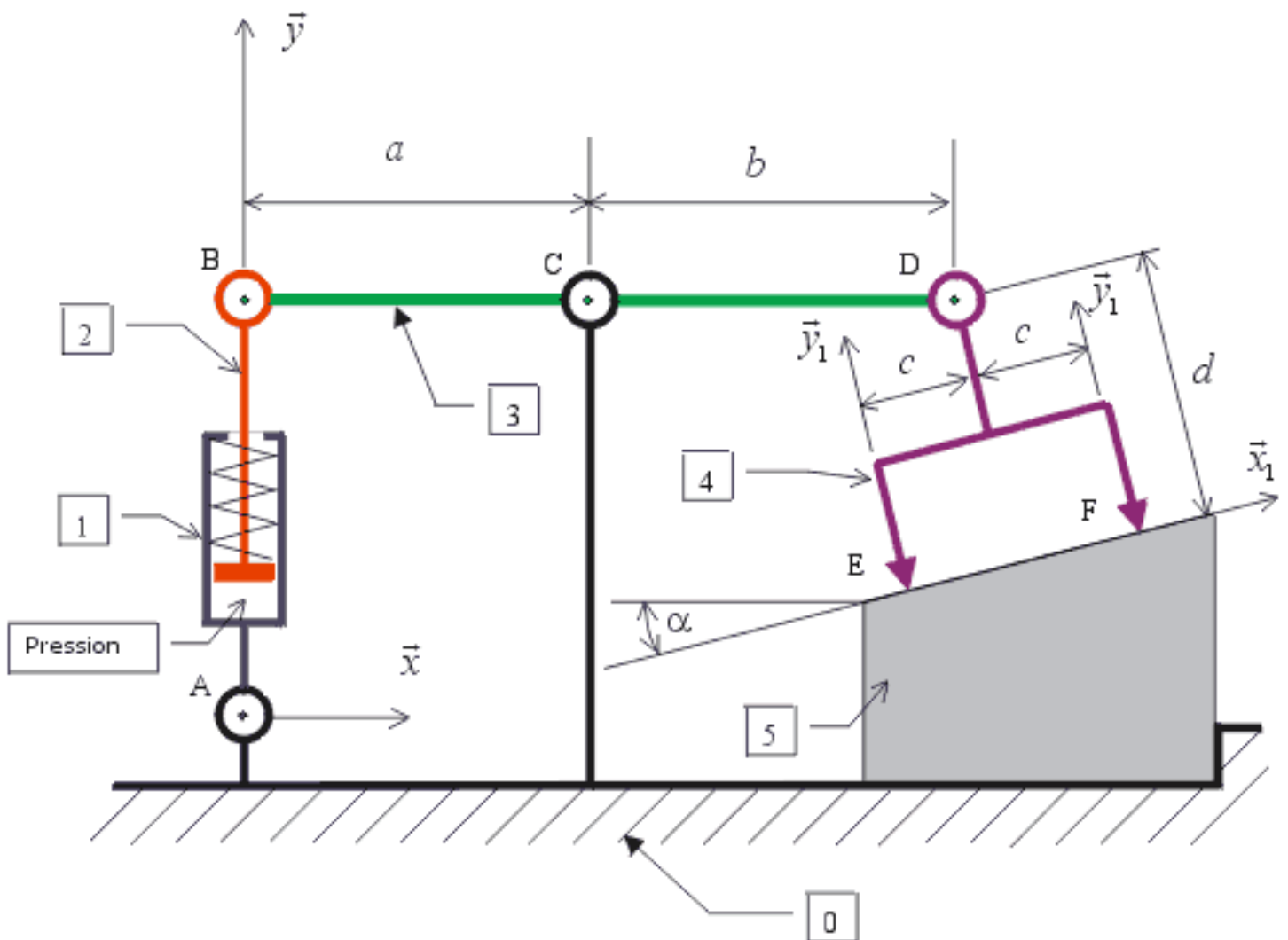


Enoncé

Considérons un dispositif d'ablocage de pièce, positionné sur une table de machine outil. La pièce (5) est bridée sur la table (0) par l'intermédiaire d'un palonnier (4). L'effecteur utilisé lors du bridage est un vérin simple effet constitué d'un corps (1) et d'une tige (2). Ce vérin est en articulation avec les pièces (0) et (3) aux points A et B. La pièce (3) est elle-même en liaison articulation avec (0) et (4) aux points C et D. Le palonnier (4) possède deux appuis ponctuels de normale \vec{y}_1 avec la pièce (5). Le problème est un problème de statique plane. La position des pièces pour l'étude statique est celle définie par la figure proposée. Les liaisons entre pièces sont supposées parfaites.



Le torseur d'action mécanique de la pièce (i) sur la pièce (j) sera noté :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{(-, -, -)}$$

La section utile (S) du piston est soumise à la pression d'alimentation (P). La tige du vérin (2) est

en liaison pivot glissant d'axe $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right)$ par rapport au corps du vérin (1).

Dans ces conditions, on demande de déterminer :

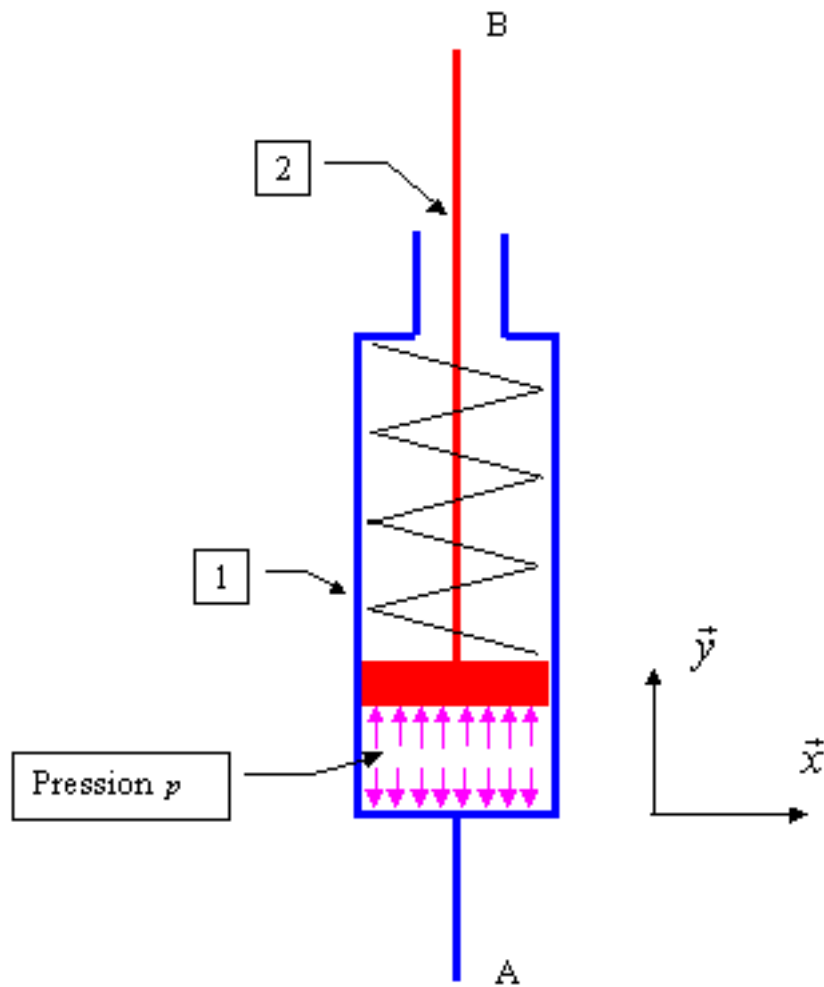
- 1 En isolant les différentes parties du vérin, de démontrer que l'action équivalente du bâti (0) sur la pièce (3) est équivalente à un glisseur passant par B et d'axe central orienté par \overrightarrow{AB} .
- 2 La liaison équivalente entre (3) et (5)
- 3 Les actions au niveau de chaque liaison en fonction de la pression P d'alimentation du vérin

Solution

- 1 Caractérisons les actions au niveau du vérin par des torseurs :

Considérons le système isolé constitué des pièces (1), (2),(3),(4). Le système possède un plan de symétrie (A, \vec{x}, \vec{y}) . Les actions externes appliquées au système sont réductibles :

*D'une part, à deux glisseurs résultants des actions réparties de la pression sur le piston (2) et sur le corps de vérin (1).



Soit $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

$$\{T_{pression \rightarrow 1}\}_{\forall M \in (A, \vec{v})} = \begin{Bmatrix} -p \cdot S \cdot \vec{v} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \{T_{pression \rightarrow 2}\}_{\forall M \in (A, \vec{v})} = \begin{Bmatrix} p \cdot S \cdot \vec{v} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

*D'autre part, à l'action de contact type ponctuelle de normale \vec{M}_1 en E et F entre les pièces (5) et (4).
Le problème étant un problème de statique plane, les torseurs d'action mécanique transmissibles entre les pièces (i) et (j) des liaisons pivot de direction \vec{z} seront notés :

$$\{T_{i \rightarrow j}\}_M = \begin{Bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ - \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ - \\ 0 \end{Bmatrix}_{(-, -, \vec{z})} \quad \text{Ce sont des glisseurs.}$$

*Isolons la tige (2) :
caractérisons les actions externes :

$$\{T_{pression \rightarrow 2}\}_{\forall M \in (A, \vec{v})} = \begin{Bmatrix} p \cdot S \cdot \vec{v} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \forall M \in (A, \vec{v}) \left\{ \begin{array}{l|l} X_{12} & - \\ 0 & - \\ - & N_{12} \end{array} \right\} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$$

$$\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l|l} X_{32} & - \\ Y_{32} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}} (-, -, \vec{z})$$

Appliquons le PFS à (2) en B. Cette pièce étant soumise à deux glisseurs coplanaires $\{T_{pression \rightarrow 2}\}$

et $\{T_{3 \rightarrow 2}\}$, à l'équilibre, le troisième torseur est un glisseur au point de concours des deux autres glisseurs (le point B). On peut donc écrire

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l|l} X_{12} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{array} \right\}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$$

et de plus, en projection dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$:

$$\boxed{\begin{array}{l} X_{12} + X_{32} = 0 \quad 1) \\ Y_{32} + p.S = 0 \quad 2) \end{array}}$$

*Isolons ensuite la pièce (1) :

Caractérisons les actions externes :

$$\{T_{pression \rightarrow 1}\} = \forall M \in (A, \vec{v}) \left\{ \begin{array}{l} -p.S.\vec{v} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\{T_{2 \rightarrow 1}\} = -\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l|l} -X_{12} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{array} \right\}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) \quad \text{A partir de l'étude précédente}$$

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l|l} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}} (-, -, \vec{z})$$

Appliquons le PFS à (1). Cette pièce est soumise à trois glisseurs plans. D'après le théorème d'un solide soumis à trois glisseurs, à l'équilibre, leurs axes centraux sont concourants. Comme le point de concours des axes centraux de $\{T_{pression \rightarrow 1}\}$ et $\{T_{0 \rightarrow 1}\}$ est le point A, le troisième glisseur a son axe central qui doit passer par ce point. La seule possibilité est que : $X_{12} = 0$. Le torseur d'action

$\{T_{2 \rightarrow 1}\}$ est le torseur nul. La projection des équations d'équilibre dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ nous donne :

$$\begin{cases} X_{21} = -X_{12} = 0 & 3) \\ X_{01} = 0 & 4) \\ Y_{01} - p.S = 0 & 5) \end{cases}$$

En analysant les relations (2) et (5) nous remarquons que :

L'action de la pièce (0) sur la pièce (1) est identique à l'action de (2) sur (3) :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \forall M \in (A, \vec{v}) \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & - \\ p.S & - \\ - & 0 \end{array} \right\} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$$

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \forall M \in (A, \vec{v}) \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & - \\ p.S & - \\ - & 0 \end{array} \right\} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$$

On peut donc conclure que l'action équivalente du bâti (0) sur la pièce (3) est équivalente à un glisseur :

$$\boxed{\{T_{Vérin 0 \rightarrow 3}\} = \forall M \in (A, \vec{v}) \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & - \\ p.S & - \\ - & 0 \end{array} \right\} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}} \quad (\vec{v} = \vec{y} \text{ dans notre étude})$$

② Pour déterminer la liaison équivalente entre les pièces (5) et (3), isolons la pièce (4).

Caractérisons les actions externes sur cette pièce par des torseurs :

$$\{T_{(E) 5 \rightarrow 4}\} = \begin{array}{l} E \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & - \\ Y_{E 54} & - \\ - & 0 \end{array} \right\} \end{array} (-, \vec{y}_1, -)$$

$$\{T_{(F) 5 \rightarrow 4}\} = \begin{array}{l} F \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & - \\ Y_{F 54} & - \\ - & 0 \end{array} \right\} \end{array} (-, \vec{y}_1, -)$$

$$\{T_{3 \rightarrow 4}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{34} & - \\ Y_{34} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

Cette pièce est soumise à trois glisseurs . A l'équilibre, d'après le théorème d'un solide soumis à trois glisseurs, ces glisseurs ont leurs axes centraux concourants . Comme $\{T_{(E) 5 \rightarrow 4}\}$ et $\{T_{(F) 5 \rightarrow 4}\}$ ont leurs axes centraux parallèles : (E, \vec{y}_1) et (F, \vec{y}_1) , le troisième glisseur a son axe parallèle aux deux autres glisseurs ; c'est: (D, \vec{y}_1) . Ce cas correspond au cas particulier où les axes centraux se joignent à l'infini. Comme les résultantes des glisseurs orientent les axes centraux, on doit avoir : $X_{34} = 0$.

Comme de plus , le plan (D, \vec{y}_1, \vec{z}) est le plan de symétrie de chargement de la pièce (4), on a par symétrie : $\vec{F}_{E 5 \rightarrow 4} = \vec{F}_{F 5 \rightarrow 4} = Y_{E 54} \vec{y}_1 = Y_{F 54} \vec{y}_1$ ce qui donne : $Y_{E 54} = Y_{F 54}$. On peut

alors définir un torseur équivalent $\{T_{5 \rightarrow 4}\}_D$ d'action de la pièce (5) sur la pièce (4) en D:

$$\begin{aligned} \{T_{5 \rightarrow 4}\}_D &= \{T_{E 5 \rightarrow 4}\}_D + \{T_{F 5 \rightarrow 4}\}_D \\ &= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ Y_{E 54} & - \\ - & -c \cdot Y_{E 54} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ Y_{F 54} & - \\ - & c \cdot Y_{F 54} \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})} \end{aligned}$$

$$\{T_{5 \rightarrow 4}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ 2 \cdot Y_{E 54} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})} \quad \text{car } Y_{E 54} = Y_{F 54}$$

Ce torseur équivalent est un glisseur d'axe central (D, \vec{y}_1) . La pièce (4) est donc soumise en fait à l'action de deux glisseurs . D'après le théorème d'un solide soumis à deux glisseurs, les glisseurs ont même axe central, et leurs résultantes ont même norme et sens opposés. On déduit :

$$\{T_{3 \rightarrow 4}\} = {}_D \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{34} = -2.Y_{E 54} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$$

$$\{T_{5 \rightarrow 4}\} = {}_D \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{54} = 2.Y_{E 54} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$$

L'action de la pièce (3) sur la pièce (5) est donc une action équivalente de type ponctuelle en D de normale \vec{y}_1 d'expression :

$$\boxed{\{T_{3 \rightarrow 5}\} = {}_D \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{35} = Y_{34} = -2.Y_{E 54} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

③ Les torseurs plans représentatifs des actions de contact entre les différents solides sont les suivants :

$$\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \forall M \in (A, \mathcal{J}) \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{01} = p.S \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

$$\{T_{2 \rightarrow 1}\} = -\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \forall M \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\} (-, -, -)$$

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \forall M \in (A, \mathcal{J}) \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{23} = p.S \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

$$\{T_{3 \rightarrow 4}\} = {}_D \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{34} = -2.Y_{E 54} = -Y_{54} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$$

$$\{T_{5 \rightarrow 4}\}_D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{54} = 2.Y_E 54 \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

$$\{T_{0 \rightarrow 3}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} X_{03} \\ Y_{03} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})}$$

*Isolons la pièce (3)

*Caractérisons les actions externes par des torseurs :

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\}_{\forall M \in (A, \vec{y})} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ Y_{23} = p.S \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{T_{4 \rightarrow 3}\} = -\{T_{3 \rightarrow 4}\}_D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -Y_{34} = 2.Y_E 54 = Y_{54} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} Y_{34} \cdot \sin \alpha \\ -Y_{34} \cdot \cos \alpha \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ -(a+b) \cdot Y_{34} \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{T_{0 \rightarrow 3}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} X_{03} \\ Y_{03} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(-, -, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{l} X_{03} \\ Y_{03} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{l} - \\ - \\ a.Y_{03} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

*En appliquant le PFS à la pièce (3) en B en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, il vient :

$$\sum_B \{T_{\vec{3} \rightarrow 3}\} = \{\vec{0}\}$$

$${}_B \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Y_{23} = p.S \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + {}_B \left\{ \begin{array}{c} Y_{34} \cdot \sin \alpha \\ -Y_{34} \cdot \cos \alpha \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ -(a+b) \cdot Y_{34} \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$+ {}_B \left\{ \begin{array}{c} X_{03} \\ Y_{03} \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ a \cdot Y_{03} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}$$

Les relations liant les composantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} Y_{34} \cdot \sin \alpha + X_{03} = 0 & 1) \\ p.S - Y_{34} \cdot \cos \alpha + Y_{03} = 0 & 2) \\ -(a+b) \cdot Y_{34} \cdot \cos \alpha + a \cdot Y_{03} = 0 & 3) \end{cases}$$

Par combinaison de ces relations, il vient :

$$\boxed{Y_{03} = -\frac{a+b}{b} \cdot p.S} \quad \boxed{Y_{34} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{p.S}{\cos \alpha}} \quad \boxed{X_{03} = \frac{a}{b} \cdot p.S \cdot \tan \alpha}$$

Les torseurs des liaisons s'expriment en fonction de la pression P par :

$$\boxed{\{T_{0 \rightarrow 1}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ p.S \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$$

$$\boxed{\{T_{2 \rightarrow 3}\} = {}_B \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ p.S \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$$

$$\boxed{\{T_{2 \rightarrow 1}\} = -\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \forall M \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ - \end{array} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_{(-, -, -)}}$$

$$\{T_{0 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{a}{b} \cdot p \cdot S \cdot \tan \alpha & - \\ -\frac{a+b}{b} \cdot p \cdot S & - \\ - & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

$$\{T_{3 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ -\frac{a}{b} \cdot \frac{p \cdot S}{\cos \alpha} & - \\ - & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$$

$$\{T_{(E)S \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ \frac{a}{2b} \cdot \frac{p \cdot S}{\cos \alpha} & - \\ - & 0 \end{array} \right\} (-, \vec{y}_1, -)$$

$$\{T_{(F)S \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ \frac{a}{2b} \cdot \frac{p \cdot S}{\cos \alpha} & - \\ - & 0 \end{array} \right\} (-, \vec{y}_1, -)$$