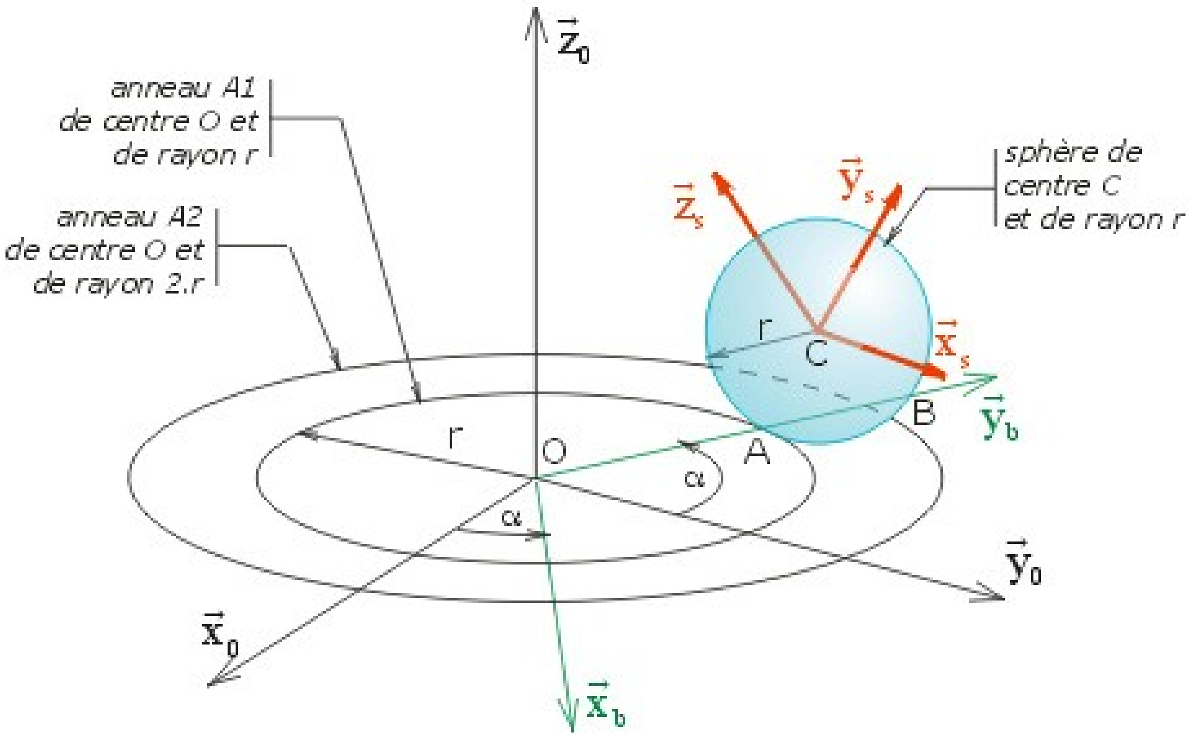
Enoncé

Considérons une sphère (1) de centre C et de rayon r astreinte à rester au contact de deux anneaux A_1 et A_2 centrés en O, de rayons respectifs r et 2r et disposés dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Les points de contact de la sphère avec les anneaux sont notés A et B. Les deux anneaux sont liés par encastrement à un bâti (0) . Le vecteur $\vec{y}_b$ oriente la droite (A,B).



1 On souhaite positionner le repère $R_S\left(C,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S\right)$ lié à la sphère par rapport au repère $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$.

1.1 Déterminer le nombre de paramètres positionnant la sphère par rapport à $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$.

1.2 La base $B_S\left(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S\right)$ est positionnée par rapport à $B_0\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$ par trois angles d'Euler :

$B_0 \xrightarrow{(\psi,\vec{z}_0)} B_1 \xrightarrow{(\theta,\vec{x}_1)} B_2 \xrightarrow{(\varphi,\vec{z}_2)} B_s$. Représenter les figures planes montrant la rotation des bases.

2 Exprimer le torseur cinématique de (1) par rapport à (0)

$$ {}_C\{\mathcal{V}_{1/0}\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0}\\ \vec{V}(C\in 1/0)\end{matrix}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{c|c} p_{10} & u_{10}\\ q_{10} & v_{10}\\ r_{10} & w_{10}\end{array}\right\}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} $$

3 Déterminer les vitesses $\vec{V}(A\in 1/0)$ et $\vec{V}(B\in 1/0)$ en fonction de p_{10}, q_{10}, r_{10} et α .

4 Déterminer le torseur ${}_A\{\mathcal{V}_{1/0}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0}\\ \vec{V}(A\in 1/0)\end{matrix}\right\}$ dans le cas de roulement sans glissement en A et en B.

Solution

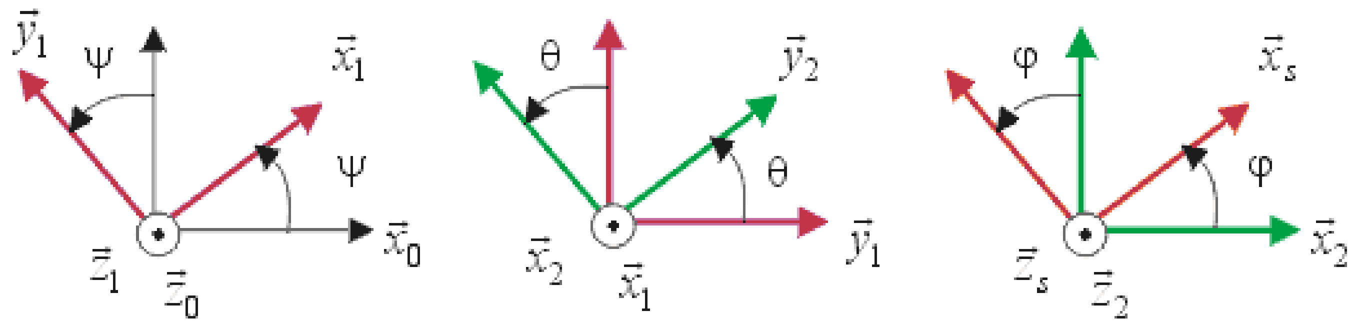
1.1 La sphère est normalement positionnée par rapport à $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ par six paramètres dont le ***CDG*** C de coordonnées cylindriques (ρ_C,α,z_C) et les trois angles d'Euler définis précédemment : $(\psi,\vec{z}_0),(\theta,\vec{x}_1),(\varphi,\vec{z}_2)$. Du fait de l'obstacle (liaison avec (0)) il existera des relations ***géométriques*** sur ces paramètres. Utilisons le fait que $\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = cte = \sqrt{\left(\frac{3}{2}r\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.r\right)^2} = r.\sqrt{3}$ et que

$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}r.\vec{y}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}.r.\vec{z}_0$.

On a donc $\boxed{\overrightarrow{OC}.\vec{y}_0 = \rho_C = \frac{3}{2}.r}$ et $\boxed{\overrightarrow{OC}.\vec{z}_C = z_C = \frac{\sqrt{3}}{2}.r}$. Il reste donc quatre paramètres pour

positionner la sphère par rapport à $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: $\boxed{\alpha,\underbrace{(\psi,\vec{z}_0),(\theta,\vec{x}_1),(\varphi,\vec{z}_2)}_{angles}}$

1.2 La représentation plane des rotations est la suivante :



$$B_0(\vec x_0,\vec y_0,\vec z_0)\xrightarrow{(\psi,\vec z_0)}B_1(\vec x_1,\vec y_1,\vec z_1)\xrightarrow{(\theta,\vec x_1)}B_2(\vec x_2,\vec y_2,\vec z_2)\xrightarrow{(\varphi,\vec z_2)}B_S(\vec x_S,\vec y_S,\vec z_S)$$

2 Pour déterminer le torseur $_C\{\mathcal{V}_{1/0}\}$, déterminons dans un premier temps le vecteur rotation $\vec\Omega_{1/0}$.

D'après les angles d'Euler précédemment définis nous pouvons écrire : $\vec\Omega_{1/0}=\dot\psi.\vec z_0+\dot\theta.\vec x_1+\dot\varphi.\vec z_2$. En projetant les différents vecteurs de base dans la base $B_b\left(\vec x_b,\vec y_b,\vec z_0\right)$ nous avons :

$$\vec\Omega_{1/0}=\dot\psi.\vec z_0+\dot\theta.\vec x_1+\dot\varphi.\underbrace{\vec z_2}_{\cos\theta.\vec z_1-\sin\theta.\vec y_1}$$ ce qui donne dans la base $B_0\left(\vec x_0,\vec y_0,\vec z_0\right)$:

$$\vec\Omega_{1/0}\left|\begin{array}{c}\dot\theta.\cos(\psi-\alpha)+\dot\varphi.\sin\theta.\sin(\psi-\alpha)\\ \dot\theta.\sin(\psi-\alpha)-\dot\varphi.\sin\theta.\cos(\psi-\alpha)\\ \dot\psi+\dot\varphi.\cos\theta\end{array}\right._{\left(\vec x_b,\vec y_b,\vec z_0\right)}$$

Pour déterminer maintenant entièrement le torseur, définissons le vecteur vitesse $\vec V(C\in 1/0)$. En utilisant la dérivée du vecteur position il vient:

$$\vec V(C\in 1/0)=\left.\frac{d\left(\overrightarrow{OC}\right)}{dt}\right)_{R_0}=\left.\frac{d\left(\frac{3}{2}r.\vec y_b+\frac{\sqrt3}{2}.r.\vec z_0\right)}{dt}\right)_{R_0}=\frac{3}{2}r.\left.\frac{d\left(\vec y_b\right)}{dt}\right)_{R_0}=-\frac{3}{2}r.\dot\alpha.\vec x_b\,.$$

Le torseur cinématique est donc défini par :

$$\boxed{{}_C\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0}\\ \vec{V}(C\in 1/0)\end{matrix}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}.\cos(\psi-\alpha)+\dot{\varphi}.\sin\theta.\sin(\psi-\alpha) & -\dfrac{3}{2}r.\dot{\alpha}\\ \dot{\theta}.\sin(\psi-\alpha)-\dot{\varphi}.\sin\theta.\cos(\psi-\alpha) & 0\\ \dot{\psi}+\dot{\varphi}.\cos\theta & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x}_b,\vec{y}_b,\vec{z}_0)}}$$

3 Pour déterminer les vitesses $\vec{V}(A\in 1/0)$ et $\vec{V}(B\in 1/0)$ en fonction de p_{10}, q_{10}, r_{10} et α, utilisons la relation liant les vitesses de deux points d'un même solide :

$\vec{V}(A\in 1/0)=\vec{V}(C\in 1/0)+\overrightarrow{AC}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$ avec $\overrightarrow{AC}=\dfrac{r}{2}.\vec{y}_b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.r.\vec{z}_0$ et

$\vec{\Omega}_{1/0}=p_{10}.\vec{x}_b+q_{10}.\vec{y}_b+r_{10}.\vec{z}_0$

$$\vec{V}(A\in 1/0)=-\frac{3}{2}r.\dot{\alpha}.\vec{x}_b+\left(\frac{r}{2}.\vec{y}_b+\frac{\sqrt{3}}{2}.r.\vec{z}_0\right)\wedge\left(p_{10}.\vec{x}_b+q_{10}.\vec{y}_b+r_{10}.\vec{z}_0\right)$$

$$\boxed{\vec{V}(A\in 1/0)=\left(-\frac{3}{2}r.\dot{\alpha}+\frac{r}{2}.r_{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}.r.q_{10}\right).\vec{x}_b+\frac{\sqrt{3}}{2}.r.p_{10}.\vec{y}_b-\frac{r}{2}.p_{10}.\vec{z}_0}$$

De la même manière en B :

$\vec{V}(B\in 1/0)=\vec{V}(C\in 1/0)+\overrightarrow{BC}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$ avec $\overrightarrow{BC}=-\dfrac{r}{2}.\vec{y}_b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.r.\vec{z}_0$

Nous obtenons :

$$\boxed{\vec{V}(B\in 1/0)=\left(-\frac{3}{2}r.\dot{\alpha}-\frac{r}{2}.r_{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}.r.q_{10}\right).\vec{x}_b+\frac{\sqrt{3}}{2}.r.p_{10}.\vec{y}_b+\frac{r}{2}.p_{10}.\vec{z}_0}$$

4 Pour déterminer le torseur ${}_A\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}={}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0}\\ \vec{V}(A\in 1/0)\end{matrix}\right\}$ traduisons le non glissement en A et en B :

D'après la question 3, on a :

$$\vec{V}(A\in 1/0)=\left(-\frac{3}{2}r.\dot{\alpha}+\frac{r}{2}.r_{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}.r.q_{10}\right).\vec{x}_b+\frac{\sqrt{3}}{2}.r.p_{10}.\vec{y}_b-\frac{r}{2}.p_{10}.\vec{z}_0$$

Le non glissement en A se traduira par $\vec{V}(A\in 1/0)=\vec{0}$. On obtient trois relations en projection dans la base $(\vec{x}_b,\vec{y}_b,\vec{z}_0)$:

$$\left|\begin{array}{ll} -\frac{3}{2}r.\dot{\alpha}+\frac{r}{2}.r_{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}.r.q_{10}=0 & 1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}.r.p_{10}=0 & 2) \\ -\frac{r}{2}.p_{10}=0 & 3) \end{array}\right.$$

De la même manière, le non glissement en B se traduira par :

$$\vec{V}(B\in 1/0)=\left(-\frac{3}{2}r.\dot{\alpha}-\frac{r}{2}.r_{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}.r.q_{10}\right).\vec{x}_b+\frac{\sqrt{3}}{2}.r.p_{10}.\vec{y}_b+\frac{r}{2}.p_{10}.\vec{z}_0=\vec{0}$$

Qui nous donnera aussi trois relations en projection sur $(\vec{x}_b,\vec{y}_b,\vec{z}_0)$:

$$\left|\begin{array}{ll} -\frac{3}{2}r.\dot{\alpha}-\frac{r}{2}.r_{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}.r.q_{10}=0 & 4) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}.r.p_{10}=0 & 5) \\ \frac{r}{2}.p_{10}=0 & 6) \end{array}\right.$$

Les relations 2),3),4) et 5) induisent : $\boxed{p_{10}=0}$

La somme terme à terme des relations 1) et 2) donne : $\boxed{q_{10}=-\sqrt{3}.\dot{\alpha}}$

L'utilisation de cette dernière relation et de la relation 1) donne : $\boxed{r_{10}=0}$

Le torseur cinématique traduisant la cinématique de la boule (1) par rapport au support sera donc :

$$\boxed{{}_{A}\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}={}_{A}\left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}_{1/0}\\ \vec{V}(A\in 1/0)\end{array}\right\}={}_{A}\left\{\begin{array}{c|c}0 & 0\\ q_{10}=-\sqrt{3}.\dot{\alpha} & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}_{(\vec{x}_b,\vec{y}_b,\vec{z}_0)}}$$