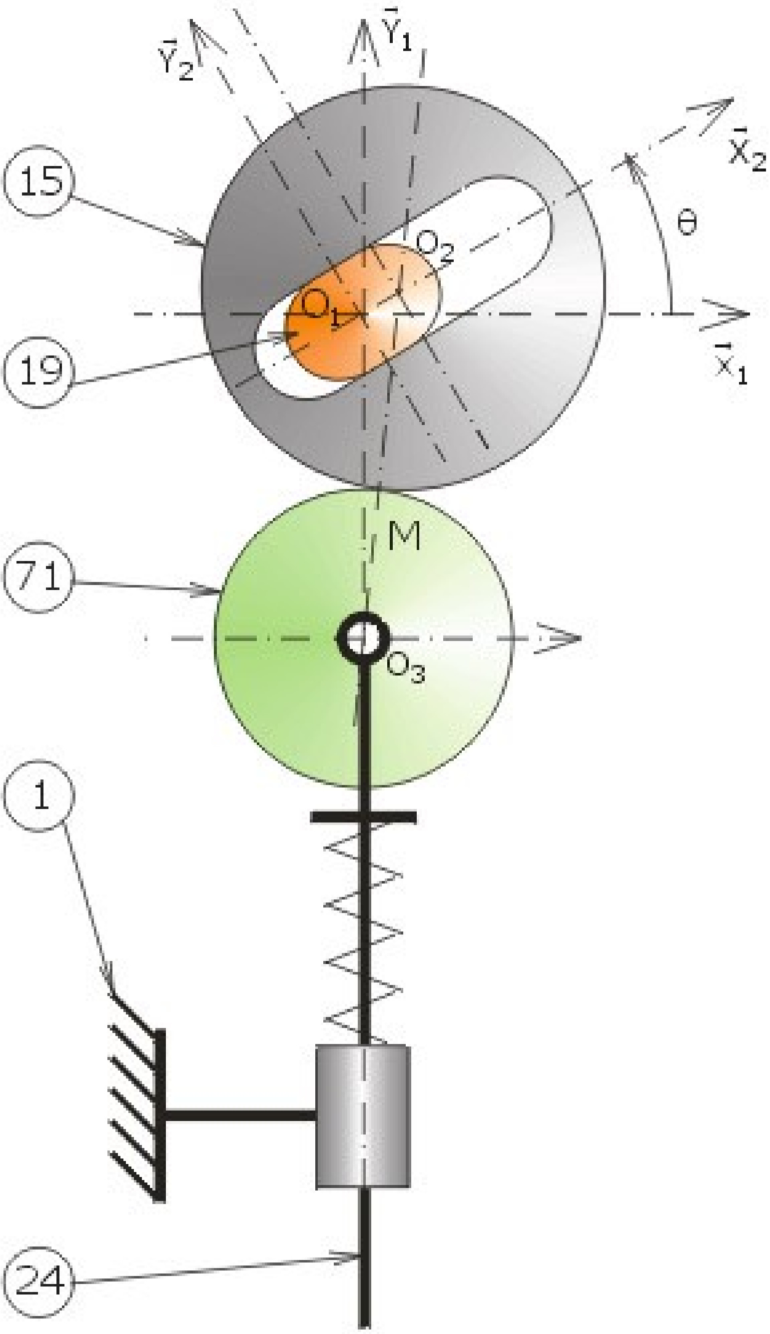
Enoncé *D'après un sujet de concours CCP 1997 PSI*

La cinématique du mécanisme étudié est plane . Le plan d'étude et de représentation est le plan $\left(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1\right)$. Un moteur à courant continu entraîne un arbre (19) en liaison pivot d'axe $\left(O_1, \vec{z}_1\right)$ avec un bâti (1). Un excentrique (15) possédant une surface externe cylindrique de centre géométrique O_2 , est en liaison encastrement démontable avec l'arbre (19). Il est ainsi possible de régler l'excentration $e = \left\|\overrightarrow{O_1 O_2}\right\|$ puis de lier par encastrement les pièces (19) et (15) avant utilisation de ce mécanisme. La pièce (15) est maintenue au contact d'une roulette (71). Le point de contact dans le plan $\left(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1\right)$ est repéré M . La pièce (71) est en liaison pivot d'axe $\left(O_3, \vec{z}_1\right)$ avec un équipage mobile (24) qui est lui même est en liaison glissière de direction $\vec{y}_1$ avec le bâti (1).



On pose :

$$\left|\begin{array}{lll} \overrightarrow{O_3O_1} = h\,\vec{y}_1 \quad , & \alpha = \left(\overrightarrow{O_3O_2}, \overrightarrow{O_3O_1}\right) \quad , & \theta = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) \\ \overrightarrow{O_1O_2} = e.\vec{x}_2 \quad , & \left\|\overrightarrow{O_2M}\right\| = r_1 \quad , & \left\|\overrightarrow{O_3M}\right\| = r_2 \end{array}\right.$$

1 En réalisant la fermeture géométrique entre O_1 O_2 et O_3, donner la loi d'entrée-sortie, h en fonction de θ et des paramètres constants r_1 , r_2 et e .

2 Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(O_3 \in 71/1)$ du point 03 appartenant à l'axe de

rotation de la roulette (71) par rapport au bâti en fonction de θ et $\frac{d\theta}{dt}$. On considère $(r1+r2) >> e^2$

(3) Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(O_3 \in 71/1)$ du point O_3 appartenant à l'axe de rotation de la roulette (71) par rapport au bâti, en considérant que l'arbre (19) tourne à une vitesse de rotation constante $\frac{d\theta}{dt} = \omega$.

Solution

(1) En utilisant la fermeture géométrique $\overrightarrow{O_1O_1} = \underbrace{\overrightarrow{O_1O_2}}_{e.\vec{x}_2} + \underbrace{\overrightarrow{O_2O_3}}_{-(r_1+r_2).\vec{u}} + \underbrace{\overrightarrow{O_3O_1}}_{h.\vec{y}_1} = \vec{0}$ nous déduisons par projection :

$$/\vec{x}_1 \quad 0 = e.\underbrace{\vec{x}_2.\vec{x}_1}_{\cos\theta} - (r_1+r_2).\underbrace{\vec{u}.\vec{x}_1}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} + h.\underbrace{\vec{y}_1.\vec{x}_1}_{0}$$

$$0 = e.\cos\theta - (r_1+r_2).\sin\alpha$$

$$/\vec{y}_1 \quad 0 = e.\underbrace{\vec{x}_2.\vec{y}_1}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} - (r_1+r_2).\underbrace{\vec{u}.\vec{y}_1}_{\cos\alpha} + h.\underbrace{\vec{y}_1.\vec{y}_1}_{1}$$

$$0 = e.\sin\theta - (r_1+r_2).\cos\alpha + h$$

A partir de ces deux relations scalaires , nous obtenons le système suivant :

$$\left|\begin{array}{lcl}(r_1+r_2).\sin\alpha & = & e.\cos\theta \\ (r_1+r_2).\cos\alpha & = & e.\sin\alpha + h\end{array}\right.$$

En portant au carré chacune de ces équations il vient ensuite par sommation :

$$(r_1+r_2)^2 = (e.\cos\theta)^2 + (e.\sin\alpha + h)^2$$

ce qui nous donne finalement :

$$\boxed{h = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (e.\cos\theta)^2} - e.\sin\theta}$$

(2) Pour déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(O_3 \in 71/1)$, dérivons le vecteur position $\overrightarrow{O_1O_3}$:

$\vec{V}(O_3 \in 71/1) = \left.\dfrac{d\,\overrightarrow{O_1O_3}}{dt}\right)_{R_1} = \left.\dfrac{d - h.\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_1}$. Comme $(r1+r2) >> e^2$, $h \approx (r_1+r_2) - e.\sin\theta$ et

l'on a donc : $\vec{V}(O_3 \in 71/1) = \left.\dfrac{d - \left((r_1+r_2) - e.\sin\theta\right).\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_1}$; ce qui donne

$$\boxed{\vec{V}(O_3 \in 71/1) = e.\cos\theta.\dot{\theta}.\vec{y}_1}$$