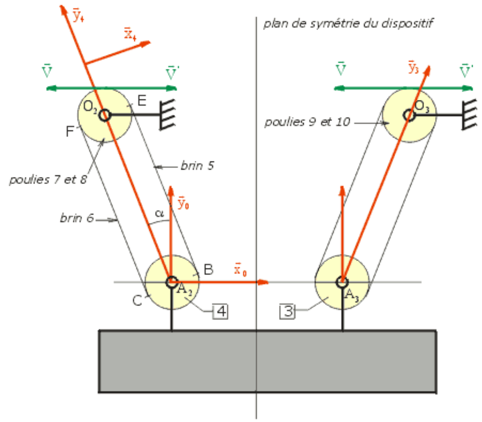
Enoncé

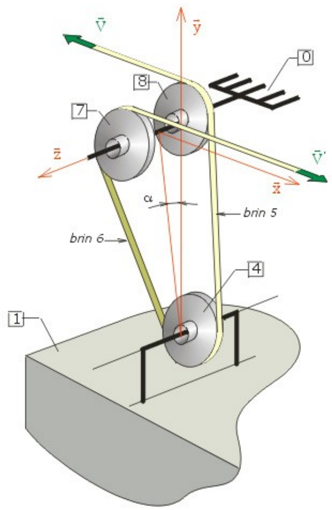
D'après un sujet ENGEES de 1998

On s'intéresse dans cet exercice à un dispositif poulies/câbles permettant de soulever un conteneur lié par encastrement à un cadre de préhension ; ce groupe ***cinématique*** étant repéré (1). Le système de levage comprend quatre câbles s'enroulant à la vitesse $\vec{V}$ sur un tambour unique (non représenté) . Chaque câble a son extrémité fixe liée à la tige d'un vérin (vitesse $\vec{V'}$ si nécessaire). Dans cette étude on ne s'intéresse qu'à deux de ces câbles se trouvant dans un plan $(A_2, \vec{x}, \vec{y})$. Les deux autres câbles sont positionnés de façon identique dans un plan parallèle au plan $(A_2, \vec{x}, \vec{y})$.



Les poulies (3) et (4) étant liées par des liaisons pivots respectives d'axes $(A_2, \vec{z})$ et $(A_3, \vec{z})$ au groupe (1). Les câbles s'enroulent autour des différentes poulies sans glisser. Au dessus du cadre de préhension se trouvent deux paires de poulies en liaison respectives $(O_2, \vec{z})$ et $(O_3, \vec{z})$ avec un bâti (0) (cadre de la grue de relevage) .Chaque brin de chaque câble est enroulé sur une des poulies et soumis à une tension permettant le relevage du conteneur.

La vitesse de relevage du conteneur est imposée par la vitesse $\vec{V}$ communiquée à un brin de chaque câble. Par ailleurs, il existe un dispositif de sécurité permettant d'imposer des vitesses $\vec{V'}$ aux autres brins des câbles.



On suppose que:
* Le problème est un problème de cinématique ***plane***

les vecteurs vitesses de rotation des différentes pièces sont parallèles à la direction $\vec{z}$

***** Toutes les poulies ont le même rayon r
* Tous les brins de câbles sont tendus et roulent sans glisser sur les poulies

1 Etude de la transmission par poulies/câbles

* les normes $\|\vec{V}\| = V$ et $\|\vec{V}'\| = V'$ sont données

* Le torseur cinématique de l'ensemble (1) par rapport à (0) est de la forme $_{A_2}\{\vartheta_{1/0}\} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} r_{1/0}.\vec{z} \\ u_{1/0}.\vec{x}_4 + v_{1/0}.\vec{y}_4 \end{Bmatrix} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} 0 & u_{1/0} \\ 0 & v_{1/0} \\ r_{1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z})}$

1.1 Déterminer $\vec{V}(F \in 6/0)$ et $\vec{V}(E \in 5/0)$ en fonction de V et V'

1.2 Exprimer une relation entre $\vec{V}(F \in 6/0)$ et $\vec{V}(C \in 6/0)$ et entre $\vec{V}(B \in 5/0)$ et $\vec{V}(E \in 5/0)$

1.3 Donner les expressions des torseurs cinématiques $_{A_2}\{\vartheta_{4/1}\}$ et $_{A_2}\{\vartheta_{4/0}\}$. Donner l'expression de la relation liant $\vec{V}(B \in 4/0)$ et $\vec{V}(C \in 4/0)$ en fonction des composantes des torseurs définis précédemment.

1.4 Déterminer $v_{1/0}$ et $r_{4/0}$ en fonction de V , V' et du rayon r des poulies.

2 Montée sans incident de l'ensemble (1)

* on pose $V' = 0$
* $\overrightarrow{A_2O_2}.\vec{y} = h$, $\overrightarrow{A_2A_3}.\vec{x} = L_1$, $\overrightarrow{O_2O_3}.\vec{x} = L_0$

* Le torseur cinématique souhaité de 1 par rapport à 0 est $_{A_2}\{\vartheta_{1/0}\} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{lev}.\vec{y} \end{Bmatrix}$

2.1 Déterminer la valeur de l'angle β garantissant le torseur cinématique $_{A_2}\{\vartheta_{1/0}\}$

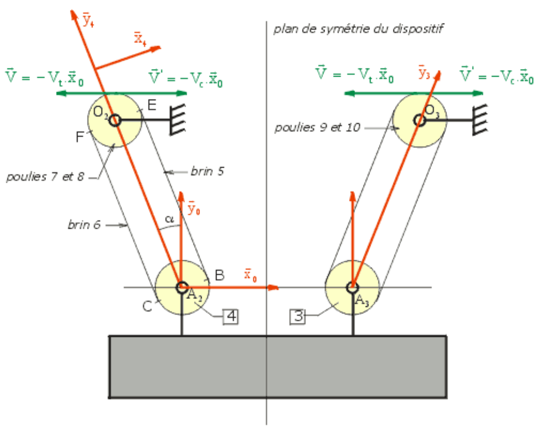
2.2 Exprimer alors la vitesse de levage V_{lev}

2.3 Entre la position basse h_{min} et haute h_{max} de l'ensemble (1), déterminer α_{min} , α_{max} , V_{levmin} et V_{levmax} .

2.4 Déterminer aussi la longueur enroulée de chaque câble entre le début et la fin de montée: L_c

3 Montée avec incident

On considère l'ensemble (1) s'accrochant en un point fixe O du bateau lors du déchargement du conteneur. Un système de sécurité permet alors d'inverser les vitesses d'enroulement $\vec{V}'$ sur les deux poulies .



On considère une vitesse angulaire du conteneur $r_{1/0}$

3.1 Exprimer V_c et $r_{1/0}$ en fonction de V_t , de l'angle α et des longueurs a et b telles que $\|\overrightarrow{OA_2}\| = a$ et $\|\overrightarrow{OA_3}\| = b$

Solution

1.1 Pour déterminer les vitesses $\vec{V}(F \in 6/0)$ et $\vec{V}(E \in 5/0)$, utilisons le non glissement en F et E au contact des poulies (7) et (8).

<u>En F nous pouvons écrire</u> :

$\vec{V}(F \in 6/7) = \vec{0} = \vec{V}(F \in 6/0) + \vec{V}(F \in 0/7)$; ce qui se traduit par : $\vec{V}(F \in 6/0) = \vec{V}(F \in 7/0) = V'.\vec{y}_4$ car d'une part la trajectoire de F par rapport à (0) est un cercle de centre O_2 et donc la vitesse en F est tangente à cette trajectoire au point considéré (donc suivant $\vec{y}_4$) et d'autre part, O_2 étant le CIR du mouvement de 7 par rapport à 0, tous les points situés sur le même cercle centré en O_2 ont la même norme de vitesse. On a donc $\boxed{\vec{V}(F \in 6/0) = V'.\vec{y}_4}$

En E nous pouvons écrire :

$\vec{V}(E \in 5/8) = \vec{0} = \vec{V}(E \in 5/0) + \vec{V}(E \in 0/8)$; ce qui se traduit par : $\vec{V}(E \in 5/0) = \vec{V}(E \in 8/0) = V.\vec{y}_4$ avec un raisonnement identique au cas précédent. On a donc $\boxed{\vec{V}(E \in 5/0) = V.\vec{y}_4}$

1.2 Le câble étant tendu et inextensible, il peut être considéré suivant la droite (C,F) comme un solide. En utilisant alors la propriété d' ***équiprojectivité*** d'un champ de moments d'un torseur on a $\underbrace{\vec{V}(F \in 6/0).\vec{y}_4}_{V'} = \vec{V}(C \in 6/0).\vec{y}_4$. De la même manière, on peut écrire $\underbrace{\vec{V}(E \in 5/0).\vec{y}_4}_{V} = \vec{V}(B \in 5/0).\vec{y}_4$

propriété liée au champ de moments d'un torseur et qui traduit dans ce cas le fait que deux points d'un même solide ont la même composante de vitesse suivant la droite qui passe par ces deux points

1.3 Du fait de la liaison pivot d'axe $(A_2, \vec{z})$ entre (4) et (1) on peut écrire :

$$\boxed{{}_{A_2}\{\mathcal{V}_{4/1}\} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} r_{4/1}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}.$$

A partir de la composition des torseurs cinématiques nous pouvons écrire :

$$_{A_2}\{\mathcal{V}_{4/0}\} = {}_{A_2}\{\mathcal{V}_{4/1}\} + {}_{A_2}\{\mathcal{V}_{1/0}\} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} r_{4/1}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{A_2}\begin{Bmatrix} r_{1/0}.\vec{z} \\ u_{1/0}.\vec{x}_4 + v_{1/0}.\vec{y}_4 \end{Bmatrix} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} (r_{4/1} + r_{1/0}).\vec{z} \\ u_{1/0}.\vec{x}_4 + v_{1/0}.\vec{y}_4 \end{Bmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{{}_{A_2}\{\mathcal{V}_{4/0}\} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} (r_{4/1} + r_{1/0}).\vec{z} \\ u_{1/0}.\vec{x}_4 + v_{1/0}.\vec{y}_4 \end{Bmatrix}}$$

1.4 En exploitant le non glissement en C et B , nous pouvons écrire :

$$\vec{V}(C \in 6/4) = \vec{0} = \vec{V}(C \in 6/0) + \vec{V}(C \in 0/4)$$
$$\vec{V}(B \in 5/4) = \vec{0} = \vec{V}(B \in 5/0) + \vec{V}(B \in 0/4)$$

ce qui nous donne :

$$\vec{V}(C \in 6/0) = \vec{V}(C \in 4/0)$$
$$\vec{V}(B \in 5/0) = \vec{V}(B \in 4/0)$$

et donc en projection suivant l'axe $\vec{y}_4$:

$$\vec{V}(C \in 6/0).\vec{y}_4 = V' = \vec{V}(C \in 4/0).\vec{y}_4 = \left(\underbrace{\vec{V}(A_2 \in 4/0)}_{\vec{V}(A_2 \in 1/0)} + \overrightarrow{CA_2} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}\right).\vec{y}_4 \quad 1)$$

$$\vec{V}(B \in 5/0).\vec{y}_4 = V = \vec{V}(B \in 4/0).\vec{y}_4 = \left(\underbrace{\vec{V}(A_2 \in 4/0)}_{\vec{V}(A_2 \in 1/0)} + \overrightarrow{BA_2} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}\right).\vec{y}_4 \quad 2)$$

En utilisant la première relation: $V' = \underbrace{\vec{V}(A_2 \in 1/0).\vec{y}_4}_{v_{1/0}} + \left(\underbrace{\overrightarrow{CA_2} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}}_{r.\vec{x}_4 \wedge r_{4/0}.\vec{z}}\right).\vec{y}_4 = v_{1/0} - r.r_{4/0}$

nous déterminons la relation : $\boxed{r_{4/0} = \dfrac{v_{1/0} - V'}{r}}$

En sommant terme à terme les deux relations 1) et 2) il vient :

$$\vec{V}(C \in 6/0) + \vec{V}(B \in 5/0) = 2.\vec{V}(A \in 4/0)$$

En projetant sur l'axe $\vec{y}_4$:

$$\underbrace{\vec{V}(C \in 6/0).\vec{y}_4}_{V'} + \underbrace{\vec{V}(B \in 5/0).\vec{y}_4}_{V} = \underbrace{2.\vec{V}(A \in 4/0).\vec{y}_4}_{2.v_{1/0}}$$

Ce qui nous donne : $\boxed{v_{1/0} = \dfrac{V' + V}{2}}$

En remplaçant $v_{1/0}$ par sa valeur dans l'expression de $r_{4/0}$, on détermine $\boxed{r_{4/0} = \frac{V-V'}{2r}}$

2.1 En utilisant la relation de la question précédente $v_{1/0} = \frac{V'+V}{2}$ avec $V'=0$ on déduit que $\vec{V}(A_2 \in 1/0) = u_{1/0}.\vec{x}_4 + \frac{V}{2}.\vec{y}_4$. Au point A_3 nous pouvons écrire $\vec{V}(A_2 \in 1/0) = \vec{V}(A_3 \in 1/0) + \overrightarrow{A_2A_3} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$. Par un raisonnement identique à celui fait au point A_2 nous pouvons dire que $\vec{V}(A_3 \in 1/0).\vec{y}_3 = \frac{V}{2}.\vec{y}_3$.

Le torseur cinématique souhaité entre (1) et (0) nous impose deux conditions cinématiques .

La première est telle que :

$\vec{V}(A_2 \in 1/0).\vec{x} = 0 = \left(u_{1/0}.\vec{x}_4 + \frac{V}{2}.\vec{y}_4\right).\vec{x}$ ce qui implique $u_{1/0}.\underbrace{(\vec{x}_4.\vec{x})}_{\cos\alpha} + \frac{V}{2}.\underbrace{(\vec{y}_4.\vec{x})}_{-\sin\alpha} = 0$. On a donc $\boxed{u_{1/0} = \frac{V}{2}.\tan\alpha}$ 3)

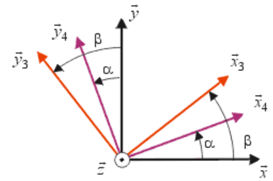
La seconde relation souhaitée est telle que :

$\vec{V}(A_2 \in 1/0) = \vec{V}(A_3 \in 1/0)$; ce qui implique donc que $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$. Le mouvement de (1) par rapport à (0) est dans ce cas une ***translation*** . En projetant suivant $\vec{y}_3$, on a:

> Le torseur cinématique de 1 par rapport à 0 étant dans ce cas un torseur couple à résultante nulle et à champ de vecteurs vitesses des points uniforme. Tous les points considérés du groupe cinématique 1 ont alors même vitesse à t donné

$$\underbrace{\vec{V}(A_2 \in 1/0)}_{u_{1/0}.\vec{x}_4 + \frac{V}{2}.\vec{y}_4}.\vec{y}_3 = \underbrace{\vec{V}(A_3 \in 1/0).\vec{y}_3}_{\frac{V}{2}}$$

ce qui permet d'écrire à partir de la figure plane ci-dessous :



$\boxed{-u_{1/0}.\sin(\beta-\alpha) + \frac{V}{2}.\cos(\beta-\alpha) = \frac{V}{2}}$ 4)

En combinant maintenant ces deux dernières relations 3) et 4) il vient :

$-\tan\alpha.\sin(\beta-\alpha) + \cos(\beta-\alpha) = 1$ ce qui donne $\cos\beta = \cos\alpha$

Sur 2π rad : $\beta = \pm\alpha$. Dans notre cas de figure la solution retenue est $\boxed{\beta = -\alpha}$

2.2 La vitesse de levage est définie par $V_{lev} = \vec{V}(A_2 \in 1/0).\vec{y}$ et donc par $V_{lev} = u_{1/0}.\underbrace{\vec{x}_4.\vec{y}}_{\sin\alpha} + \frac{V}{2}.\underbrace{\vec{y}_4.\vec{y}}_{\cos\alpha}$; ce qui donne $V_{lev} = \frac{V}{2}.\tan\alpha.\sin\alpha + \frac{V}{2}.\cos\alpha = \frac{V}{2}.\frac{1}{\cos\alpha}$. La vitesse est donc $\boxed{V_{lev} = \frac{V}{2}.\frac{1}{\cos\alpha}}$

2.3 Déterminons les valeurs extrêmes de α :

Géométriquement nous avons :

$$\boxed{\tan\alpha_{\min} = \frac{1}{2}.\frac{L_0-L_1}{h_{\max}} \rightarrow \quad \alpha_{\min} = Arc\tan\left(\frac{1}{2}.\frac{L_0-L_1}{h_{\max}}\right)}$$

$$\boxed{\tan\alpha_{\max} = \frac{1}{2}.\frac{L_0-L_1}{h_{\min}} \rightarrow \quad \alpha_{\max} = Arc\tan\left(\frac{1}{2}.\frac{L_0-L_1}{h_{\min}}\right)}$$

A partir de l'expression de la vitesse de levage déterminée à la question 2- 1 : $V_{lev} = \frac{V}{2}.\frac{1}{\cos\alpha}$, nous pouvons déterminer les vitesses extrêmes :

$$\boxed{V_{lev\min} = \frac{V}{2}.\frac{1}{\cos\alpha_{\min}} \rightarrow \quad V_{lev\min} = \frac{V}{2}.\frac{1}{\cos\left(Arc\tan\left(\frac{1}{2}.\frac{L_0-L_1}{h_{\max}}\right)\right)}}$$

$$\boxed{V_{lev\max} = \frac{V}{2}.\frac{1}{\cos\alpha_{\max}} \rightarrow \quad V_{lev\max} = \frac{V}{2}.\frac{1}{\cos\left(Arc\tan\left(\frac{1}{2}.\frac{L_0-L_1}{h_{\min}}\right)\right)}}$$

2.4 La longueur de câble enroulée entre la position basse h_{min} et haute h_{max} de l'ensemble (1) sera : $\boxed{L_c = 2.\left(\frac{h_{max}}{\cos(\alpha_{min})} - \frac{h_{min}}{\cos(\alpha_{max})}\right)}$

3.1 Pour exprimer V_C et $r_{1/0}$ en fonction de V_t , de l'angle α et des longueurs a et b telles que $\left\|\overrightarrow{OA_2}\right\| = a$ et $\left\|\overrightarrow{OA_3}\right\| = b$, utilisons les résultats des questions 1-3 et 1-4 :

En A_2 nous pouvons écrire :

$$_{A_2}\{\mathcal{V}_{4/0}\} = {}_{A_2}\begin{Bmatrix} (r_{4/1} + r_{1/0}).\vec{z} \\ u_{1/0}.\vec{x}_4 + v_{1/0}.\vec{y}_4 \end{Bmatrix} \text{ avec } v_{1/0} = \frac{V' + V}{2} = \frac{V_t - V_c}{2} \text{ pour la poulie (4)}$$

Nous avons aussi :

$$\underbrace{\vec{V}(A_2 \in 4/0)}_{u_{1/0}.\vec{x}_4 + v_{1/0}.\vec{y}_4} = \vec{V}(A_2 \in 1/0) = \underbrace{\vec{V}(O \in 1/0)}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{A_2O} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}}_{-a.\vec{x} \wedge r_{1/0}.\vec{z}}$$

$$u_{1/0}.\vec{x}_4 + v_{1/0}.\vec{y}_4 = a.r_{1/0}.\vec{y}$$

En projetant cette relation sur la direction $\vec{y}_4$ nous obtenons :

$$\boxed{\frac{V_t - V_c}{2} = a.r_{1/0}.\cos\alpha} \quad 5)$$

En A_3 nous pouvons écrire :

$$_{A_3}\{\mathcal{V}_{3/0}\} = {}_{A_3}\begin{Bmatrix} (r_{3/1} + r_{1/0}).\vec{z} \\ u_{1/0}.\vec{x}_3 + v_{1/0}.\vec{y}_3 \end{Bmatrix} \text{ avec } v_{1/0} = \frac{V' + V}{2} = \frac{V_t + V_c}{2} \text{ pour la poulie (3)}$$

Nous avons de plus :

$$\underbrace{\vec{V}(A_3 \in 3/0)}_{u_{1/0}.\vec{x}_3 + v_{1/0}.\vec{y}_3} = \vec{V}(A_3 \in 1/0) = \underbrace{\vec{V}(O \in 1/0)}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{A_3O} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}}_{-b.\vec{x} \wedge r_{1/0}.\vec{z}}$$

$$u_{1/0}.\vec{x}_3 + v_{1/0}.\vec{y}_3 = b.r_{1/0}.\vec{y}$$

En projetant cette relation sur la direction $\vec{y}_3$ nous obtenons

$$\boxed{\frac{V_t + V_c}{2} = b.r_{1/0}.\cos\alpha} \quad 6)$$

En combinant les relations 5) et 6) nous obtenons alors :

$$\boxed{r_{1/0} = \frac{V_t}{(a+b).\cos\alpha}} \text{ et } \boxed{V_c = \frac{(b-a)}{(a+b)}.V_t}$$