{int}}{P_{entrée}} = \eta \leq 1 \quad ; \quad P_{int} \leq 0$$

Remarque : Connaissant le rendement η d'un système, on peut alors exprimer le terme de puissance intérieure P_{int} :

$$\boxed{P_{int} = -(1-\eta)P_{entrée}}$$

Il est courant d'oublier, à tort, le signe moins.

On a alors :

$$\frac{-C_s\omega_s}{C_e\omega_e} = \eta$$

On a ainsi la relation :

$$C_s = -\eta C_e \frac{\omega_e}{\omega_s} = -\frac{\eta}{k} C_e$$

$$C_s = -\frac{\eta}{k} C_e$$

Le rendement d'un système peut être exprimé en fonction des différents rendements de la transmission de puissance. Prenons l'exemple d'un réducteur à n roues dentées en série composé de $m = n - 1$ engrenages de rendements respectifs η_i, on introduit le rendement global pour le système :

$$\eta = \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}$$

Supposons que les liaisons entre les arbres des roues dentées et le bâti sont parfaites.

On montre facilement la relation suivante :

$$\eta = \prod_{i=1}^{m} \eta_i$$

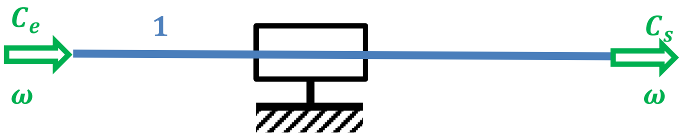
Démonstration :

Soit C_i et Ω_i la vitesse de rotation et le couple transitant à travers la roue dentée i. Soit P_i la puissance transitant à travers la roue dentée i.

$$\eta = \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}} = \frac{P_n}{P_1} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \dots \frac{P_2}{P_1} = \eta_{n-1} \eta_{n-1} \dots \eta_1 = \prod_{i=1}^{m} \eta_i$$

• **<u>Cas particulier d'un seul arbre</u>**

Reprenons ce que nous venons de voir dans le cas d'un seul arbre en rotation libre auquel on applique un couple d'entrée C :



On a :

$$J_{eq}{}^{e}\omega_e\dot{\omega}_e = (C_s + C_e)\omega + P_{int}$$

Supposons le cas où la vitesse est constante avec des pertes :

$$(C_s + C_e)\omega + P_{int} = 0$$

En sortie, du fait des pertes, le couple n'est pas identique à celui en entrée.

Supposons le cas où la vitesse est libre sans pertes :

$$J_{eq}{}^{e}\omega_e\dot{\omega}_e = (C_s + C_e)\omega$$

En sortie, de la variation de vitesse, le couple n'est pas identique à celui en entrée.

OUI : $C_s \neq C_e$!!!! dans le cas général

$$C_s = C_e \Leftrightarrow \begin{cases} Régime\ permanent \\ Liaisons\ parfaites \end{cases}$$

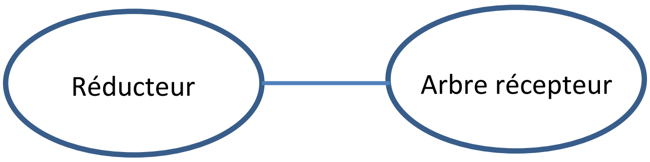
A.V.3.c.iii Détermination de lois d'accélération en régime non permanent

L'obtention des équations différentielles du mouvement permet d'obtenir les lois d'accélération de pièces connaissant la consigne en effort/couple en entrée. Prenons l'exemple d'un réducteur accouplé à un moteur et un récepteur dont l'arbre doit être accéléré « à vide », c'est-à-dire sans actions extérieures autres que celles de sa liaison avec le bâti et du réducteur. On sait que la consigne au niveau du moteur est un couple en échelon pendant un temps T et que la vitesse initiale des pièces est nulle.

La méthode la plus rapide si on ne souhaite obtenir que les équations différentielles du mouvement est l'utilisation du TEC.

• **Modélisation**

Généralement, on traite ce genre de problème en modélisant les différents éléments **en mouvement** par des bulles en précisant les caractéristiques importantes : rendement, puissances, vitesses, efforts/couples.

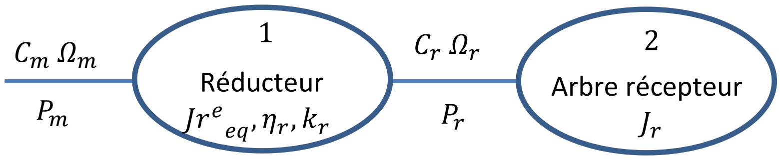


Remarques :

- On peut être tentés de mettre un bloc moteur, auquel cas il faudrait être attentif aux données associées : en entrée d'arbre moteur, considère-t-on un couple qui sera différent du couple en sortie d'arbre moteur du fait des accélérations et de son inertie, où bien des données de puissance électrique ? Lorsque l'on considère un échelon en couple moteur, entend-on un échelon sur la tension permettant d'obtenir une réponse du système, où bien un couple en sortie de l'arbre moteur… Pour simplifier la discussion, nous ne prendrons pas en compte le moteur et considérerons que **le couple moteur de type échelon est le couple qui entre dans le réducteur.**
- le réducteur est modélisé par une seule bulle, mais il serait possible de représenter une bulle par arbre par exemple. On introduira directement son inertie équivalente ramenée soit à l'arbre d'entrée $Jr^e{}_{eq}$, soit à l'arbre de sortie $Jr^e{}_{eq}$ ainsi que son rendement η_r et son rapport de réduction k_r.
- le récepteur est modélisé par un unique arbre. En réalité, s'il est plus complexe, on considèrera connaître l'inertie équivalente de l'ensemble du récepteur sur l'arbre de sortie du réducteur J_r.

Si l'énoncé d'un problème ne précise pas certaines grandeurs, il est recommandé d'introduire les paramètres manquants quitte à faire des hypothèses sur leurs valeurs à la fin. Nous supposerons que les liaisons entre les différents éléments sont parfaites, mis à part au niveau des engrenages du réducteur dont le rendement a été introduit.

On ajoute donc toutes les données nécessaires au traitement du problème :



• **Résolution**

Il convient ensuite d'appliquer un Théorème de l'Energie Cinétique en précisant les hypothèses retenues et l'isolement effectué.

On isole l'ensemble des pièces en mouvement : $\{1 - 2\}$ dans un référentiel supposé Galiléen R_0.

On applique le TEC :

$$\frac{dT(1U2/R_0)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

On met l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces mobiles sous la forme suivante faisant apparaître une inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2}J_{eq}{}^e {\omega_m}^2 = \frac{1}{2}\left(Jr^e{}_{eq} + {k_r}^2 Jr\right){\omega_m}^2$$

On exprime les termes de puissance à l'aide du rendement global η :

$$P_{int} = -(1-\eta)P_m$$

$$P_{ext} = C_m\omega_m$$

Soit :

$$J_{eq}{}^e \omega_m \dot{\omega}_m = C_m\omega_m - (1-\eta)P_m$$

$$J_{eq}{}^e \omega_m \dot{\omega}_m = P_m - P_m + \eta P_m$$

$$J_{eq}{}^e \omega_m \dot{\omega}_m = \eta C_m \omega_m$$

Si $\omega_m \neq 0$

$$J_{eq}{}^e \dot{\omega}_m = \eta C_m$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta C_m}{J_{eq}{}^e}$$