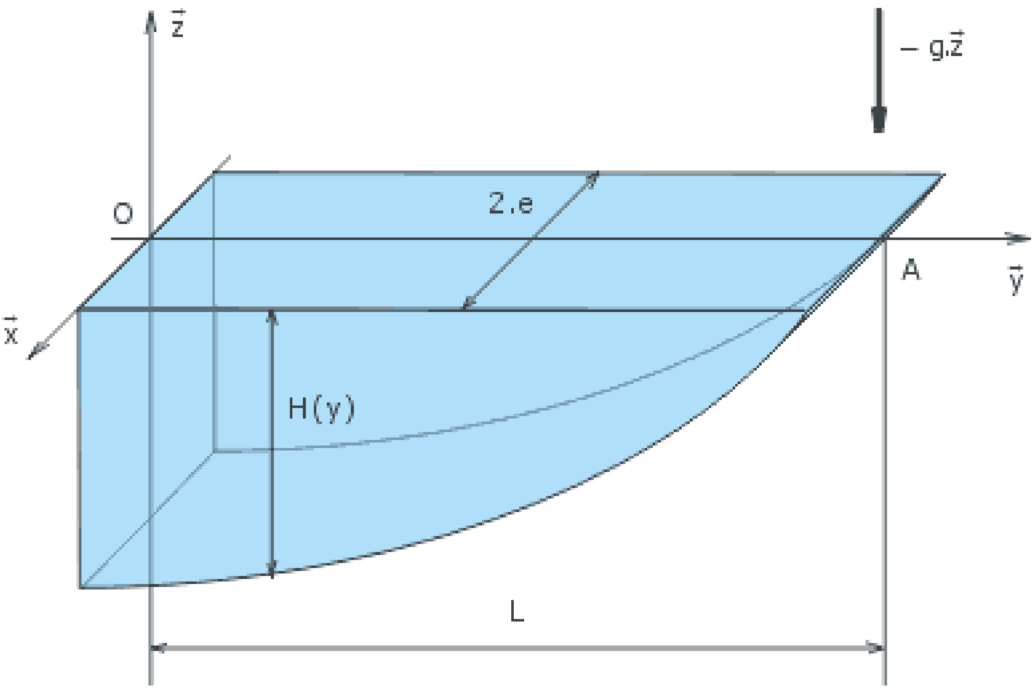
Enoncé

Considérons une poutre encastrée le longueur L , d'épaisseur $2.e$ et de hauteur $h(y)$ telle que $h(y) = a.y^2 + b.y + c$, $h(0) = -h$ et $h'(0) = 0$. Cette poutre est constituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ et est soumise aux actions de gravitation.



1 Caractériser la fonction $h(y)$ en fonction des données du problème

2 Exprimer en O le torseur représentatif des actions de gravitation sachant que l'accélération de la pesanteur est $-g.\vec{z}$.

Solution

1 Pour déterminer $h(y) = a.y^2 + b.y + c$, utilisons les conditions :

$$h(0) = -h \quad \rightarrow \quad c = -h$$

$$h(L) = 0 \quad \rightarrow \quad a.L^2 + b.L - h = 0$$

Cherchons ensuite $h'(y)$:

$h'(y) = 2.a.y + b$ avec $h'(0) = 0$. Il vient : $b = 0$

La fonction est donc :

$$\boxed{h(y) = h.\left(\frac{y^2}{L^2} - 1\right)}$$

2 Soit M un point courant du domaine soumis aux actions de gravitation. En M nous pouvons écrire :

$$_M\left\{dT_{Gravitation \rightarrow Poutre}\right\} = {}_M\begin{Bmatrix} -\rho.g.dv.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_M\begin{Bmatrix} -\rho.g.dx.dz.dy.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_O\left\{dT_{Gravitation \rightarrow Poutre}\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} -\rho.g.dv.\vec{z} \\ \overrightarrow{OM} \wedge -\rho.g.dv.\vec{z} \end{Bmatrix} \quad avec \quad \overrightarrow{OM} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

$$_O\left\{dT_{Gravitation \rightarrow Poutre}\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} -\rho.g.dv.\vec{z} \\ -\rho.g.\left(y.\vec{x} - x.\vec{y}\right).dv.\vec{z} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} -\rho.g.dx.dz.dy.\vec{z} \\ -\rho.g.\left(y.\vec{x} - x.\vec{y}\right).dx.dz.dy.\vec{z} \end{Bmatrix}$$

.

$$_O\left\{T_{Gravitation \rightarrow Poutre}\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} \displaystyle\int_0^L \int_{h(y)}^0 \int_{-e}^{e} -\rho.g.dx.dz.dy.\vec{z} \\ \displaystyle\int_0^L \int_{h(y)}^0 \int_{-e}^{e} -\rho.g.\left(y.\vec{x} - x.\vec{y}\right).dx.dz.dy \end{Bmatrix}$$

$$_O\left\{T_{Gravitation \rightarrow Poutre}\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} \displaystyle -2.e.\rho.g\int_0^L \left(\int_{h(y)}^0 dz\right).dy.\vec{z} \\ \displaystyle -2.e.\rho.g\int_0^L \left(y.\int_{h(y)}^0 dz\right).dy.\vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$_O\left\{T_{Gravitation \to Poutre}\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} 2.e.\rho.g\displaystyle\int_0^L h(y).dy.\vec{z} \\ 2.e.\rho.g\displaystyle\int_0^L \frac{y.h(y)}{2}.dy.\vec{x} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} 2.e.\rho.g\displaystyle\int_0^L h.\left(\frac{y^2}{L^2}-1\right).dy.\vec{z} \\ 2.e.\rho.g\displaystyle\int_0^L \frac{y.h.\left(\frac{y^2}{L^2}-1\right)}{2}.dy.\vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{_O\left\{T_{Gravitation \to Poutre}\right\} = {}_O\begin{Bmatrix} -2.e.\rho.g.h.\left(\dfrac{2.L}{3}\right)\vec{z} \\ -2.e.\rho.g.h.\left(\dfrac{L^2}{4}\right)\vec{x} \end{Bmatrix}}$$